

# 不确定非线性系统基于偏差分离的双线性控制

杨玲玲<sup>1</sup> 章云<sup>1</sup> 陈贞丰<sup>1</sup>

**摘要** 非线性和不确定性是制约控制系统性能的主要因素,为此出现了许多方法都试图克服这些因素的影响.本文提出一种基于偏差分离的双线性控制策略,在线获取模型偏差信息,并采用简单的双线性控制结构,具有很好的工程意义.论文证明了双线性控制系统指数渐近稳定的充分条件.仿真结果表明所提出的双线性控制策略的有效性.

**关键词** 双线性控制, 偏差分离, 不确定非线性, 三级倒立摆, 变结构控制

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.01432

## Bilinear Control Based on Model Bias Separation for Uncertain Nonlinear Systems

YANG Ling-Ling<sup>1</sup> ZHANG Yun<sup>1</sup> CHEN Zhen-Feng<sup>1</sup>

**Abstract** Nonlinearity and uncertainty are the main factors which restrict the system performance. There are many methods to attempt to overcome the impact of these factors. A bilinear control strategy based on model bias separation is proposed in this paper. The bilinear control obtains the model bias information on line, and adopts a simple bilinear control structure. So it has good engineering significance. The sufficient condition for system exponential stability has been proved. The simulation results show the effectiveness of the proposed bilinear control strategy.

**Key words** Bilinear control, model bias separation, uncertain nonlinear, triple inverted pendulum, variable structure control

在实际工程中,被控对象往往伴随着各种各样的不确定,包括结构不确定、参数不确定和外部扰动等.不确定使系统数学模型与实际对象存在差异,对非线性控制系统产生严重的不利影响.研究不确定条件下非线性系统的控制问题具有重大的实际意义,已经取得了大量的研究成果.

$H_\infty$  控制理论已经成为鲁棒控制系统设计的经典工具<sup>[1]</sup>.  $H_\infty$  控制以系统的  $H_\infty$  范数为性能指标,使有限能量的干扰信号对系统期望输出的影响最小.然而,鲁棒控制器设计时要求已知不确定的上界,但是在实际工程中很难准确得到不确定的上界,因此常采用“最坏情况”进行上界估计,导致鲁棒控制系统设计的保守性<sup>[2-3]</sup>.

基于神经网络的自适应控制可以在线逼近系统的非线性和不确定,避免了对不确定上界的保守估计.然而同时逼近系统的非线性和不确定,会导致神经网络结构复杂,学习收敛速度缓慢<sup>[4]</sup>,难以满足实际工程的快速性要求;学习信号的不充分激励还会使网络的泛化能力变差<sup>[5]</sup>.另外,逼近过程中不可避

免地存在逼近误差,需要设计补偿项来克服逼近误差的不利影响,使控制系统的结构更加复杂<sup>[6]</sup>.

滑模变结构控制根据系统状态不断切换控制器,使系统状态始终趋向滑模面运动,最终到达并保持在滑模面上,且滑动模态对系统的参数摄动和外部扰动具有不变性.滑模变结构控制不需要复杂的神经网络逼近非线性和不确定,但是当系统轨迹到达滑模面时,惯性使运动点在滑模面两侧来回穿越,形成高频抖振.抖振问题已经成为变结构控制在实际应用中的突出障碍.抖振消除的研究引起了国内外学者的广泛关注,提出了多种解决方法,但是在消除抖振的同时也影响了滑模变结构控制的抗摄动和抗扰动的能力<sup>[7-8]</sup>.

从工程实际的角度考虑,不仅希望控制律可以抵消或减少不确定非线性的影响,还希望控制器结构简单,满足快速性、可实现性和高可靠性方面的要求.为此,本文提出一种新颖的基于偏差分离的双线性控制策略,很好地解决了上述问题.三级倒立摆的仿真表明了双线性控制的有效性.

## 1 双线性控制系统设计

### 1.1 问题描述

考虑如下不确定非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  为系统状态变量,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  为系统控制输入,  $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^p$  为系统的外部扰动.不失一般性,

收稿日期 2009-10-13 录用日期 2010-03-17  
Manuscript received October 13, 2009; accepted March 17, 2010  
国家自然科学基金(U0735003, 60974047), 国家教育部博士点基金(20070562005), 广东省自然科学基金(8351009001000002) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (U0735003, 60974047), Ph. D. Programs Foundation of Ministry of Education of China (20070562005), and Natural Science Foundation of Guangdong Province of China (8351009001000002)  
1. 广东工业大学自动化学院 广州 510090  
1. Faculty of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090

假定  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  是系统的平衡点, 即  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . 在很多实际工程中, 可将系统 (1) 的模型分成两部分来考虑. 在系统平衡点附近, 其状态轨迹一般可用线性微分方程描述, 这个方程的稳定性与整个系统的稳定性密切相关, 为系统的主体部分; 而其余部分归为模型偏差. 此时, 系统 (1) 可以写为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$  ( $m \leq n$ ) 为已知的常值矩阵,  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{R}^n$  为模型偏差, 包括系统的非线性与不确定性部分.

系统设计的问题是: 在  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  未知的情况下, 如何求取控制输入  $\mathbf{u}(t)$ , 使系统 (2) 稳定, 并同时具有良好的动态性能.

## 1.2 基于偏差分离的双线性控制系统结构

将系统的控制输入  $\mathbf{u}(t)$  分成两部分

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + \mathbf{u}_e(t) \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{u}_0(t)$  用于镇定系统的线性部分, 并保证线性系统有良好的动态性能;  $\mathbf{u}_e(t)$  用于补偿模型偏差带来的影响.

首先, 令  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{0}$  设计  $\mathbf{u}_0(t)$ . 线性系统的控制器设计有很多成熟的方法<sup>[9]</sup>, 采用线性控制律就可以保证系统稳定且具有期望的动态性能. 不失一般性, 假定  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  能控, 取  $\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}$ , 则可使系统 (4) 的极点任意配置.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{A}_k\mathbf{x} \quad (4)$$

用上述方法实现  $\mathbf{u}_0(t)$  后, 系统 (2) 可以写为以下形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_e) + \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{A}_k\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}_e + \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (5)$$

模型偏差一般无法事先得到, 但是在系统运行过程中, 模型偏差一旦出现, 其影响一定会在系统状态中得到反映. 为了补偿模型偏差带来的影响, 要设法从可得到的状态信息  $\mathbf{x}$  中分离出模型偏差  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  的信息. 由于  $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}$  已知, 构造如下标称系统

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_k\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}_e \quad (6)$$

由式 (5) 和 (6) 得

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_k\mathbf{z} + \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$  是可测的偏差分离信号. 由式 (7) 可知,  $\mathbf{z}$  包含了模型偏差  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  的全部信息. 如果当前时刻  $\dot{\mathbf{z}}$  可以得到, 那么当前时刻的模型偏差  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  就被完全分离出来. 但是在实际工程中,

$\dot{\mathbf{z}}$  是不能准确得到的, 常用差分来替代, 也就是可以利用前些时刻的信息  $\mathbf{z}(t - \Delta)$  和  $\dot{\mathbf{z}}(t - \Delta)$ . 这样构造补偿控制  $\mathbf{u}_e(t)$  如下:

$$\mathbf{u}_e(t) = \boldsymbol{\eta}_1^T \mathbf{z}(t - \Delta) + \boldsymbol{\eta}_2^T \dot{\mathbf{z}}(t - \Delta), \quad \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbf{R}^{n \times m} \quad (8)$$

并希望

$$\|\mathbf{B}\mathbf{u}_e + \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})\| = \|\mathbf{B}\boldsymbol{\eta}_1^T \mathbf{z}(t - \Delta) + \mathbf{B}\boldsymbol{\eta}_2^T \dot{\mathbf{z}}(t - \Delta) - \mathbf{A}_k\mathbf{z}(t) + \dot{\mathbf{z}}(t)\|$$

尽量小. 为此, 选择  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$  满足以下方程:

$$\begin{cases} \|\mathbf{B}\boldsymbol{\eta}_1^T - \mathbf{A}_k\| = \min \\ \|\mathbf{B}\boldsymbol{\eta}_2^T + \mathbf{I}\| = \min \end{cases} \quad (9)$$

## 2 双线性控制系统的稳定性分析

不失一般性, 设  $\mathbf{A}_k$  已整定为稳定矩阵,  $\mathbf{A}_k$  的全部特征值均具有负实部;  $\mathbf{B}$  为列满秩矩阵,  $\text{rank}(\mathbf{B}) = m$ ; 模型偏差  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{D}(\mathbf{x})$ , 暂不考虑  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{w}$  的影响. 则图 1 所示系统在一定的线性变换下可写为如下的形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k11} & \mathbf{A}_{k12} \\ \mathbf{A}_{k21} & \mathbf{A}_{k22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{D}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k11} & \mathbf{A}_{k12} \\ \mathbf{A}_{k21} & \mathbf{A}_{k22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{D}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^T$ ,  $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2]^T$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = [\mathbf{D}_1(\mathbf{x}), \mathbf{D}_2(\mathbf{x})]^T$ ,  $\mathbf{A}_{k11} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{A}_{k12} \in \mathbf{R}^{m \times (n-m)}$ ,  $\mathbf{A}_{k21} \in \mathbf{R}^{(n-m) \times m}$ ,  $\mathbf{A}_{k22} \in \mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  ( $m \leq n$ ) 为常量矩阵, 且  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k11} & \mathbf{A}_{k12} \\ \mathbf{A}_{k21} & \mathbf{A}_{k22} \end{bmatrix}$  的所有特征值均具有负实部,  $\mathbf{B}_1 \in \mathbf{R}^{m \times m}$  为常量矩阵且  $\text{rank}(\mathbf{B}_1) = m$ ,  $\mathbf{D}_1(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{D}_2(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{n-m}$  为不确定项.

**引理 1 (Bellman-Gronwall引理<sup>[10]</sup>).** 设  $I$  是一个实数区间, 记为  $[a, +\infty)$  或  $[a, b]$  或  $(a, b]$ , 其中  $a < b$ . 又设  $\alpha(\cdot)$ ,  $\phi(\cdot)$  和  $u(\cdot)$  为定义在  $I$  上的实数值函数, 且  $\phi(\cdot)$  是非负连续函数. 如果  $u(\cdot)$  满足如下的积分不等式:

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \phi(s)u(s)ds, \quad t \in I$$

那么

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \phi(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \phi(r)dr}ds, \quad t \in I$$

当  $u(\cdot)$  中存在一定滞后  $\Delta$  ( $\Delta \geq 0$ ) 时, 可以得到引理 2.

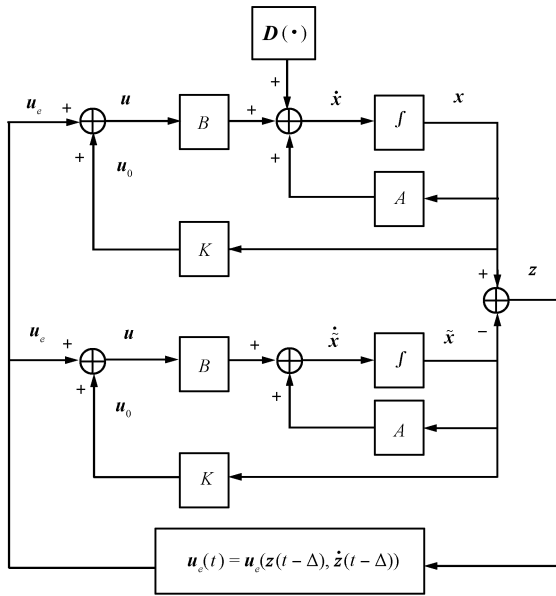


图 1 基于偏差分离的双线性控制系统结构  
Fig. 1 Structure of bilinear control system based on bias separation

**引理 2.** 设  $I$  是一个实数区间, 记为  $[a, +\infty)$  或  $[a, b]$  或  $[a, b)$ , 其中  $a < b$ . 又设  $\alpha(\cdot)$ ,  $\phi(\cdot)$  和  $u(\cdot)$  为定义在  $I$  上的实数值函数, 且  $\phi(\cdot)$  和  $u(\cdot)$  是非负的连续函数. 如果  $u(\cdot)$  满足如下的积分不等式:

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \phi(s)u(s - \Delta)ds \quad (12)$$

其中  $\Delta$  为常数且  $0 \leq \Delta \leq s, t \in I$ . 那么

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \phi(s)\alpha(s - \Delta)e^{\int_s^t \phi(r)dr}ds, \quad t \in I$$

**证明.** 见附录 A. □

**引理 3.** 设  $I$  是一个实数区间, 记为  $[a, +\infty)$ . 已知  $L_1 > 0, L_2 > 0, \beta > 0$  且  $t_0 \in \mathbf{R}$ . 考察下面的函数

$$g(t) = a_1(t)e^{-\beta(t-t_0)} + a_2(t)e^{-\beta(t-t_0)}, \quad t \in I \quad (13)$$

式中,  $a_1(t) = 1 + L_1 e^{\beta\Delta} \int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t L_1 e^{-\beta(t-r)}dr}d\tau$

$$a_2(t) = (L_1 + L_2)a_1(t) \cdot \int_{t_0}^t a_1(\tau)e^{(L_1+L_2)a_1(\tau) \int_\tau^t e^{-\beta(t-r)}dr}d\tau$$

$$0 \leq \Delta < -L_1\beta^{-2} + \beta^{-1} \ln \frac{\beta^2}{L_1^2(L_1 + L_2)}$$

那么, 存在实数  $N > 0, \gamma > 0$ , 使得当  $t \geq t_0$  时

$$g(t) \leq Ne^{-\gamma(t-t_0)}$$

**证明.** 见附录 B. □

**定理 1.** 若  $D(\mathbf{x})$  关于  $\mathbf{x}$  满足局部 Lipschitz 条件, 即对某一  $h > 0$ , 存在  $L > 0$ , 满足条件

$$\|D(\mathbf{x}_1, t) - D(\mathbf{x}_2, t)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_h$$

那么  $\|\mathbf{z}(t)\|$  有界. 其中  $B_h$  是以平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  为圆心,  $h$  为半径的球.

**证明.** 由式 (11) 可得: 由于  $\|\mathbf{z}(t)\|, \|e^{A_k(t-t_0)}\|, \|\tilde{\mathbf{x}}(\tau)\|$  为定义在  $[t_0, +\infty)$  上的正值函数,  $T > 0$ , 记  $z(t_0) = z^0$ , 若对所有  $t \leq T$  成立

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(t)\| &\leq \|e^{A_k(t-t_0)}\mathbf{z}^0\| + \int_{t_0}^t \|e^{A_k(t-\tau)}\| \cdot \|D(\mathbf{x}(\tau)) - D(\mathbf{0})\|d\tau \leq \|e^{A_k(t-t_0)}\mathbf{z}^0\| + \\ &L \int_{t_0}^t \|e^{A_k(t-\tau)}\| \cdot \|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{0}\|d\tau = \|e^{A_k(t-t_0)}\mathbf{z}^0\| + L \int_{t_0}^t \|e^{A_k(t-\tau)}\| \cdot \|\mathbf{x}(\tau) - \tilde{\mathbf{x}}(\tau) + \tilde{\mathbf{x}}(\tau)\|d\tau \leq \\ &\|e^{A_k(t-t_0)}\mathbf{z}^0\| + L \int_{t_0}^t \|e^{A_k(t-\tau)}\| \cdot (\|\mathbf{z}(t)\| + \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|)d\tau \end{aligned}$$

由引理 1 (Bellman-Gronwall 引理) 可得:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(t)\| &\leq \|e^{A_k(t-t_0)}\mathbf{z}^0\| \cdot e^{L \int_{t_0}^t \|e^{A_k(t-\tau)}\|d\tau} + \|e^{A_k(t-t_0)}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \cdot e^{L \int_{t_0}^t \|e^{A_k(t-\tau)}\|d\tau} \end{aligned}$$

又由于

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{A_k(t-t_0)}\| &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\int_{t_0}^t \|e^{A_k(t-\tau)}\|d\tau} &= e^{\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \|e^{A_k(t-\tau)}\|d\tau} = c_1, \quad c_1 \in \mathbf{R}^+ \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{z}(t)\| = 0$$

即  $\|\mathbf{z}(t)\|$  有界. □

**定理 2.** 当系统 (10) 满足下列条件:

1) 对某一  $h > 0$ , 存在  $L_1 \geq 0$ ,  $\|D_1(\mathbf{x})\|$  满足条件

$$\begin{aligned} \|D_1(\mathbf{x}(t')) - D_1(\mathbf{x}(t''))\| &\leq L_1\|\mathbf{x}(t') - \mathbf{x}(t'')\|, \\ \forall t', t'' \in [t_0, +\infty) \end{aligned}$$

2) 存在  $L_2 \geq 0$ ,  $\|D_2(\mathbf{x})\|$  满足条件

$$\|D_2(\mathbf{x}_1(t)) - D_2(\mathbf{x}_2(t))\| \leq L_2 \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|, \quad \forall \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t) \in B_h$$

其中,  $B_h$  是以平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  为圆心,  $h$  为半径的球; 则存在

$$\mathbf{u}_e(t) = \boldsymbol{\eta}_1^T \mathbf{z}(t - \Delta) + \boldsymbol{\eta}_2^T \dot{\mathbf{z}}(t - \Delta), \quad \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbf{R}^{n \times m}$$

式中,  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$  满足式 (9), 而且

$$0 \leq \Delta < -L_1\beta^{-2} + \beta^{-1} \ln \frac{\beta^2}{L_1^2(L_1 + L_2)}$$

$$\beta = \max\{-\text{Re}(\lambda_i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

其中,  $\lambda_i$  为  $A_k$  的特征根, 使得系统 (10) 在平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  上为指数渐近稳定.

**证明.** 取控制量  $\mathbf{u}_e(t)$  为

$$\mathbf{u}_e(t) = \boldsymbol{\eta}_1^T \mathbf{z}(t - \Delta) + \boldsymbol{\eta}_2^T \dot{\mathbf{z}}(t - \Delta) \quad (14)$$

式中

$$0 \leq \Delta < -L_1\beta^{-2} + \beta^{-1} \ln \frac{\beta^2}{L_1^2(L_1 + L_2)}$$

因为  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$  满足式 (9), 所以有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_1^T &= [B_1^{-1}A_{k11} \quad B_1^{-1}A_{k12}] \\ \boldsymbol{\eta}_2^T &= [ -B_1^{-1} \quad \mathbf{0} ] \end{aligned}$$

将式 (14) 代入式 (10), 并考虑式 (11), 有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{A_k(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \\ &\int_{t_0}^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{bmatrix} D_1(\mathbf{x}(\tau)) - D_1(\mathbf{x}(\tau - \Delta)) \\ D_2(\mathbf{x}(\tau)) \end{bmatrix} d\tau \end{aligned}$$

由条件 1) 与条件 2), 则

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq e^{-\beta(t-t_0)}\|\mathbf{x}(t_0)\| + \\ &\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)}\|D_1(\mathbf{x}(\tau)) - D_1(\mathbf{x}(\tau - \Delta))\|d\tau + \\ &\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)}\|D_2(\mathbf{x}(\tau))\|d\tau \leq \\ &e^{-\beta(t-t_0)}\|\mathbf{x}(t_0)\| + \\ &(L_1 + L_2) \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)}\|\mathbf{x}(\tau)\|d\tau + \\ &L_1 \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)}\|\mathbf{x}(\tau - \Delta)\|d\tau \end{aligned}$$

由引理 2 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq e^{-\beta(t-t_0)}\|\mathbf{x}(t_0)\| + \\ &(L_1 + L_2) \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)}\|\mathbf{x}(\tau)\|d\tau + \\ &L_1 e^{-\beta(t-\Delta-t_0)}\|\mathbf{x}(t_0)\| \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^t L_1 e^{-\beta(t-r)}dr} d\tau + \\ &L_1(L_1 + L_2) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau-\Delta} e^{-\beta(t-\tau)}e^{-\beta(\tau-\Delta-r)} \cdot \\ &\|\mathbf{x}(r)\|dr e^{\int_{\tau}^t L_1 e^{-\beta(t-r)}dr} d\tau \leq \\ &a_1(t)e^{-\beta(t-t_0)}\|\mathbf{x}(t_0)\| + \\ &a_2(t) \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)}\|\mathbf{x}(\tau)\|d\tau \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} a_1(t) &= 1 + L_1 e^{\beta\Delta} \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^t L_1 e^{-\beta(t-r)}dr} d\tau \\ a_2(t) &= (L_1 + L_2)a_1(t) \end{aligned}$$

由引理 1 (Bellman-Gronwall 引理) 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq a_1(t)e^{-\beta(t-t_0)}\|\mathbf{x}(t_0)\| + a_2(t)e^{-\beta(t-t_0)} \cdot \\ &\|\mathbf{x}(t_0)\| \int_{t_0}^t a_1(\tau)e^{a_2(t)\int_{\tau}^t e^{-\beta(t-r)}dr} d\tau = \\ &[a_1(t) + a_3(t)]\|\mathbf{x}(t_0)\|e^{-\beta(t-t_0)} \end{aligned}$$

式中

$$a_3(t) = a_2(t) \int_{t_0}^t a_1(\tau)e^{a_2(t)\int_{\tau}^t e^{-\beta(t-r)}dr} d\tau$$

由引理 3 可知, 取  $\gamma = 1 - e^{-\beta\epsilon}$ , 存在实数  $N > 0$ , 使得当  $t \geq t_0$  时有

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq N\|\mathbf{x}(t_0)\|e^{-\gamma(t-t_0)}$$

所以存在式 (14) 形式的  $\mathbf{u}_e(t)$ , 使得系统 (10) 在平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  上为指数渐近稳定.  $\square$

### 3 仿真实例

考虑三级倒立摆系统的稳定控制问题. 倒立摆的非线性数学模型见文献 [11-12]. 系统的状态变量为

$$\mathbf{x} = [x \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dot{x} \quad \dot{\phi}_1 \quad \dot{\phi}_2 \quad \dot{\phi}_3]^T$$

式中,  $x$  是台车的位移,  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  分别是一摆、二摆和三摆的角度.

在  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  附近对倒立摆的非线性模型线性化, 可得线性模型<sup>[11]</sup> 为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_4 \times 4 \\ -F^{-1}H & -F^{-1}G \end{bmatrix} \mathbf{x} + [\mathbf{0} \quad F^{-1}L] \mathbf{u} \quad (15)$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_2 & A_9 & A_{10} & A_{11} \\ A_3 & A_{10} & A_{17} & A_{18} \\ A_4 & A_{11} & A_{18} & A_{25} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} A_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12} & A_{14} & 0 \\ 0 & A_{20} & A_{21} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{28} & A_{29} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{30} \end{bmatrix}$$

$$L = [K_s \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$A_i$  为系统常量 (见表 1), 系统的各物理参数值见附录 C.

取倒立摆的线性模型作为标称系统, 且系统完全能控, 设其期望的闭环极点为  $\mathbf{p} = [-3 + 1.8j, -3 - 1.8j, -5 + 0.5j, -5 - 0.5j, -6, -4, -7, -8]$ , 状态反馈增益阵为  $\mathbf{K} = [-0.637, -74.4805, 132.8565, -75.0797, -3.0985, -1.6322, 6.0225, -7.8655]$ .

设计双线性控制器, 补偿控制采用式 (8). 针对以下三种不确定情况, 分别进行仿真分析, 并与变结

构控制<sup>[11]</sup> 进行对比. 选取系统的 ITAE (Integration of the production of time and absolute error) 性能指标  $J = \int t(|x| + |\phi_1| + |\phi_2| + |\phi_3|)dt$  来评价系统的动态性能.

1) 初始状态不确定

在系统初始状态不确定的情况下, 比较双线性控制和变结构控制的控制效果, 分析使倒立摆稳定的初始角度的变化范围. 倒立摆的初始状态设置为  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ ,  $\phi_1(0) = 0 \text{ rad}$ ,  $\phi_2(0) = 0.05 \text{ rad}$ ,  $\phi_3(0) = -0.02 \text{ rad}$ , 其他状态的初始值均为零. 仿真结果如图 2, 图中实线和虚线分别为双线性控制和变结构控制的状态轨迹. 初始角度变化的稳定范围见表 2.

ITAE 性能指标为: 双线性控制  $J = 2.3857$ , 变结构控制  $J = 7.4292$ . ITAE 性能指标和图 2 均表明, 双线性控制中的补偿控制  $u_e$  对不确定产生快速响应, 使系统各状态的变化幅度减小, 过渡过程时间明显缩短. 双线性控制使系统快速达到稳定, 而变结构控制器则持续抖振. 由双线性控制量曲线可见, 双线性控制在系统运行的初始阶段幅值较大, 表明补偿控制  $u_e$  可以对初始状态不确定产生快速响应, 从而使控制量快速趋于稳定值, 显著改善了系统的动态性能.

表 2 中各摆初始角度变化的稳定范围是指仅改变单个摆的初始角度, 其他状态量保持不变. 可见双线性控制的初始角度稳定范围较大, 与变结构控制相比, 稳定范围的增幅可达 30%; 表明双线性控制可以抑制较大的初始状态不确定, 鲁棒性好.

表 2 初始角度变化的稳定范围  
Table 2 Stable ranges of initial angle

	$\phi_3$ 稳定范围	$\phi_2$ 稳定范围	$\phi_1$ 稳定范围
双线性控制	$[-5.5^\circ, 5.5^\circ]$	$[-4.5^\circ, 4.6^\circ]$	$[-10^\circ, 10^\circ]$
变结构控制	$[-4.2^\circ, 4.2^\circ]$	$[-4.3^\circ, 4.3^\circ]$	$[-9.2^\circ, 9.2^\circ]$

表 1 系统常量

Table 1 Constants of system

常量	表达式	常量	表达式	常量	表达式	常量	表达式
$A_1$	$M + m_1 + m_2 + m_3$	$A_9$	$I_1 + m_1 l_1^2 + (m_2 + m_3)L_1^2$	$A_{17}$	$I_2 + m_3 L_2^2 + m_2 l_2^2$	$A_{24}$	$-g(m_2 l_2 + m_3 L_2)$
$A_2$	$m_1 l_1 + (m_2 + m_3)L_1$	$A_{10}$	$(m_2 l_2 + m_3 L_2)L_1$	$A_{18}$	$m_3 l_3 L_2$	$A_{25}$	$I_3 + m_3 l_3^2$
$A_3$	$m_2 l_2 + m_3 L_2$	$A_{11}$	$m_3 l_3 L_1$	$A_{19}$	$-(m_2 l_2 + m_3 L_2)L_1$	$A_{26}$	$-m_3 l_3 L_1$
$A_4$	$m_3 l_3$	$A_{12}$	$C_1 + C_2$	$A_{20}$	$-C_2$	$A_{27}$	$-m_3 l_3 L_2$
$A_5$	$C_c$	$A_{13}$	$(m_2 l_2 + m_3 L_2)L_1$	$A_{21}$	$C_2 + C_3$	$A_{28}$	$-C_3$
$A_6$	$-m_1 l_1 - (m_2 + m_3)L_1$	$A_{14}$	$-C_2$	$A_{22}$	$m_3 l_3 L_2$	$A_{29}$	$C_3$
$A_7$	$-(m_2 l_2 + m_3 L_2)$	$A_{15}$	$m_3 l_3 L_1$	$A_{23}$	$-C_3$	$A_{30}$	$-gm_3 l_3$
$A_8$	$-m_3 l_3$	$A_{16}$	$-g(m_1 l_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1)$				

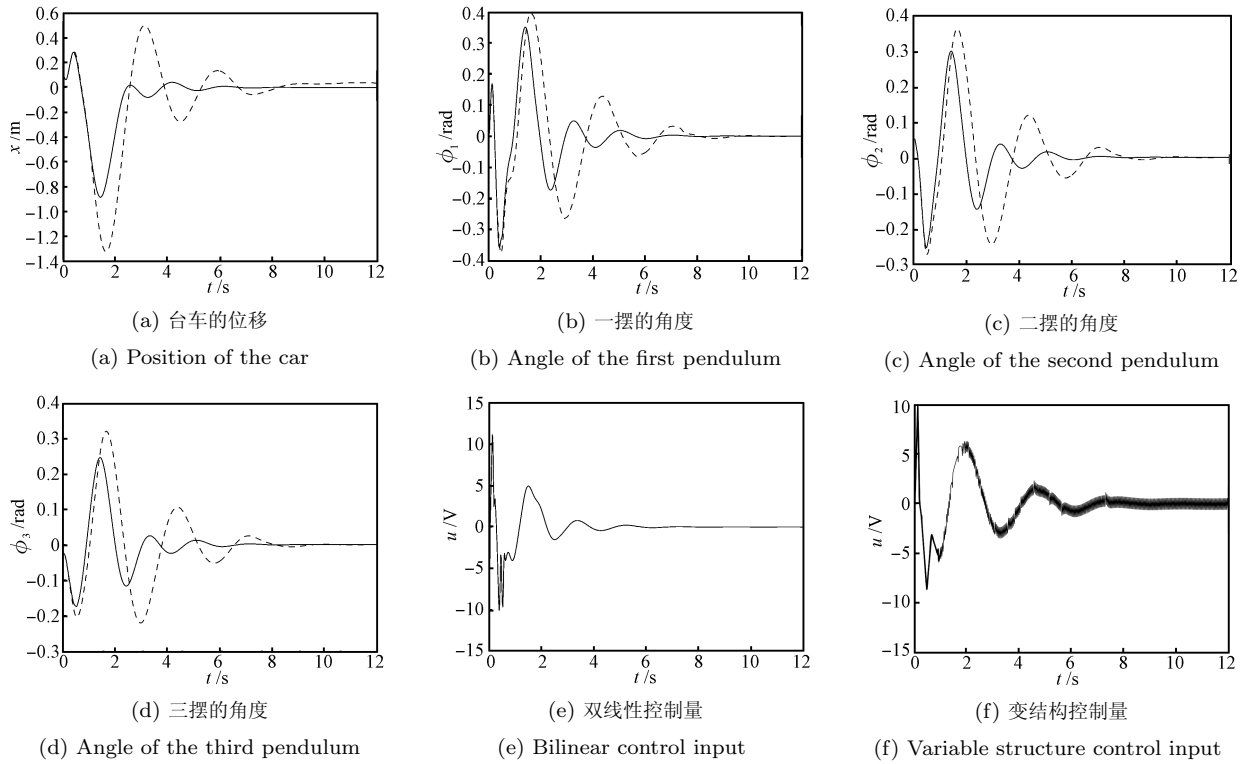


图 2 初始状态不确定时系统的状态变量和控制量

Fig. 2 System states and control inputs with initial uncertainty

表 3 系统参数变化的稳定范围

Table 3 Stable ranges of system parameters

	各级摆摩擦系数变化的稳定范围	台车摩擦系数变化的稳定范围	三摆长度变化的稳定范围	二摆长度变化的稳定范围
双线性控制	$[-50, 13] \times C_i$	$[0.5, 1.3] \times C_c$	$[0.4, 2] \times l_3$	$[0.7, 1.4] \times l_2$
变结构控制	$[-44, 3.3] \times C_i$	$[0.89, 1.1] \times C_c$	$[0.6, 1.4] \times l_3$	$[0.86, 1.2] \times l_2$

2) 系统参数不确定

在系统参数不确定的情况下, 比较双线性控制和变结构控制的控制效果, 分析使倒立摆稳定的系统参数的变化范围. 系统参数变化: 改变各摆的摩擦系数,  $C'_1 = 0.1C_1, C'_2 = 0.1C_2, C'_3 = 0.1C_3$ . 仿真结果如图 3, 图中实线和虚线分别为双线性控制和变结构控制的状态轨迹. 系统参数变化的稳定范围见表 3.

系统的 ITAE 性能指标为: 双线性控制  $J = 2.3029$ , 变结构控制  $J = 6.6165$ . 由 ITAE 性能指标和图 3, 可见双线性控制下系统各状态量的变化幅度较小, 快速性显著提高. 以三摆的角度  $\phi_3$  为例, 双线性控制下,  $\phi_3$  的变化幅度为  $[-0.18 \text{ rad}, 0.24 \text{ rad}]$ , 调节时间为 4s; 变结构控制下,  $\phi_3$  的变化幅度为  $[-0.2 \text{ rad}, 0.35 \text{ rad}]$ , 调节时间为 10s. 控制量曲线表明双线性控制能够对参数不确定产生快速响应, 仅在初始阶段幅值较大, 之后快速趋于稳定值, 从而

改善系统动态性能.

表 3 给出各级摆和台车摩擦系数变化的稳定范围, 以及二摆和三摆长度变化的稳定范围. 可见双线性控制中, 系统各参数变化的稳定范围有较大幅度的增加, 均大于变结构控制中参数变化的稳定范围, 其中各级摆摩擦系数和三摆长度的稳定范围增幅显著, 表明双线性控制对较大的参数不确定均具有良好的鲁棒性.

3) 系统加入外部扰动

在有界扰动、冲击扰动和白噪声扰动的情况下, 比较双线性控制和变结构控制的控制效果. 仿真图中实线和虚线分别为双线性控制和变结构控制的状态轨迹.

a) 设三级倒立摆各部分的摩擦力矩为有界扰动  $d(t)$ , 其幅值  $\|d(t)\| \leq [0.07, 0.015, 0.009, 0.005]$ . 仿真结果如图 4.

b) 分别在  $t = 0 \text{ s}, t = 4 \text{ s}, t = 8 \text{ s}$ , 沿驱动力

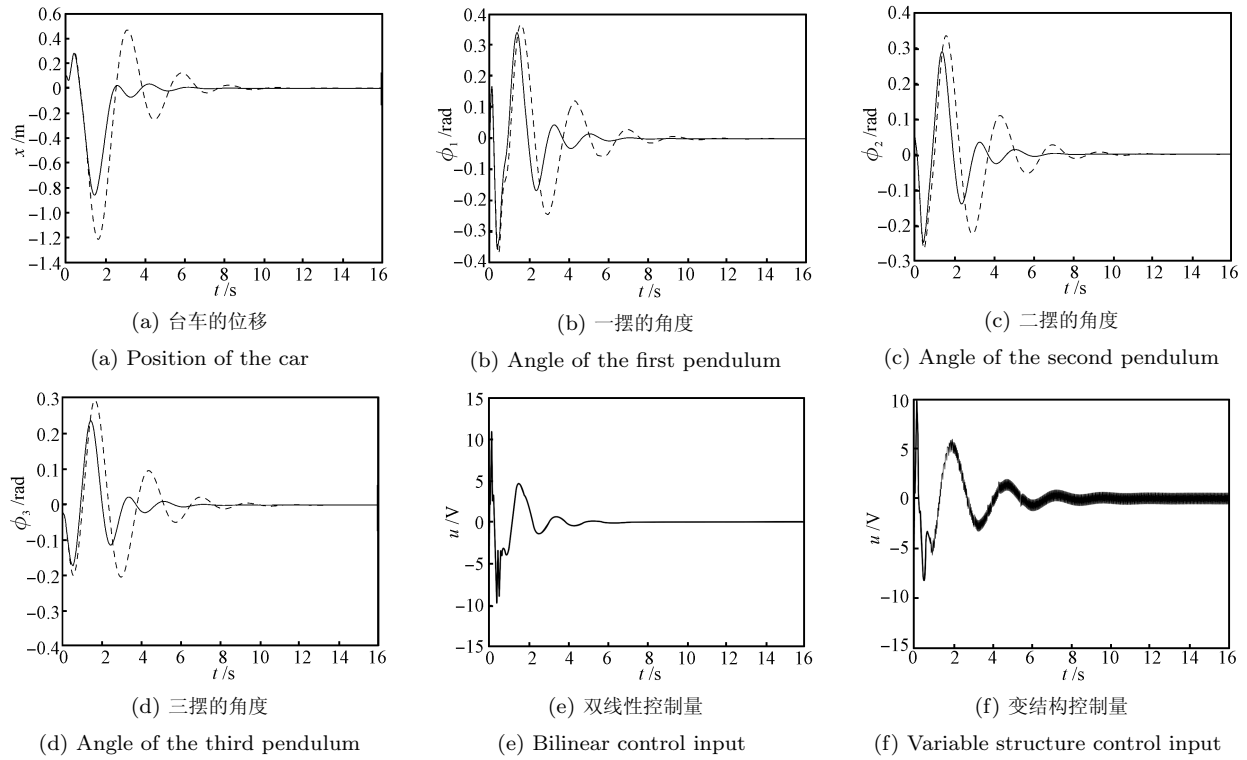


图 3 系统参数不确定时系统的状态量和控制量

Fig.3 System states and control inputs with parameter uncertainty

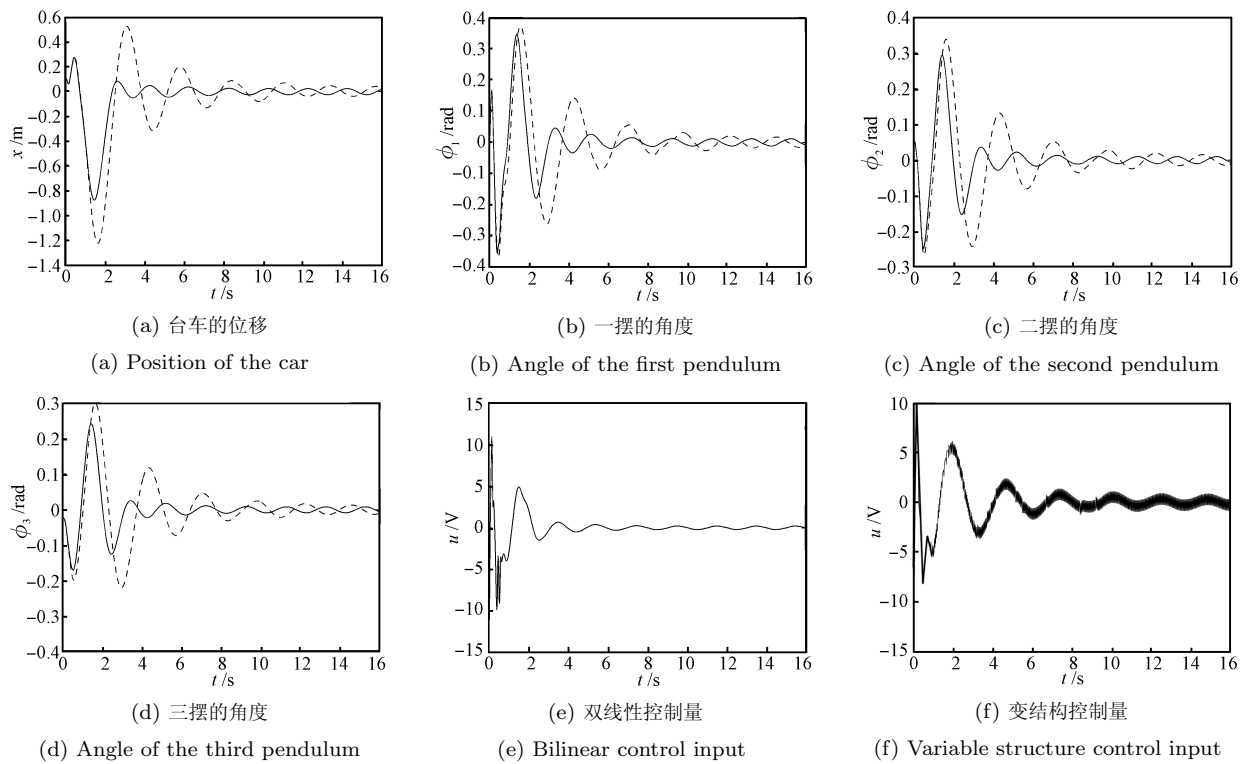


图 4 加入有界扰动后系统的状态量和控制量

Fig.4 System states and control inputs with bounded disturbance

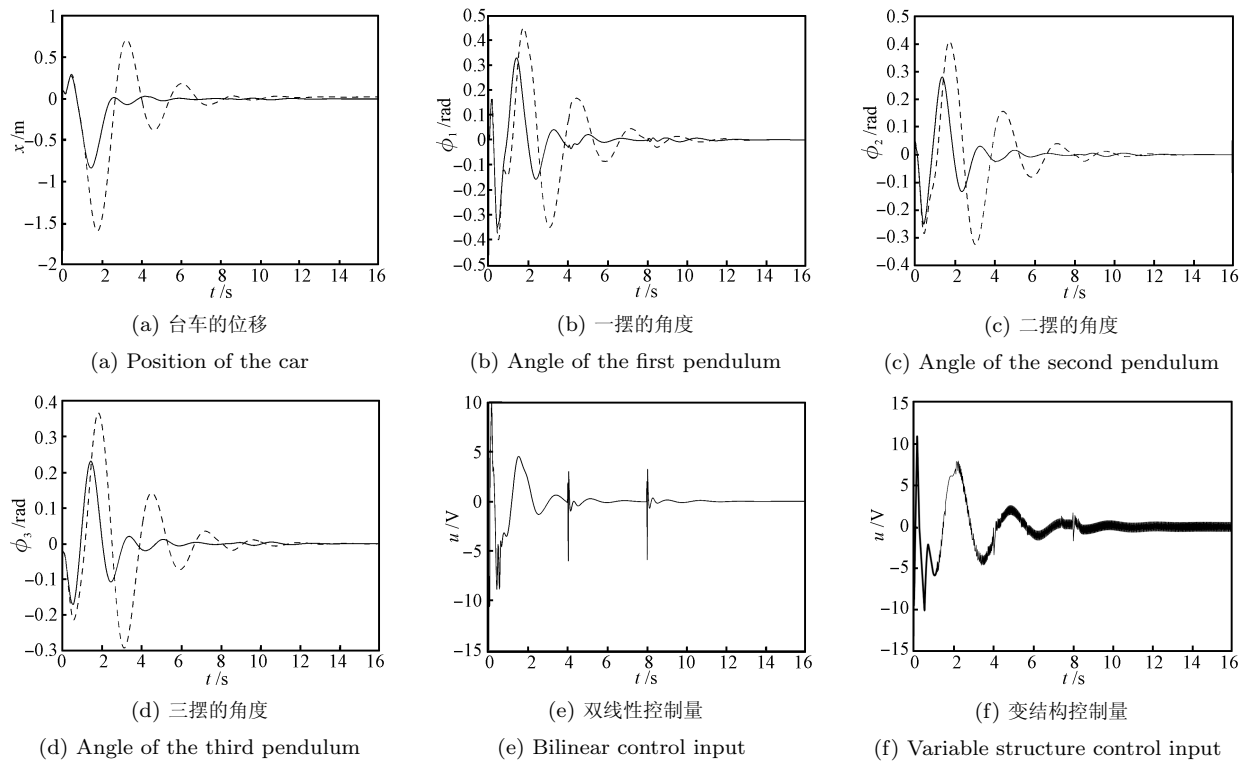


图 5 加入脉冲扰动后系统的状态量和控制量

Fig. 5 System states and control inputs with pulse disturbance

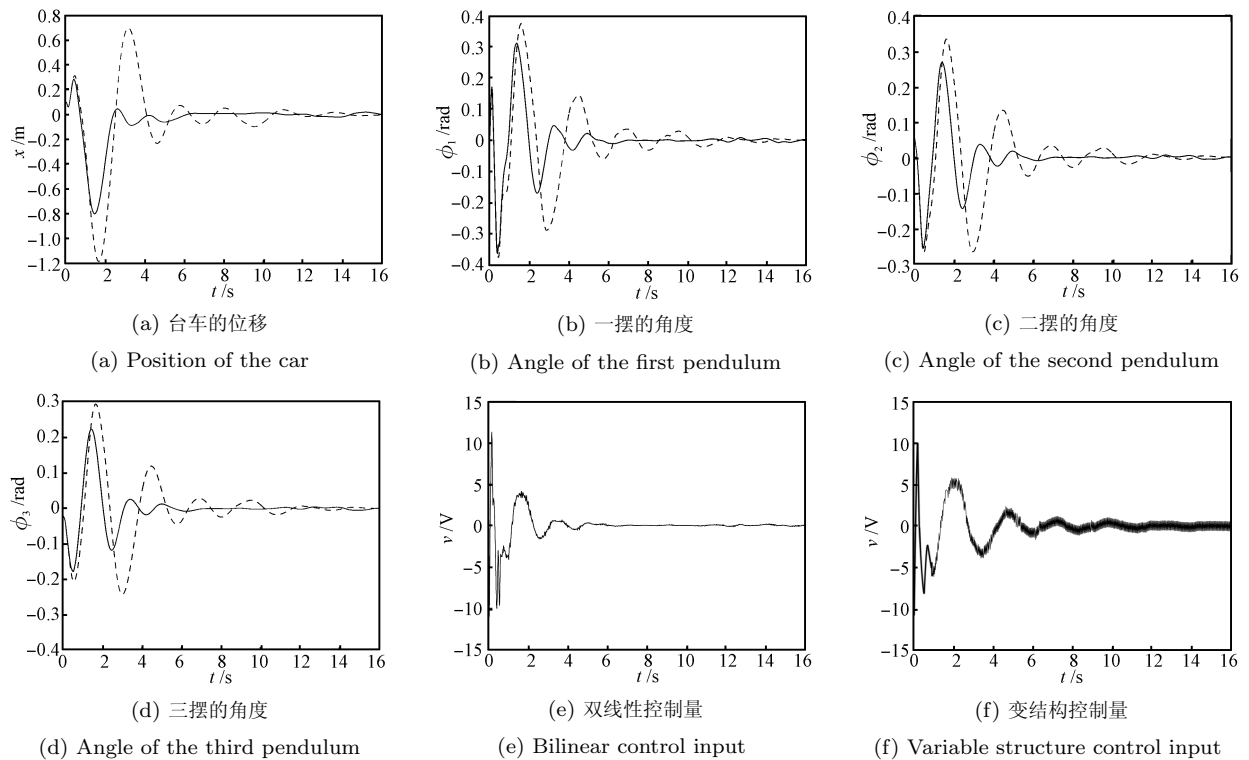


图 6 受高斯白噪声干扰的系统状态量和控制量

Fig. 6 System states and control inputs with Gaussian white noise



$f(t)$  方向给台车施加脉冲力  $2.5\delta(t)$  N ( $\delta(t)$  表示脉冲函数), 仿真结果如图 5.

c) 设系统状态受高斯白噪声干扰, 信噪比均为  $-30$  dB, 仿真结果如图 6.

三种外部扰动情况下系统的 ITAE 性能指标见表 4. 图 4 ~ 图 6 表明在三种不同的外部干扰情况下, 双线性控制中系统状态的变化幅度较小, 过渡过程时间较短, 系统状态能够快速到达稳态值; 相比之下, 变结构控制中系统状态振荡幅度较大, 调节时间较长, 各状态量的振荡幅度是双线性控制的  $0.5 \sim 4$  倍, 调节时间是双线性控制的  $2 \sim 3$  倍.

表 4 三种外部扰动下系统的 ITAE 性能指标

Table 4 System ITAE performance indexes with three kinds of external disturbance

	有界扰动	脉冲扰动	白噪声扰动
双线性控制	2.8355	2.3998	2.3763
变结构控制	5.911	9.4032	6.7588

图 4 ~ 图 6 中的控制量曲线表明双线性控制对外部扰动迅速产生响应, 幅值较小且快速趋于稳定; 变结构控制的控制量持续抖振, 且幅值较大. 加入脉冲扰动后的系统中 (图 5), 两种控制量的差异更加明显: 在平稳过渡过程中, 双线性控制的幅值与变结构控制量相比减小了将近一半; 在脉冲扰动出现的瞬间, 双线性控制可以迅速响应, 产生较大的控制量抵消脉冲扰动的影响; 而变结构控制对脉冲扰动的响应较慢, 产生的控制量幅值较小, 因此需要较长的时间才能克服脉冲扰动的影响.

大量仿真研究表明, 双线性控制对不确定的变化趋势和发生时刻比较敏感, 而对不确定的幅值不敏感. 这一结论对补偿控制器的设计具有一定的指导意义: 无需精确求取不确定的具体数值, 可简化补偿控制器的设计; 补偿控制器设计的重点应该是正确得到不确定的变化趋势, 快速准确地得到不确定发生的时刻, 这样有助于进一步提高双线性控制器的控制性能.

#### 4 结论

针对不确定非线性系统的控制问题, 提出了基于模型偏差的双线性控制结构. 不同于鲁棒  $H_\infty$  控制、自适应控制、滑模变结构控制等非线性控制方法, 双线性控制采用新颖的偏差分离结构, 在线获取系统的不确定非线性信息; 用结构简单的线性控制器对系统的不确定非线性进行实时补偿.

以三级倒立摆为研究对象, 分别对系统初始状态不确定、系统参数不确定和系统存在外部扰动三种情况, 进行了仿真分析. 仿真结果表明, 双线性控

制系统可以显著减小系统状态的变化幅度, 缩短过渡过程时间, 提高系统响应的快速性, 系统的动态性能明显改善; 在多种不确定情况下, 双线性控制均能够达到期望的控制效果, 具有较强的鲁棒稳定性. 由于双线性控制采用线性控制策略, 在工程中可以方便地实现, 因此在工程实践中具有广泛的应用前景.

#### 附录 A 引理 2 的证明

证明. 令

$$v(t) = \int_a^s \phi(r)u(r - \Delta)dr e^{-\int_a^s \phi(r)dr} \quad (A1)$$

则

$$\dot{v}(t) = [u(s - \Delta) - \int_a^s \phi(r)u(r - \Delta)dr] \cdot \phi(s)e^{-\int_a^s \phi(r)dr} \quad (A2)$$

由式 (12) 有

$$u(s - \Delta) - \int_a^s \phi(r)u(r - \Delta)dr \leq u(s - \Delta) - \int_a^{s-\Delta} \phi(r)u(r - \Delta)dr \leq \alpha(s - \Delta)$$

所以, 由式 (A2) 有

$$\dot{v}(t) \leq \alpha(s - \Delta)\phi(s)e^{-\int_a^s \phi(r)dr} \quad (A3)$$

对式 (A3) 的两边进行积分, 即

$$\int_a^t \dot{v}(t)ds \leq \int_a^t [\alpha(s - \Delta)\phi(s)e^{-\int_a^s \phi(r)dr}]ds \iff v(t) \leq \int_a^t [\alpha(s - \Delta)\phi(s)e^{-\int_a^s \phi(r)dr}]ds$$

由式 (A1) 有

$$\int_a^s \phi(r)u(r - \Delta)dr = v(s)e^{\int_a^s \phi(r)dr} \leq \int_a^t [\alpha(s - \Delta)\phi(s)e^{-\int_a^s \phi(r)dr}]ds e^{\int_a^s \phi(r)dr} \leq \int_s^t [\alpha(s - \Delta)\phi(s)e^{\int_s^t \phi(r)dr}]ds$$

由式 (12), 有

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t [\alpha(s - \Delta)\phi(s)e^{\int_s^t \phi(r)dr}]ds$$

□

#### 附录 B 引理 3 的证明

证明. 由于

$$0 \leq \Delta < -L_1\beta^{-2} + \beta^{-1} \ln \frac{\beta^2}{L_1^2(L_1 + L_2)}$$

对于  $\forall \varepsilon \in (0, -L_1\beta^{-2} + \beta^{-1} \ln \frac{\beta^2}{L_1^2(L_1 + L_2)})$ , 取  $\Delta = -\varepsilon -$

$L_1\beta^{-2} + \beta^{-1} \ln \frac{\beta^2}{L_1^2(L_1+L_2)}$ , 则因为

$$a_1(t) = 1 + L_1 e^{\beta\Delta} \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^t L_1 e^{-\beta(t-r)} dr} d\tau \leq 1 + L_1(t-t_0)e^{\frac{L_1}{\beta} + \beta\Delta} = 1 + (t-t_0) \frac{\beta^2}{L_1(L_1+L_2)} e^{-\beta\varepsilon}$$

$$a_2(t) = (L_1 + L_2)a_1(t) \cdot \int_{t_0}^t a_1(\tau) e^{(L_1+L_2)a_1(t) \int_{\tau}^t e^{-\beta(t-r)} dr} d\tau \leq (L_1 + L_2)a_1(t)(t-t_0) \cdot \left[ 1 + \frac{(t-t_0)L_1}{2} e^{\frac{L_1}{\beta} + \beta\Delta} \right] \cdot e^{\frac{L_1(L_1+L_2)}{\beta} [1+L_1(t-t_0)e^{\frac{L_1}{\beta} + \beta\Delta}]} = (L_1 + L_2)a_1(t)(t-t_0) \cdot \left[ 1 + \frac{(t-t_0)L_1}{2} e^{\frac{L_1}{\beta} + \beta\Delta} \right] \cdot e^{\frac{L_1(L_1+L_2)}{\beta} e^{\beta(t-t_0)} e^{-\beta\varepsilon}} = a_3(t) e^{\beta(t-t_0) e^{-\beta\varepsilon}}$$

式中

$$a_3(t) = (L_1 + L_2)a_1(t)(t-t_0).$$

$$\left[ 1 + \frac{(t-t_0)L_1}{2} e^{\frac{L_1}{\beta} + \beta\Delta} \right] e^{\frac{L_1(L_1+L_2)}{\beta}}$$

所以

$$a_2(t) e^{-\beta(t-t_0)} = a_3(t) e^{[e^{-\beta\varepsilon} - 1]\beta(t-t_0)}$$

由式 (13), 得到

$$g(t) \leq a_4(t) e^{[e^{-\beta\varepsilon} - 1]\beta(t-t_0)}$$

式中

$$a_4(t) = 1 + (t-t_0) \frac{\beta^2}{L_1(L_1+L_2)} e^{-\beta\varepsilon} e^{-\beta(t-t_0)} e^{-\beta\varepsilon} + a_3(t)$$

由于  $\beta > 0$ , 对于  $\forall \varepsilon \in \left( 0, -L_1\beta^{-2} + \beta^{-1} \ln \frac{\beta^2}{L_1^2(L_1+L_2)} \right]$ , 取  $\gamma = 1 - e^{-\beta\varepsilon}$ ,  $\Delta = -\varepsilon - L_1\beta^{-2} + \beta^{-1} \ln \frac{\beta^2}{L_1^2(L_1+L_2)}$ , 则对于多项式  $a_4(t)$  必有实数  $N > 0$ , 使得当  $t \geq t_0$  时有

$$a_4(t) < N$$

所以

$$g(t) < N e^{-\gamma(t-t_0)}$$

□

## 附录 C 系统参数

表 C 系统参数

Table C System parameters

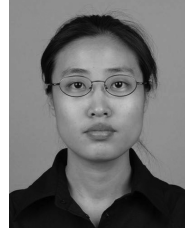
参数	参数值 (kg)	参数	参数值 (m)	参数	参数值 (m)	参数	参数值 (N·s·m)
$m_1$	0.259	$L_1$	0.315	$l_1$	0.189	$C_1$	2.5E-4
$m_2$	0.259	$L_2$	0.315	$l_2$	0.189	$C_2$	2.5E-4
$m_3$	0.089	$L_3$	0.293	$l_3$	0.146	$C_3$	2.5E-4
$I_1$	1.305E-3 kg·m <sup>2</sup>	$I_2$	1.305E-3 kg·m <sup>2</sup>	$I_3$	6.324E-4 kg·m <sup>2</sup>	$C_c$	2.62
$M$	0.59	$K_s$	1.25 N·V <sup>-1</sup>				

## References

- Zames G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **26**(2): 301-320
- Doyle J. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEE Proceedings D: Control Theory and Applications*, 1982, **129**(6): 242-250
- Lin C, Wang Q G, Lee T H. A less conservative robust stability test for linear uncertain time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(1): 87-91
- Goh C K, Teoh E J, Kay C T. Hybrid multiobjective evolutionary design for artificial neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2008, **19**(9): 1531-1548
- Islam M, Sattar A, Amin F, Yao X, Murase K. A new constructive algorithm for architectural and functional adaptation of artificial neural networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2009, **39**(6): 1590-1605
- Volyanskyy K Y, Haddad W M, Calise A J. A new neuroadaptive control architecture for nonlinear uncertain dy-

namical systems: beyond sigma- and e-modifications. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2009, **20**(11): 1703–1723

- 7 Hung J Y, Gao W B, Huang J C. Variable structure control: a survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993, **40**(1): 2–22
- 8 Liu Jin-Kun. *Matlab Simulation for Sliding Mode Control*. Beijing: Tsinghua University Press, 2005. 1–22  
(刘金锟. 滑模变结构控制 Matlab 仿真. 北京: 清华大学出版社, 2005. 1–22)
- 9 Hu Shou-Song. *Automatic Control Theory*. Beijing: Science Press, 2006. 398–510  
(胡寿松. 自动控制原理. 北京: 科学出版社, 2006. 398–510)
- 10 Hu Yue-Ming. *Theory and Application of Nonlinear Control System (Second Edition)*. Beijing: National Defense Industry Press, 2005. 15–16  
(胡跃明. 非线性控制系统理论与应用 (第 2 版). 北京: 国防工业出版社, 2005. 15–16)
- 11 Zhang Ke-Qin, Su Hong-Ye, Zhuang Kai-Yu, Chu Jian. Robust control based on sliding mode for a triple inverted pendulum. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2002, **36**(4): 404–409  
(张克勤, 苏宏业, 庄开宇, 褚健. 三级倒立摆系统基于滑模的鲁棒控制. 浙江大学学报, 2002, **36**(4): 404–409)
- 12 Liu L, He H C. The study of flexible intelligent control for the triple inverted pendulum. In: Proceedings of the 7th Conference on Machine Learning and Cybernetics. Kunming, China: IEEE, 2008. 2175–2180



杨玲玲 广东工业大学博士研究生. 2003 年获得华北电力大学控制理论与控制工程硕士学位. 主要研究方向为非线性控制和智能控制. 本文通信作者.

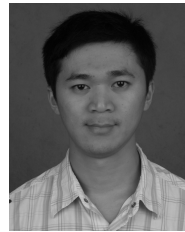
E-mail: 505049@163.com

(**YANG Ling-Ling** Ph.D. candidate at Guangdong University of Technology. She received her master degree in control theory and control engineering from North China Electric Power University in 2003. Her research interest covers nonlinear control and intelligent control. Corresponding author of this paper.)



章云 广东工业大学教授. 主要研究方向为智能控制与信息处理技术、控制网络与集成、机器人技术、控制理论和非线性控制. E-mail: yz@gdut.edu.cn

(**ZHANG Yun** Professor at Guangdong University of Technology. His research interest covers intelligent control and information processing technology, control networks and integration, robot technology, control theory, and nonlinear control.)



陈贞丰 广东工业大学博士研究生. 主要研究方向为控制理论和非线性系统.

E-mail: zfchen.cn@163.com

(**CHEN Zhen-Feng** Ph.D. candidate at Guangdong University of Technology. His research interest covers control theory and nonlinear system.)