第 36 卷　第 3 期　　　　计　算　机　工　程　　　　2010 年 2 月
Vol.36　　No.3　　　　Computer Engineering　　　　February 2010
·人工智能及识别技术·　　文章编号：1000—3428(2010)03—0189—03　　文献标识码：A　　中图分类号：TP311

求解矩阵特征值和特征向量的 PSO 算法

韦杏琼，周永权
(广西民族大学数学与计算机科学学院，南宁 530006)

摘　要：提出一种基于粒子群优化算法的求解方法，将线性方程组的求解转化为无约束优化问题加以解决，采用粒子群优化算法求解矩阵特征值和特征向量。仿真实验结果表明，该方法求解精度高、收敛速度快，能够在 10 代左右收敛，可以有效获得任意矩阵的特征值和特征向量。

关键词：粒子群优化算法；特征值；特征向量；特征方程

PSO Algorithm for Solving Matrix Eigenvalues and Eigenvectors

WEI Xing-qiong, ZHOU Yong-quan
(College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006)

【Abstract】A method based on Particle Swarm Optimization(PSO) algorithm is presented, which transfers the equations into a non-constraint optimization problem. The PSO algorithm is used to solve matrix eigenvalues and eigenvectors. Simulation experimental results show the accuracy and the convergence speed of this method is higher, which can converge in about ten generations. It can obtain any matrix eigenvalues and eigenvectors.

【Key words】Particle Swarm Optimization(PSO) algorithm; eigenvalues; eigenvectors; characteristic equation

1　概述

在科学与工程计算中，求解矩阵特征值和特征向量是最普遍的问题之一。如动力系统和结构系统中的振动问题、电力系统的静态稳定分析上、工程设计中的某些临界值的确定等都可归结为求解矩阵特征值问题。矩阵的特征值和特征向量问题是数值计算中的一个重要组成部分，常用的求解方法有迭代法和变换法[1]。其中，迭代法是通过一系列矩阵向量乘积而求得特征值和特征向量，常用的方法有 Lanczos 法、Davidson 法等；变换法是直接对矩阵进行处理，通过变换，使之变成较容易求解特征值、特征向量的新矩阵。这些方法都取得了一定的成功，但是普遍存在着存储量较大、计算精度低、收敛速度慢及泛化能力弱等缺陷。

粒子群优化(Particle Swarm Optimization, PSO)算法[2]是美国学者 Kennedy 和 Eberhart 于 1995 年提出的,它是基于群体智能的进化优化算法，采用实数求解，需要调整的参数较少，且算法简单、易于实现。因此，算法一提出就受到众多学者的重视，并且已经在神经网络训练、函数优化和模糊系统控制等领域取得了大量的应用研究成果[3-4]。

本文将线性方程组的求解转化为无约束优化问题来解决，用粒子群算法求解矩阵特征值和特征向量，提出一种基于粒子群算法求解矩阵特征值和特征向量的方法，并通过数值仿真实验验证了该方法的有效性和正确性。

2　矩阵特征值和特征向量[5]

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果存在数 λ 和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{Z}$，使 $\boldsymbol{AZ}=\lambda\boldsymbol{Z}$，则 λ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{Z}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量。$P(\lambda)=\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right|=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程，这是个关于 λ 的 n 次方程，其中，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

本文特征值考虑在复数范围内，特征向量考虑在实数范围内。

性质 1 如果 $\boldsymbol{Z}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，则 $c\boldsymbol{Z}(c\neq 0)$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量。

性质 2(圆盘定理)　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以确定复平面上 n 个以 a_{ii} 为中心，以 $\sum\limits_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|$ 为半径的圆盘 $\{z\,\big|\,|z-a_{ii}|\leqslant\sum\limits_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|\}$，$i=1,2,\cdots,n$。每个特征值必属于上述 n 个圆盘中的某一个。而且如果有其中 m 个圆盘组成一个连通区域 Ω，且 Ω 与其他 $n-m$ 个圆盘不连通，则 Ω 包含 m 个特征值。

由性质 1 可以知道矩阵的特征向量总是相对于矩阵的特征值而言的，一个特征值具有的特征向量不唯一。另外，利用性质 2 可以确定特征值的大致范围。

3　PSO算法

3.1　基本PSO算法

在 PSO 算法中，问题的解是搜索空间中的一只鸟，称其为粒子(Particle)。每个粒子都有一个速度(Velocity)决定其飞翔距离和方向。根据适应度函数可以计算出每个粒子的适应度值(Fitness)。

PSO 初始化时，随机产生一群粒子(随机解)，粒子通过跟踪 2 个“极值”，即个体极值(粒子自身找到的最优位置)和全局极值(迄今整个粒子群找到的最优位置)来更新自己的速度和位置。

基金项目：国家自然科学基金资助项目(60461001)；国家民委科研基金资助项目(08GX01)；广西自然科学基金资助项目(0832082)
作者简介：韦杏琼(1983－)，女，硕士，主研方向：计算智能及其应用；周永权，教授、博士
收稿日期：2009-11-20　**E-mail：**yongquanzhou@126.com

假设第 i 个粒子的位置表示为 $X_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{id})$，速度表示为 $V_i=(v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{id})$，其中，$d$ 是粒子的维数；第 i 个粒子的历史最优位置为 $P_i=(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{id})$，其适应度值记为 $fitness(P_i)$；整个粒子群迄今为止搜索到的最好位置记为 $P_g=(p_{g1},p_{g2},\cdots,p_{gd})$，其适应度值记为 $fitness(P_g)$。粒子按下式调整自己的位置：

$$v_{id}^{(k+1)}=wv_{id}^{\ k}+c_1r_1(p_{id}^{\ k}-x_{id}^{\ k})+c_2r_2(p_{gd}^{\ k}-x_{id}^{\ k}) \tag{1}$$

$$x_{id}^{(k+1)}=x_{id}^{\ k}+v_{id}^{(k+1)} \tag{2}$$

其中，$1\leqslant i\leqslant N$，N 为粒子群种群规模；$1\leqslant d\leqslant D$，D 为粒子维数；k 为迭代次数($k\geqslant 0$)。加速常数 c_1 和 c_2 是非负数；r_1 和 r_2 是 $(0,1)$ 区间的随机数；惯性权重 w 一般取 $0.5\sim0.9$ 之间的常数。粒子在解空间内不断跟踪个体极值与全局极值进行搜索，直到达到规定的迭代次数或者满足规定的误差标准为止。

3.2 改进的PSO算法

为提高粒子群算法的收敛速度，避免算法陷入局部极值而停滞，本文采用以下的策略对粒子的位置进行更新：

(1)对于适应度值不等于 $fitness(P_g)$ 的粒子，其位置更新采用式(1)和式(2)；

(2)对于适应度值等于 $fitness(P_g)$ 的粒子，其位置更新采用如下公式：

$$x_{id}^{(k+1)}=1.5x_{id}^{\ k} \tag{3}$$

4 基于PSO算法的矩阵特征值和特征向量求解

4.1 特征值的求解方法

4.1.1 个体表达方式的确定

表达式中个体由粒子位置 X 和粒子速度 V 这 2 部分组成，每部分有 2 个分量，即：$(X,V)=((x_1,x_2),(v_1,v_2))$，其中，$(x_1,x_2)$ 表示特征值的实部和虚部，即特征值 $\lambda=x_1+x_2i$；(v_1,v_2) 表示特征值对应的速度。

4.1.2 适应度函数的设定

根据已确定的个体表达方式，把个体代入到特征方程 $P(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$ 中，得 $P(\lambda)=\boldsymbol{A}-(x_1+x_2i)\boldsymbol{I}=0$，设 $e=\det(\boldsymbol{A}-(x_1+x_2i)\boldsymbol{I})$，对 λ 的求解转化为 $e=\det(\boldsymbol{A}-(x_1+x_2i)\boldsymbol{I})$ 的最小化问题。

定义 PSO 的适应度函数为

$$\min f=|\det(\boldsymbol{A}-(x_1+x_2i)\boldsymbol{I})| \tag{4}$$

4.2 特征向量的求解方法

4.2.1 个体表达方式的确定

表达式中个体由粒子位置 X 和粒子速度 V 这 2 部分组成，每部分有个 n 分量，即：$(X,V)=((x_1,x_2,\cdots,x_n),(v_1,v_2,\cdots,v_n))$，其中，$n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数。$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为特征值对应的特征向量；$(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 为特征向量对应的速度。

4.2.2 适应度函数的设定

根据已求得的特征值和已确定的个体表达方式把个体代入到 $\boldsymbol{AZ}=\lambda\boldsymbol{Z}$ 中，可得：

$$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

设

$$Y=(y_1,y_2,\cdots y_n)=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

定义 PSO 的适应度函数为

$$\min f=\left|\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right| \tag{7}$$

4.3 基于PSO的矩阵特征值和特征向量求解

基于 PSO 的矩阵特征值和特征向量求解的步骤如下：

步骤 1 随机生成初始群体：初始群体由 N 个个体组成，初始个体是随机生成的。

步骤 2 根据式(4)或式(7)计算个体适应度，适应度越趋近于 0，表明该个体越优良。终止条件选择一个很接近 0 的值 ε，当最小适应度小于 ε 时程序运行终止。

步骤 3 如果满足条件，终止，选出最优解。否则，继续往下进行。

步骤 4 根据粒子群算法，按照下述操作更新群体：

(1)对于第 i 个粒子，其速度和位置分别按照下面的式子更新：

1) $v_{id}^{(k+1)}=w*v_{id}^{\ k}+c_1r_1(p_{id}^{\ k}-x_{id}^{\ k})+c_2r_2(p_{gd}^{\ k}-x_{id}^{\ k})$

2) $x_{id}^{(k+1)}=x_{id}^{\ k}+v_{id}^{(k+1)}$

其中，求特征值时 $d=2$，求特征值对应的特征向量时 $d=n$，n 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数；加速常数 c_1 和 c_2 是非负常数；惯性权重为 $0.4\sim0.9$ 之间的常数。

(2)计算新个体适应度。

步骤 5 反复执行步骤 4，直到达到终止条件，选择最佳个体作为结果。

5 仿真实例

为检验粒子群算法求解矩阵特征值和特征向量的正确性与有效性，在计算机上进行了模拟计算。

粒子群算法的参数设定为：群体大小 $N=30$，惯性权重 $w=0.5$，加速常数 $c_1=1.2$，$c_2=1.2$；例子的精确解由 Maple 软件求得。

例 1 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{bmatrix}$ 的特征值及其对应的特征向量。

采用本文的粒子群算法，可求出矩阵的特征值及其相对应的特征向量，此例含有一个二重特征值 -2，从表 1 可知，粒子群算法求解含重特征值时仍然是有效的，且求解结果普遍优于 Matlab 法。

表 1 复数域内特征值与其对应的特征向量

	精确解	Matlab 所求解[6]	同步求解法[7]	PSO 算法
特征值	4	4.000 000 000 000 00	4	4.000 000 000 000 00-0.000 000 000 000 00i
	-2	-2.000 000 052 856 91	-2	-2.000 000 000 000 13+0.000 000 000 000 02i
	-2	-1.999 999 947 143 091	-2	-1.999 999 999 999 92-0.000 000 000 000 06i
特征向量	$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.000\ 000\ 000\ 034\ 27\\1.000\ 000\ 000\ 000\ 00\\1.000\ 000\ 000\ 359\ 85\end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.000\ 000\ 000\ 000\ 00\\1.000\ 000\ 000\ 000\ 00\\0.000\ 000\ 052\ 856\ 91\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.000\ 000\ 000\ 000\ 00\\1.000\ 000\ 000\ 000\ 01\\0.000\ 000\ 000\ 000\ 12\end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.000\ 000\ 000\ 000\ 00\\1.000\ 000\ 000\ 000\ 00\\-0.000\ 000\ 052\ 856\ 91\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.000\ 000\ 000\ 000\ 00\\1.000\ 000\ 000\ 000\ 01\\-0.000\ 000\ 000\ 000\ 03\end{pmatrix}$

图 1 和图 2 分别为特征值与实特征值相对应的特征向量的适应度函数值随迭代次数变化的曲线，可以看出，所求解的精度高，算法在 10 代左右收敛，收敛速度快。

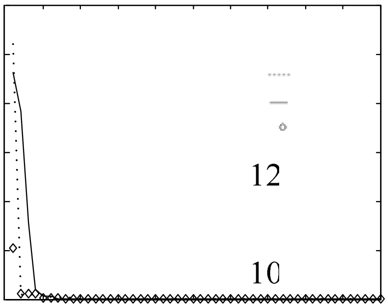

图 1　特征值对应的适应度函数

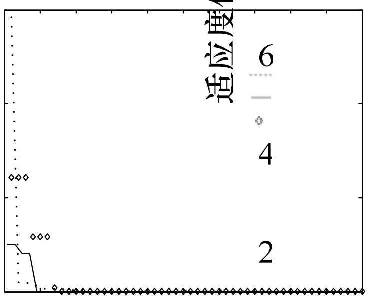

图 2　特征向量对应的适应度函数

例 2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}10 & 2.5 & 4 & 9\\ 2.5 & 10 & 3 & 7\\ 0 & 1 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 6\end{pmatrix}$ 的特征值及与其对应的特征向量。

采用本文的粒子群算法，可求出矩阵的特征值及与实特征值相对应的特征向量，结果见表 2。

表 2　复数域内特征值与其对应的特征向量

	精确解	Languerre 迭代分治算法[8]	牛顿迭代分治算法[8]	PSO 算法
特征值	13.322 794 47	13.322 793	13.322 793	13.322 794 473 440 1
	4.223 060 030	4.223 060	4.223 060	4.223 060 029 945
	7.227 072 748± 0.803 818 890 3i	7.227 073± 0.807 819i	4.223 060	7.227 072 748 307 45± 0.803 818 890 267 4i
	7.227 072 748± 0.803 818 890 3i	7.227 073± 0.807 819i	4.223 060	7.227 072 748 307 45± 0.803 818 890 267 4i
特征向量	$\begin{pmatrix}-0.716\,542\,469\\-0.689\,522\,507\,2\\-0.101\,751\,186\,6\\-0.027\,790\,261\,58\end{pmatrix}$	—	—	$\begin{pmatrix}-0.716\,542\,469\,000\,00\\-0.689\,522\,502\,891\,86\\-0.101\,751\,186\,446\,02\\-0.027\,790\,261\,440\,51\end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix}-0.596\,909\,831\,9\\-0.330\,655\,524\,6\\-0.697\,407\,634\,2\\0.784\,953\,510\,1\end{pmatrix}$	—	—	$\begin{pmatrix}-0.596\,909\,831\,900\,00\\-0.330\,655\,522\,164\,29\\-0.697\,407\,635\,714\,35\\0.784\,953\,512\,743\,34\end{pmatrix}$

由表 2 可知，牛顿迭代法只得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 2 个实特征值，漏掉了一对复特征值；虽 Languerre 迭代法虽然求出了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值，但精度较低；本文算法所求得的特征值及其对应的特征向量精度都比较高。图 3 和图 4 给出了所求特征值与实特征值相对应的特征向量的适应度函数值随迭代次数变化的曲线，可以看出，算法在 10 代左右收敛，收敛速度快。

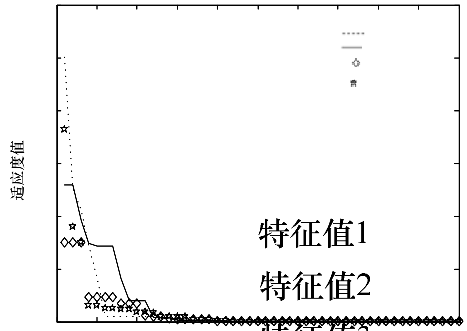

图 3　特征值对应的适应度函数

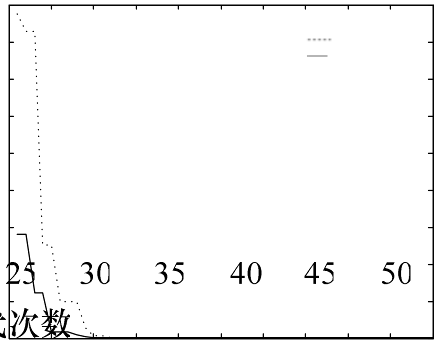

图 4　特征向量对应的适应度函数

6　结束语

本文给出的PSO算法可用于求任意矩阵的特征值及其对应的特征向量，由算例可以看出，该算法求解精度较高，能将任意 n 阶矩阵在复数域内的求出所求矩阵的所有特征值，且精度高于 Languerre 迭代法，对于含重特征值的情形，该算法也是有效的。

参考文献

[1] 曹志浩. 矩阵特征值问题[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1980.

[2] Kennedy J, Eberhart R C. Particle Swarm Optimization[Z]. (2009-01-02). http://www.particleswarm.info.

[3] 李朝荣, 张　鹰, 张安妮. 基于PSO算法的神经网络集成入侵检测系统[J]. 计算机工程, 2007, 33(14): 123-124.

[4] 郭大庆, 李　晓, 赵永进. 基于改进 PSO 算法的 PID 参数自整定[J]. 计算机工程, 2007, 33(18): 202-204.

[5] 陈基明. 数值计算方法[M]. 上海: 上海大学出版社, 2007.

[6] Mathews J H, Fink K D. Numerical Methods Using Matlab[M]. 4th ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005.

[7] 樊继秋. 矩阵特征值与特征向量的同步求解[J]. 甘肃联合大学学报, 2006, 20(3): 100-103.

[8] 罗晓广, 李晓梅. 解非对称矩阵特征值问题的一种并行分治算法[J]. 高等学校计算数学学报, 1999, 21(2): 140-149.

编辑　陈　文