

# 散料与锥仓接触模拟\*

王学文<sup>1</sup> 树学峰<sup>2</sup> 杨兆建<sup>1</sup>

(1. 太原理工大学机械工程学院, 太原 030024; 2. 太原理工大学应用力学研究所, 太原 030024)

**【摘要】** 基于 Drucker-Prager 屈服准则与弹性力学问题有限元方法, 以小麦为例建立了松散物料与某型号钢板锥仓的接触数学模型。在合理建模基础上解决了松散物料与锥仓接触时接触面上必须满足的位移条件、力的传递关系以及力与位移的关系。通过建立求解方程与计算程序, 使用 Lagrange 乘子法与罚函数法相结合进行强制接触协调, 获得了较精确的计算结果。结果表明, 散料在锥仓中接触摩擦应力与接触状态相关, 应力值较小, 总接触应力主要表现为接触压力, 压力从仓顶到仓底逐步增大且光滑过渡, 表现为某种非线性关系。

**关键词:** 小麦 松散物料 锥形筒仓 接触分析 接触压力

**中图分类号:** O343.3; O242.21 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2010)10-0086-05

## Contact Simulation on Loose Material and Cone-shaped Silo

Wang Xuewen<sup>1</sup> Shu Xuefeng<sup>2</sup> Yang Zhaojian<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China

2. Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

### Abstract

Based on the Drucker-Prager yield criterion and finite element method, the contact mathematical model was established on wheat and a type of cone-shaped steel-sheet silo. These requirements on the contact surface were solved of the displacement conditions, the pressure transfer and the relations between the pressure and the displacement. Through establishing solving equations and calculation procedures, the reliable results were offered, using Lagrange's method of multiplier and penalty function method. The results showed that the contact friction stress was small and associated with the contact state. The total contact stress was mainly contact pressure which was increased gradually from the top to the bottom of the silo and showed itself a non-linear relationship.

**Key words** Wheat, Loose material, Cone-shaped silo, Contact analysis, Contact pressure

### 引言

储料仓的设计计算, 国内外的学者比较集中于圆直筒仓的相关研究, Janssen 公式<sup>[1]</sup>提出了侧压力系数  $K$  的假设, 为国内外学者许多研究提供了基础<sup>[2-4]</sup>。近些年, 随着有限元技术的发展, 储料仓的研究引入了新的手段与研究方法<sup>[5-6]</sup>。但大多数文献报道均集中于圆直筒仓。国内曾有学者采用颗粒流数值方法, 通过改变圆锥漏斗倾角和开口宽度, 对松散物料在仓内的流动状态

进行模拟分析<sup>[7]</sup>, 国外有学者对矩形直筒仓卸料端的倒棱锥仓的压力进行了实验研究<sup>[8]</sup>, 但对散料在锥仓中的接触行为进行研究的文献报道很少。

本文基于有限元方法, 以小麦为例建立松散物料与某特定锥仓接触计算模型, 模拟松散物料与钢板锥仓壁面的接触状况, 研究松散物料对钢板锥仓的接触应力与变化规律, 为合理设计锥仓结构, 顺利消除物料装、卸、储状态的物料粘结、堵料、超压等问题提供依据。

收稿日期: 2009-10-27 修回日期: 2010-02-02

\* 山西省青年科学基金资助项目(2010021021-1)、山西省科技基础条件平台项目(2010091014)和太原理工大学 2009 发展基金资助项目  
作者简介: 王学文, 副教授, 博士后, 主要从事现代机械设计方法和计算力学研究, E-mail: wxuew@163.com

## 1 力学准则与数学模型

### 1.1 力学准则

小麦是一种比较典型的颗粒状松散物料, 此类物料受压屈服强度远大于受拉屈服强度, 且物料受剪时颗粒会膨胀, 因此常用的 Von-Mises 屈服准则不适合于这类材料。松散粉体力学中, 常用的屈服准则有莫尔-库仑 (Mohr-Coulomb) 屈服准则 (简称 M-C 准则) 和德鲁克-普拉格 (Drucker-Prager) 屈服准则 (简称 D-P 准则), 其中 D-P 准则是对 M-C 准则的近似, 其屈服面为光滑过渡, 有利于数值求解过程中求导。另外, D-P 准则考虑了由于屈服引起的体积膨胀。因此, 在假定物料为理想弹塑性体的情况下, D-P 屈服准则被现有许多大型有限元程序采用, 如 ANSYS<sup>[9]</sup>。

适用 D-P 屈服准则的材料简称 DP 材料。DP 材料的材料参数包括松散堆积密度、粘聚力、内摩擦角和膨胀角等, 小麦散料属于 DP 材料, 其物料特性与 DP 参数<sup>[10]</sup>为: 内摩擦角 22.2°, 粘聚力 9 500 Pa, 膨胀角 23.1°, 泊松比 0.37, 弹性模量 3.73 MPa, 堆积密度 852 kg/m<sup>3</sup>, 摩擦因数 (对钢板) 0.19。

### 1.2 数学模型

松散物料与钢板锥仓接触问题的求解过程是搜寻准确接触状态的反复迭代过程。一般来讲, 需要先假定一可能的接触状态, 随后代入求解条件, 得到松散物料与锥仓接触点的接触内力与位移, 判断是否满足接触条件。不满足时修改接触点接触状态重新求解, 直到所有接触点都满足。

设小麦与锥仓为两个接触求解区域, 根据弹性力学问题有限元方法<sup>[11]</sup>, 建立整体坐标系下的矩阵方程

$$\begin{cases} \mathbf{K}_w \boldsymbol{\delta}_w = \mathbf{P}_w + \mathbf{R}_w \\ \mathbf{K}_s \boldsymbol{\delta}_s = \mathbf{P}_s + \mathbf{R}_s \end{cases} \quad (1)$$

式中  $\mathbf{K}_w$ 、 $\mathbf{K}_s$ ——小麦、锥仓的刚度矩阵

$\boldsymbol{\delta}_w$ 、 $\boldsymbol{\delta}_s$ ——小麦、锥仓的位移向量

$\mathbf{P}_w$ 、 $\mathbf{P}_s$ ——小麦、锥仓的载荷向量

$\mathbf{R}_w$ 、 $\mathbf{R}_s$ ——小麦、锥仓的接触力向量

根据求得的节点位移, 利用求节点力的方法得到接触点的接触力向量, 然后根据接触点的位移与接触力向量, 依次按接触判定条件判定各点对接触状态是否与假定接触状态相符, 不符则修改接触状态, 重新代入接触条件式(1), 反复迭代直到计算结果相符, 如图 1 所示。

## 2 研究方法

作为高度非线性行为, 松散物料与锥仓的接触

求解是一个反复迭代的过程, 接触点对较多, 计算比较繁杂, 需要较大的计算资源。为了进行有效计算, 借助 ANSYS 求解状态非线性问题对小麦与锥仓的接触问题求解。研究过程主要解决以下 4 个方面的问题:

(1) 选择模型以描述小麦与锥仓之间力的传递, 以及在不同载荷下接触状态的变化。

本文采用有限元方法求解, 将小麦与锥仓离散化, 并分别作为接触主动体与被动体, 其物理模型为小麦模型上的点和锥仓表面上的点相接触 (网格节点并不一定是一一对应)。处于接触状态的小麦与锥仓表面能够传递法向压力和切向摩擦力。这样, 小麦与锥仓可以根据自身情况进行网格离散, 且经过处理后, 即使考虑到摩擦滑移的情况, 最终的控制方程也是可以成为对称的。

为简化计算, 将小麦与锥仓的接触简化为二维问题处理, 钢板锥仓与小麦散料均使用 PLANE 42 进行离散。PLANE 42 单元用作平面单元, 可用于离散二维实体结构模型, 有 4 个节点, 每个节点有 2 个自由度, 分别为  $x$  和  $y$  方向的平移。本单元具有塑性、蠕变、辐射膨胀、应力刚度、大变形以及大变形的能力, 可适应接触问题计算<sup>[12]</sup>。

求解过程中, 为克服高度非线性与载荷增量累积误差导致收敛困难, 采用牛顿-拉普森 (N-R) 法平衡迭代, 同时 N-R 法估算残差矢量, 可为问题收敛提供合理判据。

(2) 接触面上小麦与锥仓的位移必须满足一定条件以解决小麦与锥仓节点自由度关系以及接触面上小麦与锥仓变形之间的一致关系。

将小麦与锥仓的接触问题定义为刚-柔、面-面接触, 锥仓板刚性面作为目标面, 用 Target169 模拟二维模型, 小麦散料作为柔性体, 其表面作为接触面, 相应用 Conta171 进行模拟。1 个目标单元与 1 个接触单元作为 1 个接触对, 程序通过 1 个共享的实常数号进行接触对识别。

离散后的有限元模型以及小麦与锥仓的接触关系如图 2 所示。

(3) 研究小麦与锥仓接触面上力与位移或压力与切向力之间的关系。

该问题主要涉及小麦与锥仓接触时的摩擦关

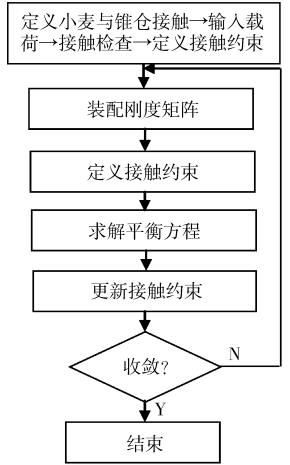


图 1 迭代模型  
Fig. 1 Iterative model

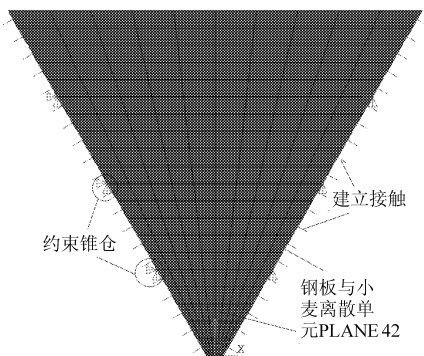


图2 有限元离散模型

Fig.2 Finite element model

系。实际上,摩擦因数与多种因素有关,且小麦与锥仓形成的接触对,随滑移情况不同,摩擦因数也不同,即接触面本构关系为非线性。

为使问题更容易收敛,采用 Mohr - Coulomb 模型模拟小麦与锥仓的接触摩擦。当小麦与锥仓表面发生接触时,接触面之间一般传递切向力和法向力,所以分析中要考虑阻止表面间的相对滑动摩擦力。Mohr - Coulomb 模型应用摩擦因数  $\mu$  表征小麦和锥仓两个表面间的摩擦行为。当表面拉力达到临界剪应力值之前,切向运动保持为零,临界剪应力取决于法向接触压力和摩擦因数,即  $\tau = \mu p$  ( $p$  为法向接触压力,  $\tau$  为临界剪应力)。当小麦与锥仓接触面间剪应力等于临界摩擦剪应力时,接触面发生相对滑动,如图 3 所示<sup>[13]</sup>。

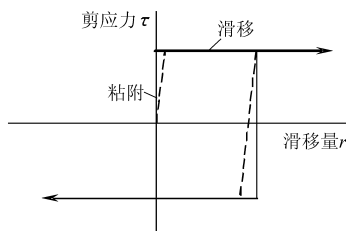


图3 摩擦行为示意图

Fig.3 Friction behavior

(4) 以数学方程和计算程序描述上述规律使系统处于平衡,并求解方程。

真实的情况是小麦和锥仓的实际接触体相互不穿透,因此计算程序必须在小麦和钢板两个面间建立一种关系,实现接触传递并防止它们在有限元计算过程中相互穿过。

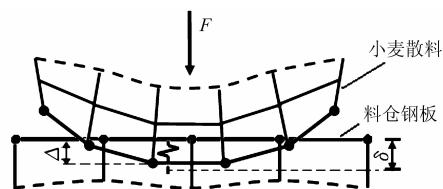
常用的手段是使用罚函数法实现接触传递,通过接触刚度  $N$  在接触力跟接触面间的穿透值建立力与位移的线性关系。当小麦与锥仓分开时,惩罚函数不起作用;当它们的接触面开始穿透时,惩罚函数以类似于弹簧刚度的作用将接触面推开,以模拟实际状况的相互不渗透。其平衡方程为

$$F = N\Delta \quad (2)$$

式中  $F$ ——压力  $N$ ——接触刚度

$\Delta$ ——穿透量

但是,数学上必须以有限的穿透量 ( $\Delta > 0$ ) 在小麦与锥仓的交界面产生接触力(图 4),以平衡系统,这就要求穿透量  $\Delta$  足够小方可获得较高的计算精度,这就意味着要有一个比较大的接触刚度。然而,若接触刚度过大,微小的穿透也会产生过大的接触力,在紧接的迭代计算中可能会将接触面推开,导致收敛振荡、发散,最终不能获得结果。

图4 接触穿透容差  $\delta$  与穿透量  $\Delta$  示意图Fig.4 Penetration tolerance  $\delta$  and penetration quantum  $\Delta$ 

因此,采用 Lagrange 乘法增加附加自由度(接触压力)的办法,与罚函数法结合起来进行强制接触协调,使用穿透容差  $\delta$  来满足不可穿透条件(图 4)。在迭代开始阶段,接触协调基于罚刚度确定,一旦获得平衡,即检查穿透容差,若穿透量小于穿透容差,接触压力增加,继续迭代,直到收敛。

将小麦与锥仓设定为面-面接触单元,用一个系数间接给出接触刚度  $N$ ,计算程序通过下层单元的刚度乘以该系数以确定接触刚度,该系数称为法向接触刚度因子。法向接触刚度因子设定为 1.0,基本可以给出足够的精度,即接触刚度等于下层单元的刚度。穿透容差不能过小,否则难以收敛,本文取  $\delta = 0.001 \text{ m}$ (表 1)。

表1 接触参数

Tab.1 Contact parameters

| 参数                     | 数值                   |
|------------------------|----------------------|
| 离散单元                   | PLANE 42             |
| 接触单元                   | Target169 与 Conta171 |
| 接触类型                   | 刚-柔,面-面接触            |
| 法向接触刚度因子               | 1.0                  |
| 穿透容差 $\delta/\text{m}$ | 0.001                |

### 3 结果与分析

锥仓材料参数与结构参数如表 2 所示,其中锥仓倾角  $30^\circ$ 。

表2 锥仓材料参数与结构参数

Tab.2 Material &amp; structure parameters of silo

| 参数                                | 数值                | 参数                     | 数值  |
|-----------------------------------|-------------------|------------------------|-----|
| 密度/ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ | 7 850             | 泊松比                    | 0.3 |
| 弹性模量/MPa                          | $2.1 \times 10^5$ | 仓板倾角 $\phi/(\text{°})$ | 30  |

计算结果如图 5、6、7 及表 3 所示。

由图 5 可知,小麦在锥仓中的接触分为两部分,即滑动(sliding)接触与粘附(sticking)接触,仓顶往下 1/5 处位置为粘/滑交界区,该位置随物料属性和锥仓结构不同会有所不同。接触状态直接影响小麦与锥仓的接触摩擦应力,接触摩擦应力从仓顶到粘/滑交界区迅速增加,进入粘附状态后,接触摩擦应力缓慢下降,最大值为 3 758 Pa(图 6)。

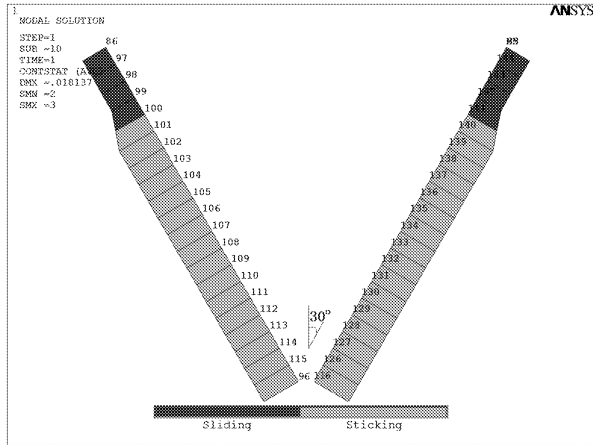


图 5 接触状态

Fig. 5 Contact status

由图 7 可知,从仓顶到卸料口,接触压力逐步增加,由于卸料口非静压,卸料口接触压力有突变。除卸料口外,接触压力从仓顶到仓底光滑过渡,表现为某种函数关系。表 3 给出了从仓顶到仓底的各节点接触压力值,节点位置参见图 5,不考虑卸料口 96 号

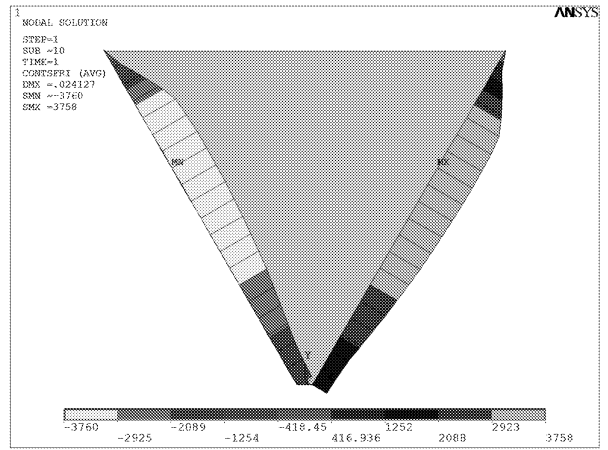


图 6 接触摩擦应力

Fig. 6 Contact friction stress

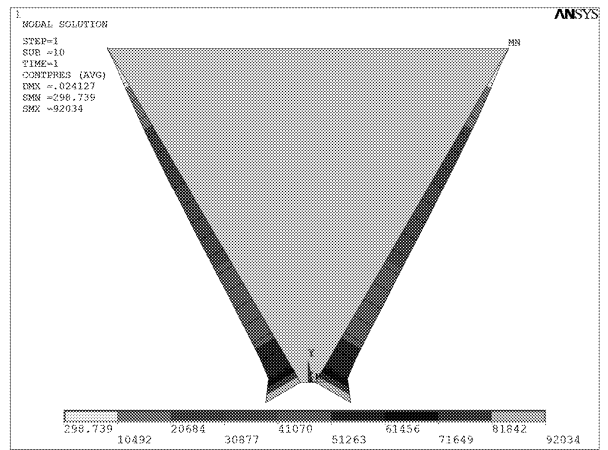


图 7 接触压力

Fig. 7 Contact pressure

表 3 对应节点接触压力

Tab. 3 Contact pressures and relevant node numbers

|    | Pa     |         |         |        |        |        |        |
|----|--------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| 节点 | 86     | 97      | 98      | 99     | 100    | 101    | 102    |
| 压力 | 299.38 | 3 591.2 | 9 381.6 | 14 308 | 18 653 | 22 133 | 25 416 |
| 节点 | 103    | 104     | 105     | 106    | 107    | 108    | 109    |
| 压力 | 28 378 | 30 968  | 33 221  | 35 459 | 37 612 | 39 761 | 41 733 |
| 节点 | 110    | 111     | 112     | 113    | 114    | 115    | 96     |
| 压力 | 43 707 | 45 843  | 47 875  | 50 236 | 53 491 | 58 652 | 92 034 |

节点,最大接触压力为 58 652 Pa。相邻节点距离相等,但表中接触压力值并非线性增加,因此接触压力随锥仓深度呈某种非线性关联。由图 6、7 可知,接触压力远大于接触摩擦应力,总接触应力以接触压力为主。

文献[14]也指出,散体不同于流体,其对侧墙有摩擦力作用,侧压力沿高度的分布不可能是线性的。并按虚位移法得到了浅圆筒仓侧压力计算公式,指出接触压力与为散料堆积密度、散料内摩擦角(可推导侧压力系数)、浅圆筒仓半径、散料与仓壁摩擦因数以及装料高度有关。但小麦对锥形仓体的

接触压力除与上述因素有关外,还与锥仓的倾角有关。文献[14]还给出了侧压力计算公式的曲线图和实验图,明确表明了浅圆筒仓的侧压力从仓顶到仓底逐渐增大,曲线较光滑过渡,并与有限元分析结果和实仓实验结果进行了对比。仅从曲线形式、特点和趋势来看,与本文获得的接触压力云图结果是一致的。

#### 4 结论

(1) 松散物料在锥仓中的接触摩擦应力与接触状态相关,接触摩擦应力在粘/滑交界区最大,从粘/

滑交界区向仓顶和仓底都逐步减小,粘/滑交界位置随松散物料特性和锥仓结构不同而变化。

(2) 接触摩擦应力远小于接触压力,物料在仓体中的总接触应力主要表现为接触压力,接触压力从仓顶到仓底逐步增大,变化趋势表现为某种非线性函数关系。

性函数关系。

(3) 接触压力与散料堆积密度、散料内摩擦角、锥仓结构(包括锥仓高度、锥仓倾角等)、散料与仓壁摩擦因数以及装料高度等参数有关。

#### 参 考 文 献

- 1 Janssen H A. Versuche uber getreidedruck in silozellen[J]. Z. des Vereines Deutscher Ingenieure, 1895, 39(35): 1 045 ~ 1 049.
- 2 Jake J. Pressure in silos[C]//Proc. 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rotterdam, 1948, 1: 103 ~ 107.
- 3 张家康, 黄文萃, 姜涛, 等. 筒仓贮料侧压力系数研究[J]. 建筑结构学报, 1999, 20(1): 71 ~ 74.  
Zhang Jiakang, Huang Wencui, Jiang Tao, et al. Study on lateral pressure ratio of stored material in silos[J]. Journal of Building Structures, 1999, 20(1): 71 ~ 74. (in Chinese)
- 4 章瑞文, 徐日庆. 平移模式下挡土墙背土侧压力系数的计算[J]. 中国公路学报, 2007, 20(1): 14 ~ 18.  
Zhang Ruiwen, Xu Riqing. Computation of coefficient of lateral earth pressure on retaining wall surface with mode of translation[J]. China Journal of Highway and Transport, 2007, 20(1): 14 ~ 18. (in Chinese)
- 5 Ayuga F, Guaita M, Aguado P. SE-structures and environment; static and dynamic silo loads using finite element models[J]. Journal of Agricultural Engineering Research, 2001, 78(3): 299 ~ 308.
- 6 姜勇. 利用 Dun Can-Chang 模型分析钢板仓壁静压力[J]. 青岛大学学报: 工程技术版, 2001, 16(3): 28 ~ 32, 37.  
Jiang Yong. Analysis of static pressures on steel silo walls by the Dun Can-Chang's nonlinear elastic model[J]. Journal of Qingdao University: Engineering & Technology Edition, 2001, 16(3): 28 ~ 32, 37. (in Chinese)
- 7 周健, 张昭, 杜明芳. 漏斗形状改变对筒仓压力影响的细观研究[J]. 特种结构, 2006, 23(4): 14 ~ 16.  
Zhou Jian, Zhang Zhao, Du Mingfang. Research in detail for influence of pressure in silo after changing the funnel form[J]. Special Structures, 2006, 23(4): 14 ~ 16. (in Chinese)
- 8 Brown C J, Lahlouh E H, Rotter J M. Experiments on a square planform steel silo[J]. Chemical Engineering Science, 2000, 55(20): 4 399 ~ 4 413.
- 9 郝文化. ANSYS 土木工程应用实例[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005.
- 10 Moya M, Ayuga F, Guaita M, et al. Mechanical properties of granular agricultural materials considered in silos design [C]// 15th ASCE Engineering Mechanics Conference, Columbia University, New York, 2002.
- 11 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 3版. 北京: 中国水利水电出版社, 2009.
- 12 荆静忠, 王永岗, 陈晓霞. ANSYS7.0 分析实例与工程应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.
- 13 姜东. 浅圆仓仓壁侧压力的有限元分析[J]. 特种结构, 2007, 24(4): 7 ~ 11.  
Jiang Dong. Analysis of the side pressure in silo wall of shallow bin with finite element method[J]. Special Structures, 2007, 24(4): 7 ~ 11. (in Chinese)
- 14 陈长冰, 梁醒培, 原方. 大型筒仓侧压力计算的虚位移法[J]. 四川建筑科学研究, 2009, 35(3): 24 ~ 26.  
Chen Changbing, Liang Xingpei, Yuan Fang. Virtual displacement method for calculating lateral pressure on squat silo[J]. Sichuan Building Science, 2009, 35(3): 24 ~ 26. (in Chinese)