

# 多频激电相对相位的物理模拟

张宪润, 周文斌, 夏训银

(中南大学 资源环境与建筑工程学院, 湖南 长沙 410083)

**摘要:** 用激电法来区分矿与非矿异常的研究分为两类: 一类是研究激电场的时域特性或频率特性, 另一类是研究激电场的非线性电效应. 对三维地电结构的激电场研究, 使用积分方程法比较合适. 作者从电磁场基本理论出发, 研究了三维电磁场在均匀导电半空间的张量格林函数, 推导出该函数不含广义索末菲积分的解析式, 其分量用初等函数和修正贝塞尔函数的有限形式表示, 可以解决均匀半空间张量格林函数的快速计算问题. 基于此函数求解 Fredholm 方法, 将异常体剖分为一系列小立方体单元, 并把此方程转化成矩阵方法便可计算出空间任意一点的电势. 此外, 利用中梯装置对金属硫化物矿和石墨开展了相对相位的模拟计算, 其结果与物理模拟成果对比, 证明计算方法是正确的. 该方法利用三个相对相位差, 可以快速评价异常源的性质, 进而达到区分激电异常的目的.

**关键词:** 张量格林函数; 积分方程; 多频激电; 相对相位

中图分类号: P631.324 文献标识码: A 文章编号: 1005-9792(2001)02-0115-03

## 1 Fredholm 积分方程

考虑的地电结构模型如图 1 所示, 在半空间大地中含有一矩形异常体. 假设半空间大地是均匀、各向同性的, 其电导率为  $\sigma$ , 各向异性异常体的电导率为  $\sigma_a$ , 在电流激发下, 有

$$\nabla \times \nabla \times E(r) + k^2 E(r) = \begin{cases} (k_a^2 - k^2) E(r), & r \in V \\ 0, & r \notin V \end{cases} \quad (1)$$

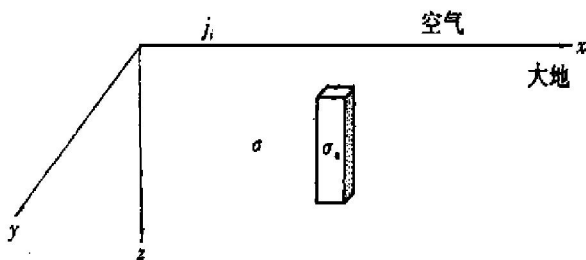


图 1 三维异常体模型

(1) 式中,  $k_a$  和  $k$  分别是异常体和大地中的波数. 忽略位移电流, 由均匀半空间的电张量格林函数可得

$$E(r) = E^p(r) + \frac{\sigma_a - \sigma}{\sigma} \int_V G(r, r') \cdot E(r) dV \quad (2)$$

这就是第 2 类奇异、矢量 Fredholm 积分方程. 其中,  $E^p(r)$  为激发源产生的一次场, 可用解析法直接求得.

为了对(2)式利用计算机进行数值模拟计算, 把异常体区域  $V$  划分为  $N$  块, 视每个立方体小块单元内的电场为常数, 并用它在每小块中心( $r_n$ ) 的值来代表, (2)式可写为

$$E(r) = E^p(r) + \frac{\sigma_a - \sigma}{\sigma} \sum_{n=1}^N \int_V G(r, r') \cdot E_n dV$$

在第  $m$  个单元中心点的电场可写为

$$E_m = E_p + \frac{\sigma_a - \sigma}{\sigma} \sum_{n=1}^N \Gamma_{mn} \cdot E_n \quad (3)$$

其中:

$$\Gamma_{mn} = \int_V G(r_n, r') dV'$$

重写(3)式就可得

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sigma_a - \sigma}{\sigma} [\Gamma_{mn} - \delta_{mn}] \cdot E_n = -E_m^p$$

其中:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} I, & \text{当 } m = n \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } m \neq n \text{ 时} \end{cases}$$

$I$  是单位张量;  $m$  和  $n$  为小块体的编号. 将  $E_n$  和  $E_m^p$  分别用  $x, y$  和  $z$  3 个方向上的分量表示:

$$E_n = E_n^x e_x + E_n^y e_y + E_n^z e_z$$

$$E_m^p = E_m^{px} e_x + E_m^{py} e_y + E_m^{pz} e_z$$

这样, 对于每一个给定的  $m$ , (3) 式便可给出 3 个关于  $E_n^x, E_n^y, E_n^z (n = 1, 2, \dots, N)$  的线性方程组. 当  $m$  取  $1, 2, \dots, N$  时, 便共有  $3N$  个这样的线性方程组, 将其写成矩阵方程的形式

$$[A][E] = -[E^p] \quad (4)$$

式中:  $[A]$  为线性方程组的系数矩阵 ( $3N \times 3N$ ) 阶方阵. 求解矩阵方程(4)就可求得每小块中心的电场, 进而求得空间任一点的电场.

## 2 地表水平电偶极子的一次场

为了获得线性方程组(4)的右端项, 需要计算出地表水平电偶极子在异常体各小块中心的一次场的  $x, y$  和  $z$  3 个方向上的分量.

设在均匀大地地表放置一谐变水平电偶极子  $P = Idx e_x$ . 令  $z' = 0$  便可得到地表水平电偶极子在大地上激发的赫兹矢量.

$$\pi_x = \pi_1 + \pi_2 = 2c \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda + u_1} e^{-u_1 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (5)$$

$$\pi_x = \pi_2 = -2c \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda + u_1} e^{-u_1 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (6)$$

其中,  $c = \frac{I ds}{4\pi\sigma_1}$ .

(5), (6) 式是含有广义索末菲积分的表达式, 由于被积函数中含有贝赛尔函数, 且积分限为无穷量, 难以快速准确计算. 为此, 作者推导出由初等函数和修正的贝赛尔函数的有限形状表示的解析式.

将(6)式的分子分母同乘以  $(\lambda - u_1)$ , 得

$$\pi_x = -2c \frac{1}{k_1^2 \partial x} \int_0^\infty \lambda e^{-u_1 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda - \int_0^\infty u_1 e^{-u_1 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

对其中的第 1 个积分, 由索末菲积分公式

$$P = \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1} e^{-u_1 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda = \frac{e^{ik_1 R}}{R}$$

得

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1} e^{-u_1 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda = \frac{\partial P}{\partial z}$$

第 2 个积分为福斯特积分, 对  $z$  求二阶导数

$$N = \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1} e^{-u_1 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda = I_0(p) \cdot K_0(q)$$

式中:  $p = \frac{ik_1}{2}(R - z); q = -\frac{ik_1}{2}(R + z); I_0$  和  $K_0$  是零阶修正贝赛尔函数, 于是可得到

$$\pi_x = 2c \frac{1}{k_1^2 \partial x} \left[ \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right] \quad (7)$$

类似可得

$$\pi_x = 2c \frac{1}{k_1^2 \partial x} \int_0^\infty \lambda^2 e^{-u_1 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda - \int_0^\infty \lambda u_1 e^{-u_1 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

$$= -2c \frac{1}{k_1^2} \left[ k_1^2 \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] \quad (8)$$

将(7)和(8)代入到场矢量公式中, 就可得到用  $P, N$  表示的大地中的电场:

$$e_x = -2c \left[ \frac{\partial^3 N}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 N}{\partial z^3} + k_1^2 \frac{\partial N}{\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right]$$

$$e_y = -2c \frac{\partial^3 N}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$e_z = 2c \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}$$

因为  $\pi_x$  满足波动方程, 且  $\pi_x$  的所有导数和积分也应满足波动方程, 所以有关系式:

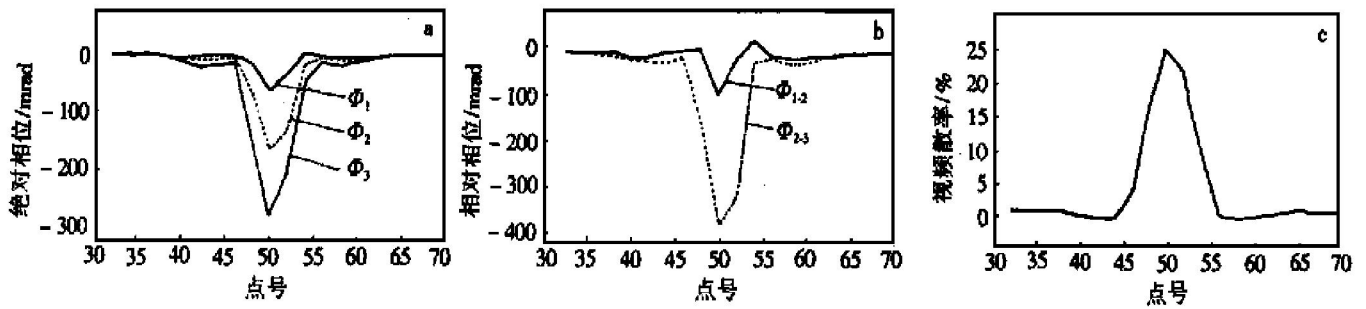
$$\frac{\partial^2(\frac{\partial N}{\partial z})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\frac{\partial N}{\partial z})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\frac{\partial N}{\partial z})}{\partial z^2} + k^2 \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

## 3 三维激化体上中梯装置相对相位的物理模拟

为了检验理论的正确性, 在水槽中进行了模拟实验. 实验模型采用  $12 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$  的黄铁矿, 顶部埋深  $2.5 \text{ cm}$ , 观测仪器采用中南大学研制的伪随机多频激电仪. 供电电极  $AB = 100 \text{ cm}$ , 测量电极  $MN = 2 \text{ cm}$ . 观测方向沿模型的正上方的主剖面进行.

本实验采用伪随机三频激电观测系统, 选择第 4 频组进行观测. 一次供电可以测量 3 个频率的相对电位的振幅和绝对相位, 再按上述公式计算出相对相位和视幅频散率.

图 2 给出了黄铁矿标本上测得的绝对相位、相对相位和视幅频散率的剖面曲线. 从图 2 可以看出, 3 种参数曲线的基本特征与理论计算曲线的基本特征是相同的.



a—绝对相位; b—相对相位; c—视频率散率; 模型大小: 12 cm × 10 cm × 6 cm, 顶埋深  $H = 2.5$  cm,  $\overline{AB} = 100$  cm,  $\overline{MN} = 2$  cm

图2 黄铁矿实验剖面曲线

## 4 结 论

在频散曲线和单个频率绝对相位曲线中,多频激电与常规激电法相比,没有提供更多的信息,但是从相对相位曲线看,可以直观地区分出金属硫化物引起的异常.其主要特征是:相对相位  $\varphi_{1-2} < \varphi_{2-3}$ ,证明且利用积分方程法模拟计算多频激电相对相位的方法是正确的.

### 参考文献:

[1] 傅良魁. 激发极化法[M]. 北京:地质出版社,1982.

[2] 何继善,李大庆,汤井田. 双频道频谱激电非线性效应研究[J]. 地球物理学报,1995,38(5):670-675.  
 [3] 何继善. 伪随机三频激电法研究[J]. 中国有色金属报,1994,4(1):1-7.  
 [4] 张友山,何继善. 伪随机三频波电法[J]. 中南工业大学学报,1995,26(2):157-161.  
 [5] 张宪润,陈儒军. 激电相对相位法区分矿与非矿异常的成功实例[J]. 物探与化探,1998,22(4):251-254.  
 [6] 傅良魁,刘若谷. 时间域非线性激电效应的实验研究——金属模型体实验结果[J]. 桂林冶金地质学院学报,1990,10(2):159-172.

## Physical analogy of relative phase in multi-frequency induced polarization

ZHANG Xian-run, ZHOU Wen-bin, XIA Xun-yin

(College of Resources, Environment and Civil Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** There are two methods to discriminate the properties of mine with induced polarization. One is to research into the time or frequency principles of IP, the other is non-linearity of IP. Usually it is better to compute three-dimensional geological body by integral equation. Started from electromagnetic basic theory, analytical expression of tensor Green's function of homogeneous half-space in three-dimensional EM field is expounded. The Fredholm equation is solved using tensor Green's function. The anomalous body is divided into a number of cubic cells and the integral equation is reduced to a matrix equation. Then the electric and magnetic field at any point in the earth can be calculated. Compared with the physical modeled result, relative phase survey of pyrite and graphite is simulated, which verifies the computational method.

**Key words:** tensor Green's function; integral equation; multi-frequency induced polarization; relative phase