

中心回线瞬变电磁法 2.5 维有限单元算法

王华军¹ 罗延钟²

¹ 华侨大学信息科学与工程学院, 泉州 362011

² 中国地质大学应用地球物理系, 武汉 430074

摘 要 瞬变电磁法的野外资料解释基本上停留在一维水平, 本文从生产实践中常用的中心回线法入手, 基于电磁场本身的叠加原理, 从麦克斯韦方程组出发, 导出了中心回线瞬变电磁 2.5 维二次场(纯异常)的有限单元计算公式. 该算法采用三角形有限元网格, 在尽可能拟合地下电性断面的情况下减少有限元网格的节点数和单元数; 用选主元的 LU 分解法求解线性方程组, 做到了在移动场源时只需改变右端项; 在反傅氏变换中, 使用新的波数选取方案, 让波数 m 随时间 t 滑动. 最后给出的算例表明, 该算法直接计算异常场, 计算速度快、精度高.

关键词 中心回线 瞬变电磁 2.5 维 有限元

文章编号 0001-5733(2003)06-0855-08 中图分类号 P631 收稿日期 2002-02-19, 2003-04-05 收修定稿

ALGORITHM OF A 2.5 DIMENSIONAL FINITE ELEMENT METHOD FOR TRANSIENT ELECTROMAGNETIC WITH A CENTRAL LOOP

WANG HUAJUN¹ LUO YANZHONG²

¹ Information Science & Engineering College, Huaqiao University, Quanzhou 362011, China

² Department of Applied Geophysics, China University of Geosciences, Wuhan, 430074, China

Abstract In view of the existing situation of low level of the 1-D interpretation of the Transient Electromagnetic (TEM) in field work, we start from the central loop method, which is widely used in field work, to make improvement. Based on the principle of superposition of the Electromagnetic (EM), we deduce the secondary field (pure abnormal field) formulas of the 2.5 dimension finite element method (FEM) from the Maxwell's equations. This algorithm uses triangle FEM grids, which can not only fit the geo-electric media well but also decrease the number of nodes and cells. It adopts pivoting LU decomposition to solve the linear equations, of which needs only to change the right hand items and perform an iteration when increasing a measuring point. A new scheme is used to choose wavenumbers, which lets the wavenumber m glide with given computational time t . Finally we give examples to show that the forward modeling code calculates directly the secondary field and makes the computation faster with higher calculating accuracy.

Key words Central loop, Transient electromagnetic, 2.5 dimension, Finite element method.

1 引 言

电磁法是矿产资源勘查及水文地质和环境地质

调查中十分有效和应用广泛的地球物理勘探方法之一^[1,2], 但目前其野外资料解释水平很低, 除天然场源的大地电磁测深(MT)和音频大地电磁(AMT)外, 基本上仅限于一维解释^[3-5]. MT或AMT二维乃至

基金项目 福建省青年科技人才创新项目(2001J007).

作者简介 王华军, 男, 1972年生, 2001年于中国地质大学(武汉)获地球探测与信息技术专业博士学位, 现在福建泉州华侨大学任教. 主要从事计算机应用方面的研究. E-mail: huajunw@sohu.com

三维反演都已基本解决;远区人工源电磁法(例如,可控源音频大地电磁(CSAMT))也可近似按 MT 或 AMT 的方法处理. 但近区人工源电磁法(瞬变电磁法(TEM)等)的情况却复杂得多,现有的三维正、反演算法的计算量都很大. 为了实现其计算,人们不得不以牺牲计算精度为代价. 在没有很好地同时解决三维问题的速度和精度问题之前,不具有实用价值^[6];纯二维(即二维地电断面和二维场源)的正反演已有较多的研究成果^[7],而且计算量不很大,但由于场源的三维性质,纯二维的正反演只是粗略的近似^[8]. 然而,随着电子和计算机技术的飞速发展,关于瞬变电磁的智能化先进仪器 SIROTEM、TEMS-3S、CUGTEM2000 等不断涌现,数据采集的质量不断提高,且已向浅层发展,开始用于工程与环境方面^[9],因而对瞬变电磁的资料解释水平也亟需提高. 因此,研究既能节省计算量(与三维相比)又能更好地与野外实际情况接近(与一维、纯二维相比)的 2.5 维问题(二维地电断面三维场源)已成为人们所关注的焦点.

2.5 维人工源时间域电磁场数值模拟(正演)问题是目前国际上尚未妥善解决的计算地球物理疑难问题之一. 对它的研究始于 20 世纪 70 年代中期,但直到 90 年代才为人们所重视. Leepin M^[10] 用有限差分法(FDM)求解了 2.5 维矩形电流回线的时间域电磁响应问题;Torres-Verdin 等^[11,12] 基于非均匀介质中电磁散射问题的局部非线性近似,用积分方程研究了频率域中垂直磁偶极源的 2.5 维正演,但积分方程法涉及到求张量格林函数和散射电流的褶积问题,只适用于模拟为数不多的局部异常体,否则计算量会成倍增加. Unsworth MJ 等^[13] 采用 X 方向布源的“挖源”总场(TM 模式)算法,实现了频率域电流偶极源电磁场的 2.5 维有限单元法模拟,当异常较小时,计算精度欠佳. Everett 等^[14] 和 Yu Liming^[15] 则在计算了洋中脊模型的电偶极源瞬变电磁响应时采用二次场算法,可避免上述问题. 另外还通过 G-S 变换^[16] 作逆拉氏变换,将复数计算化为纯实数计算,提高了计算速度. 我国从 20 世纪 80 年代开始着手研究 2.5 维电磁场的数值模拟^[17],目前已用二次场算法实现了二维地电构造上谐变电偶极子电磁场的有限单元算法^[18]、电偶源 CSAMT 法二维正演的有限单元算法^[19]、主剖面上时间域和频率域电偶源瞬变电磁场的 2.5 维有限单元正演模拟^[20-21],时间谱电阻率法的二维正演算法^[22],并对大粒度-时间级的电磁场数值模拟的微机并行计算^[1,23] 进行了

探讨. 这些算法有一定的计算精度,但在微机上实现,需要的时间仍然较长(用 80 × 25 的网格在 Celeron550, 128M 内存的微机上计算 1 个场源 16 个时间需 4 小时). Mitsuhashi Yuji^[24] 提出了一种描述电流偶极源的拟 delta 函数法来模拟 2.5 维问题的总场等参单元(isoparametric)有限单元算法,实现了地形不平的可控源电磁场模拟,并经数值试验证明了其代码的有效性. 但由于其对源的近似性,这种算法在场源附近的计算结果将变得不精确,无法实现近区场源的瞬变电磁响应计算. 鉴于现有 2.5 维电磁场的正演模拟计算量偏大,精度低,对生产实践中最常用的重叠回线和中心回线的研究较少,本文将研究中心回线瞬变电磁 2.5 维有限元正演模拟.

2 电磁场的偏微分方程定解

在三维分区均匀、各向同性介质中,电磁场满足麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{H}(t) = \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t} + \mathbf{E}(t) + \mathbf{J}_e(t), \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(t) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}(t)}{\partial t} + \mathbf{J}_m(t), \quad (2)$$

在介质分界面上满足衔接条件

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{E}^{(1)}(t) - \mathbf{E}^{(2)}(t)] = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}^{(1)}(t) - \mathbf{H}^{(2)}(t)] = 0, \quad (4)$$

式中, t 为时间, ϵ 和 μ 分别是介电常数、电导率和磁导率; \mathbf{n} 为分界面 Σ 的法线方向矢量; \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 为电场和磁场强度,其上标 1 和 2 分别标识分界面两侧介质中的电磁场; \mathbf{J}_e 为场源电流密度矢量, \mathbf{J}_m 为场源磁流密度矢量. 当场源分别为电流偶极子和磁偶极子时,不失一般性,假设场源位于笛卡尔坐标原点,则 \mathbf{J}_e 和 \mathbf{J}_m 可分别表示为

$$\mathbf{J}_e(t) = P_e(x)(y)(z)f_e(t), \quad (5)$$

$$\mathbf{J}_m(t) = -\mu_0 P_m(x)(y)(z)df_m(t)/dt, \quad (6)$$

式中, μ_0 为真空中的磁导率, (x) 、 (y) 和 (z) 为狄拉克源函数; $P_e = L \times I$ 为源的电流偶极矩; $P_m = S \times I$ 为源的磁偶极矩; L 为供电偶极距矢量; S 为供电回线面积矢量,指向回线面法线方向; I 为供电电流; $f_e(t)$ 和 $f_m(t)$ 分别为电性源和磁性源随时间 t 变化的波形函数,在时间域(瞬变)电磁场研究中,通常取为上阶跃函数

1) 孟永良. 电磁场数值模拟中微机并行计算研究(研究报告). 中国地质大学(武汉)信息工程学院, 1998

$$Hf_s(t) = f_m(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}, \quad (7)$$

根据电磁场本身的叠加原理,可导出相同条件下纯二次(电磁)场所满足的麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \times E_s(t) = -\mu \frac{\partial H_s(t)}{\partial t} + J_{ms}(t), & (8) \\ \nabla \times H_s(t) = \frac{\partial E_s(t)}{\partial t} + E_s(t) + J_{es}(t), & (9) \end{cases}$$

和介质分界面上的边界条件

$$\mathbf{n} \cdot [E_s^{(1)}(t) - E_s^{(2)}(t)] \Big| = 0, \quad (10)$$

$$\mathbf{n} \cdot [H_s^{(1)}(t) - H_s^{(2)}(t)] \Big| = 0, \quad (11)$$

式中, $H_s(t) = H(t) - H_p(t)$, (12)

$$E_s(t) = E(t) - E_p(t), \quad (13)$$

$$J_{es}(t) = \frac{\partial E_p(t)}{\partial t} + E_p(t) = E_p(t), \quad (14)$$

$$J_{ms}(t) = -\mu \frac{\partial H_p(t)}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

下标 p 和 s 分别代表一次场和二次场, $\mu = \mu_p - \mu_s$, $\epsilon = \epsilon_p - \epsilon_s$, 计算时忽略了 ϵ_p 和 μ_p 之间的差异,即认为 $\epsilon = 0$ 且 $\mu = 0$,只考虑电导率差异。从(8)~(9)式可以看出,纯二次电磁场的场源来自异常体(0)处,且仅与一次场有关,因此对于中心回线的瞬变响应的数值模拟,必须计算矩形回线源在均匀半空间中产生的一次场电磁场(见附录)。

为降维(消除时间变量 t),对电磁场作拉氏变换,将时间域问题变成拉氏变换(或称频率 s)域中的问题,然后考虑在 x 和 y 与坐标轴 z 无关的二维地电条件下,沿 z 轴对电磁场作傅氏变换,用 e, h 表示 (s, m) 域中的电场和磁场,并引入

$$u_p = e_{p,y}, v_p = -i h_{p,y}, u = e_{s,y}, v = -i h_{s,y},$$

$$k_p^2 = \mu_p s (\epsilon_p s + \sigma_p), k^2 = \mu s (\epsilon s + \sigma),$$

$$a_{1p} = \frac{\epsilon_p s + \sigma_p}{m^2 + k_p^2}, a_{2p} = \frac{m}{m^2 + k_p^2}, a_{3p} = \frac{-\mu_p s}{m^2 + k_p^2},$$

$$a_{4p} = (\epsilon_p s + \sigma_p), a_{5p} = -\mu_p s,$$

$$a_1 = \frac{s + \sigma}{m^2 + k^2}, a_2 = \frac{m}{m^2 + k^2}, a_3 = \frac{-\mu s}{m^2 + k^2},$$

$$a_4 = (\epsilon s + \sigma), a_5 = -\mu s, \quad (16)$$

$$\text{和 } b_1 = a_2 a_{2p}, b_2 = a_2 a_{3p} = a_3 a_{2p},$$

$$b_3 = a_3 a_{3p}, b_4 = \dots \quad (17)$$

式中 m 表示波数, k 为传播常数。利用矢量运算规则,可导出仅与 (s, m) 域中电场和磁场沿地电构造走向(y)分量有关的 u 和 v 的偏微分方程组:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial v}{\partial z} + b_1 \frac{\partial u_p}{\partial x} + b_2 \frac{\partial v_p}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[a_1 \frac{\partial u}{\partial z} - a_2 \frac{\partial v}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u_p}{\partial z} - b_2 \frac{\partial v_p}{\partial x} \right] = a_4 u + b_4 v_p, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[a_3 \frac{\partial v}{\partial x} - a_2 \frac{\partial u}{\partial z} + b_3 \frac{\partial v_p}{\partial x} - b_2 \frac{\partial u_p}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[a_3 \frac{\partial v}{\partial z} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_3 \frac{\partial v_p}{\partial z} + b_2 \frac{\partial u_p}{\partial x} \right] = a_5 v, \quad (19)$$

和在与构造走向垂直的 xoz 坐标平面上,无一次场场源的介质分界线两侧, u 和 v 满足的边值条件

$$(u^{(1)} - u^{(2)}) \Big| = 0, \quad (20)$$

$$(v^{(1)} - v^{(2)}) \Big| = 0, \quad (21)$$

$$a_1^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} - a_1^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} + \left[b_1^{(1)} \frac{\partial u_p^{(1)}}{\partial n} - b_1^{(2)} \frac{\partial u_p^{(2)}}{\partial n} \right] = \left[a_2^{(1)} - a_2^{(2)} \right] \frac{\partial v^{(2)}}{\partial n} + \left[b_2^{(1)} - b_2^{(2)} \right] \frac{\partial v_p^{(2)}}{\partial n}, \quad (22)$$

$$a_3^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial n} - a_3^{(2)} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial n} + \left[b_3^{(1)} \frac{\partial v_p^{(1)}}{\partial n} - b_3^{(2)} \frac{\partial v_p^{(2)}}{\partial n} \right] = - \left[a_2^{(1)} - a_2^{(2)} \right] \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} - \left[b_2^{(1)} - b_2^{(2)} \right] \frac{\partial u_p^{(2)}}{\partial n}, \quad (23)$$

式中,上标(1)和(2)分别标识分界线两侧的参数; \mathbf{n} 表示分界线的切线方向矢量。于是,电磁场的计算问题归结为求 (s, m) 域电磁场 y 分量定解问题(18)~(19)式的数值解。在算出 u 和 v 后,可借助于由(8)~(9)式导出的关系式

$$e_{s,x} = i \left[a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_3 \frac{\partial v}{\partial z} \right] + i \left[b_2 \frac{\partial u_p}{\partial x} + b_3 \frac{\partial v_p}{\partial z} \right], \quad (24)$$

$$e_{s,z} = i \left[a_2 \frac{\partial u}{\partial z} - a_3 \frac{\partial v}{\partial x} \right] + i \left[b_2 \frac{\partial u_p}{\partial z} - b_3 \frac{\partial v_p}{\partial x} \right], \quad (25)$$

$$h_{s,x} = a_1 \frac{\partial u}{\partial z} - a_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \left[b_1 \frac{\partial u_p}{\partial z} - b_2 \frac{\partial v_p}{\partial x} \right], \quad (26)$$

$$h_{s,z} = - \left[a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial v}{\partial z} \right] - \left[b_1 \frac{\partial u_p}{\partial x} + b_2 \frac{\partial v_p}{\partial z} \right], \quad (27)$$

计算 (s, m) 域中的其他电磁场分量,通常它们均不满足形如(20)和(21)式的连续性边值条件,故不能直接用有限元法求解。

对于给定的 s 和 m 值,(18)~(19)式定解问题是二维标量问题,且为纯实数运算。它的数值解法相对于求解原先的四维矢量问题要简单些。解题思路如下:分别对若干给定的拉氏和傅氏变换变量 s 和 m 值,在 (s, m) 域中计算出矩形回线源在空间中的一次电磁场的 u_p 和 v_p (见附录),然后用有限元法求解电磁场分量 u, v 及 $e_{s,x}, e_{s,z}, h_{s,x}$ 和 $h_{s,z}$ 的数值解。然后将其经逆拉氏变换和反傅氏变换,便可算出三维空间域中电磁场分量的瞬变响应。

3 (s, m) 域二次电磁场的泛函极值

用有限单元法求(18)~(19)式定解问题的数值解. 由边值条件(20)~(23)式,可导出在有限单元法算域(网格)外边界 G 满足第三类边值条件

$$\left[u + a_1 \frac{\partial u}{\partial n} + b_1 \frac{\partial u_p}{\partial n} \right]_G = \left[a_2 \frac{\partial v}{\partial z} + b_2 \frac{\partial v_p}{\partial z} \right]_G, \quad (28)$$

$$\left[v + a_3 \frac{\partial v}{\partial n} + b_3 \frac{\partial v_p}{\partial n} \right]_G = - \left[a_2 \frac{\partial u}{\partial z} + b_2 \frac{\partial u_p}{\partial z} \right]_G, \quad (29)$$

其中,系数“ u ”和“ v ”可近似认为是由在均匀半空间条件下由二次场源所产生的电磁场分量来计算

$$u = - \left\{ \left[a_1 \frac{\partial u}{\partial n} - a_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \left(b_1 \frac{\partial u_p}{\partial n} - b_2 \frac{\partial v_p}{\partial z} \right) \right] / u \right\}_G, \quad (30)$$

$$v = - \left\{ \left[a_3 \frac{\partial v}{\partial n} + a_2 \frac{\partial u}{\partial z} + \left(b_3 \frac{\partial v_p}{\partial n} + b_2 \frac{\partial u_p}{\partial z} \right) \right] / v \right\}_G. \quad (31)$$

由于二次场源来自地下异常体,计算相当复杂. 但考虑到二次场源本身比较小(和一次场相比),在外边界 G 上,其数值就更加微小(甚至可与计算机的截断误差相当),计算时可将其取为零. 可用逐次迭代修正办法进行计算,即第一次计算时设为零,待用有限元求出近似的 u 和 v 以后,再来计算“ u ”和“ v ”,第二次则在考虑边界条件的情况下再做一次有限元计算,即可求得较为精确的 u 和 v ,如此反复,直到满意为止. 本文在计算时将其取为零.

与偏微分方程边值问题(18)~(19)式等价的泛函极值问题为

$$2J(u, v) = \left\{ a_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + a_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + a_3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + a_3 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + a_4 u^2 + a_5 v^2 + 2a_2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - 2a_2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + 2b_1 \frac{\partial u_p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2b_1 \frac{\partial u_p}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + 2b_3 \frac{\partial v_p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2b_3 \frac{\partial v_p}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + 2b_4 u_p u + 2b_2 \frac{\partial v_p}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} - 2b_2 \frac{\partial v_p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + 2b_2 \frac{\partial u_p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - 2b_2 \frac{\partial u_p}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \right\}, \quad (32)$$

$$d \int_{\Omega} (v^2 + u^2) dl \Rightarrow \min,$$

式中, Ω 表示求解区(xoz 平面上的二维网格); G 表

示求解区外边界.

4 变分问题的有限元求解算法

为了减少计算量,对给定的水平地形二维断面(因目前无法直接计算地形不平时的一次场),设计了有限元网格(图1),它由程序根据用户所给定的网格参数自动生成,在总体上呈椭圆形(故称其为椭圆形三角网). 图中 x, z 为观测点坐标,数字表示节点编号, M 表示最末一个节点数(也就是节点总数), i 表示第 i 个节点编号, k 指某一圈的节点总数, 7 号节点和 8 号节点所连成的直线段是勘探剖面. 这样在移动测点时,网格剖分无需改变,因而仅需改变方程组的右端项. 然后,围绕这条剖面线,以一个一个的共中心点的椭圆环逐渐往外扩展,其间距也逐渐放大. 在每个椭圆环内,程序会自动将其剖分为若干个三角形单元. 节点的编号是由内到外的方式,这样有利于网格的自由伸展,而且每两层的最小编号总是错个位,这样可以保证所剖分的每个三角形,其三顶点编号的最大差就是一层的节点总数,有利于生成相对较小的带宽矩阵. 在实际的反演程序中,只显示用户所关心的地下电性断面的部分网格,其余均隐藏起来. 这样的网格和以往算法^[19]相比既能减少节点数和单元数,同时又能较为准确的模拟地下的电性断面.

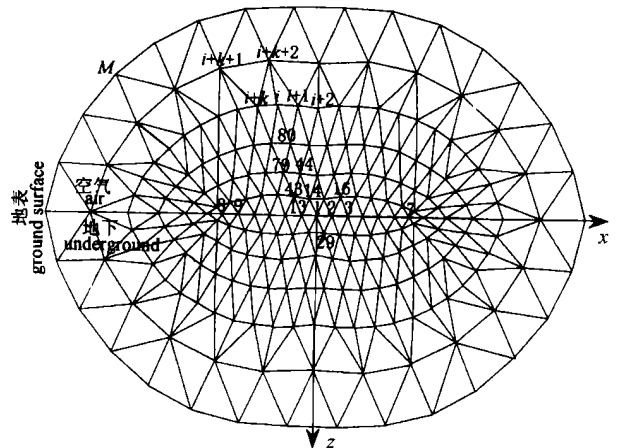


图1 二维有限单元网格剖分示意图

Fig. 1 The sketch map of 2-D FEM grid

更进一步可将泛函极值问题(32)离散化为线性方程组

$$AX = B, \quad (33)$$

式中, A 为 $P \times P$ 阶方阵(刚度矩阵), X 代表求解区内各矩形网格节点上电磁场分量 u 和 v (待确定的)

P 阶未知列矢量, B 代表各节点的二次场场源分布的 P 阶场源列矢量. 总刚度矩阵 A 是稀疏、带状、对称, 在实际计算时还发现 A 是不定矩阵, 而非正定矩阵. 孟永良等^[22] 认为刚度矩阵正定是错误的, 而 Leppin^[10] 和 Mitsuata^[24] 在求解同类问题时却没有提到刚度矩阵是否正定, 只提到用修正的 Cholesky 分解法来求解方程组. 众所周知, 正定矩阵具有很多优点, 他们没有利用正定矩阵的性质, 很有可能说明他们当时遇到的矩阵就不是正定的. 这点给线性方程组的求解带来了不少困难: 通常的 Cholesky 分解法(将 A 分解为 LL^T) 要求矩阵 A 为正定矩阵, 不能使用; 修正的 Cholesky 分解法(将 A 分解为 LDL^T) 可用于一般的对称矩阵, 但其分解的过程不稳定, 计算出的结果蹦蹦跳跳; 其他的方法(如迭代法等)也作了试算, 效果都不好, 要么时间特别长, 要么结果不稳定. 最后采用了结果相对稳定, 速度也较快的选主元 LU 分解法. 这样要完成一条剖面的计算, 对每个 (s, m) , 只需形成一次刚度矩阵, 做一次矩阵分解; 其他测点(即不同的场源位置) 只需改变右端项作回代, 计算速度相对较快.

5 空间电磁场分量瞬变响应的计算

用前一节算法对一系列给定的拉氏变量 s 和傅氏变量 m 计算 (s, m) 域中的二次电(磁)场分量 u 和 v , 然后, 根据(27)式求出 (s, m) 域相应的磁场垂直分量 $h_{s,z}$, 对其作逆拉氏变换和反傅氏变换获得时间空间域中的瞬变响应.

采用文献[21]的 GS 算法, 进行逆拉氏变换, 他的优点是纯实数运算, 并且只需对较少的 s 值(一般选 10~16 个)进行计算, 使每次逆拉氏变换的计算速度加快.

对于反傅氏变换算法, 考虑到位于主剖面上的回线场源所产生电磁场分量在空间域中相对于 y (在波数域中相对于 m) 具有奇或偶对称性, 反傅氏变换相应地简化为反余弦变换及反正弦变换. 特别是对与感应电动势相关的 h_z 来说, 它具有偶对称性, 应采用余弦变换; 且在回线中心的主剖面上, $y=0$, 积分中余弦项为 1, 因而只有被积核函数一项. (s, m) 域一次电磁场分量的积分表达式(见附录)中的 $\sin(mb)$, 对于给定的 m 和发射回线的半边长 b 而言是常量, 故可不参与有限元计算, 只在做反傅氏变换时乘上它. 于是对于 h_z 的反傅氏变换可写为

$$H_z(x, y, 0) = F^{-1} [h_z(x, m, z)]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^+ h_z(x, m, 0) \sin(mb) dm. \quad (34)$$

该式的积分属于高振荡函数的积分, 采用数字滤波算法^[31] 计算, 这种方法往往要求几十到上百个采样点, 计算量较大. 为了减少计算量, 只选择较少的十几个波数进行计算, 其他的采用三次样条插值的办法来获得. 那么, 如何选取合适的波数, 使得既节省计算量又能保证计算精度呢?

前人已经做了关于偶极源法波数选择的研究^[25], 认为是在 $r_1/10 \sim 10r_2$ 范围内按等比数列选用 k_m 个波数, 其中 r_1 为最小供电-测量电极距, r_2 为最大供电-测量电极距, 且有 $r_1 < r_2$. 按照这一结论, 对于中心回线观测方式和计算二次场而言, 波数的选取应依据异常体中心到观测点的距离 r (收发距), 而 r 又与发射回线的边长 b 有关; 在实际计算时还必须考虑计算机的截断误差所带来的影响, 从(16)式可以看出, 波数 m 总和传播常数 k 联系在一起, 从而选取的波数 m 应与 k 相当, 即不宜过大或过小. 实际上 k^2 与电磁场在空间 0 到 t 时刻传播的距离(趋肤深度)相对应, 自然也与 b (收发距)有关. 因此本文采用了让波数 m 随时间 t 滑动的选取方案, 即对每个时间, 波数 m 按如下原则选取

$$m_i = w_i k, \quad (35)$$

式中

$$w_i = \begin{cases} 10^{-10^{i_1} \times (\log(5/1)/q_1)}, & q_1 = 7 \sim 9, \\ i_1 = 0, 1, 2, \dots, q_1 - 1, \\ 10^{i_2 \times 2/q_2 - 1}, & q_2 = 5 \sim 7, \\ i_2 = 0, 1, 2, \dots, q_2 - 1, \\ 10^{10^{i_3} \times (\log(2/1)/q_3)}, & q_3 = 4 \sim 6, \\ i_3 = 0, 1, 2, \dots, q_3 - 1, \end{cases} \quad (36)$$

即在 $10^{-5} \sim 10^{-1}$ 之间, 其指数部分按对数分布 7~9 个点, 在 $10^{-1} \sim 10^1$ 之间, 其指数部分按线性分布 5~7 个点, $10^1 \sim 10^2$ 之间, 其指数部分按对数分布 4~6 个点. 这种选取方案使得波数在对数坐标系中中间密、两边疏, 且随时间的不同而各异, 更符合 (s, m) 域电磁场的变化规律(图 2), 有利于对其进行三次样条插值. 否则计算精度得不到保证. 下一节中给出的算例, 也说明了这种做法是必要的.

经逆拉氏变换和反傅氏变换后, 求得给定点的空间二次场分量的瞬变响应 $H_{s,z}(t)$. 最后根据

$$s(t) = -s_n \cdot \mu_0 H_{s,z}(t), \quad (37)$$

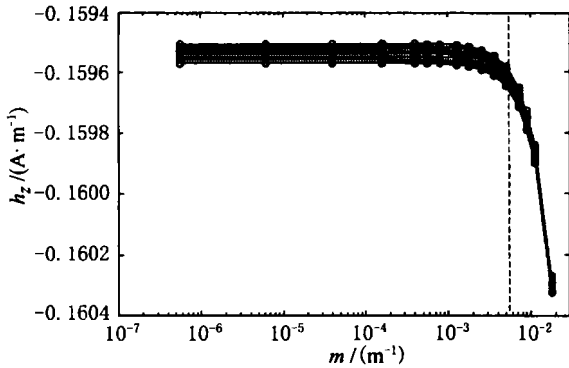


图2 (s, m) 域一次场 h_z 随波数 m 的变化曲线 ($t = 1\mu s$)
图中垂直的虚线与该时刻的传播常数 $k = \sqrt{\mu s (s +)}$ 对应
Fig.2 When $t = 1\mu s$, the primary field h_z changing with the wavenumber m in (s, m) domain

可计算二次场的感应电动势 $s(t)$, 式中 s_n 为接收线圈的等效面积, μ_0 为真空中的磁导率. 地面上一次电磁场的感应电动势 $p(t)$ 不难计算, 进而可算得地面上总场电磁场的感应电动势

$$(t) = p(t) + s(t). \quad (38)$$

6 算例

图3是对有解析解的H型层状大地的计算结果, 图中纵坐标 (V) 为归一化电位差, 模型选用的参数为:

$l_1 = 100 \text{ m}, h_1 = 100 \text{ m}, l_2 = 10 \text{ m}, h_2 = 150 \text{ m}, l_3 = 1000 \text{ m}$; 中心回线装置的发射回线边长

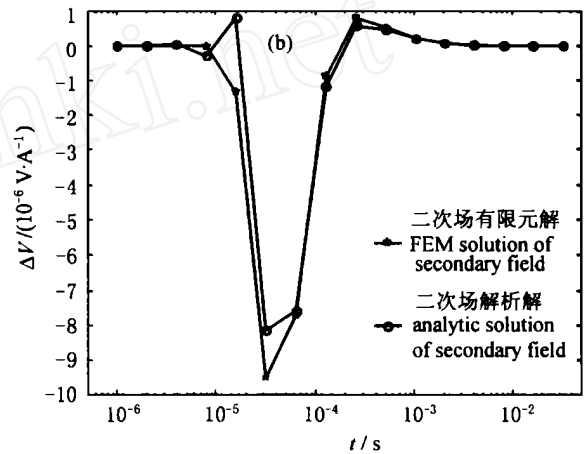
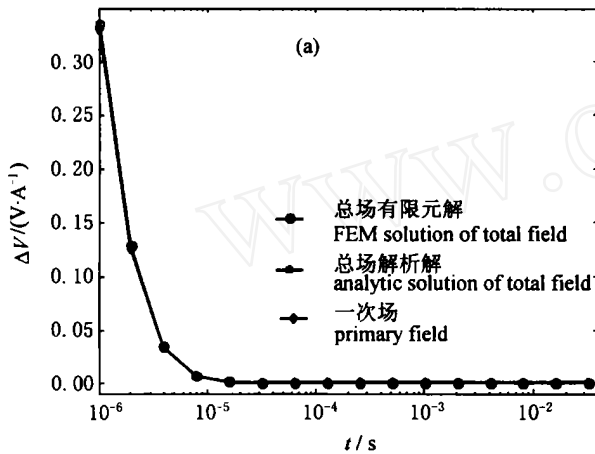


图3 H型三层大地上有限单元解与解析解对比
(a) 一次场、总场有限元解与总场解析解的对比; (b) 二次场有限元解和二次场的解析解对比.

Fig.3 Comparison of the FEM solution and analytical solution
On H type of three layered media

$2b = 50 \text{ m}$, 探头等效面积 $s_n = 43 \text{ m}^2$. 在 $16\mu s \sim 16 \text{ ms}$ 的平均相对误差为: 总场 1.7%, 二次场 13%. 从图中可以看出: 总场的有限元解与解析解重合得非常好, 纯异常(二次场)曲线形态完全相同, 重合得比较好.

图4为模拟均匀半空间中的直立薄板的FEM计算结果, 板厚 $d = 0.15 \text{ m}$, 上顶埋深 $h = 2.5 \text{ m}$, 板向下延伸 $L = 17.5 \text{ m}$, $l_1 = 100 \text{ m}, l_2 = 0.1 \text{ m}; 2b = 10 \text{ m}; s_n = 43 \text{ m}^2$; 测点距 $dx = 2 \text{ m}$. 图中 ρ_1, ρ_2 分别为围岩和直立薄板的电阻率. 在图上可见有明显的双峰异常, 与物理模拟结果一致^[26]. 这从另一个角度说明研究2.5维正反演的重要性, 因为对于直立薄板的双峰异常, 任何一维正反演解释都会显得无能为力.

给出的算例表明, 有限元解的总场和二次场在

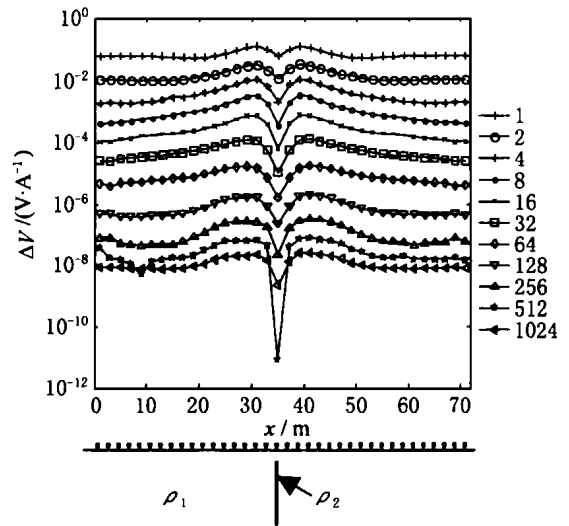


图4 直立薄板的多测道剖面图
图例中各数值为各采样道的时间, 单位为 μs .

Fig.4. Multi-channel profile of vertical laminate

目前的勘探深度范围(几十米至几百米)所对应的可观测时间段(10 μ s ~ 10ms)内有较好计算精度,总场的平均误差 < 5 %,二次场的平均误差 < 20 %。

7 结 语

本文采用三角形网格代替传统的 n_{ij} 矩形网格算法,导出了中心回线瞬变电磁 2.5 维二次场(纯异常)的有限单元计算公式。从根本上解决了既可减少有限元节点数和单元数,使方程组的阶数降低,因而提高计算速度,同时又能很好地拟合地下电性断面,提高计算精度的目的;算法指出其刚度矩阵是不正定的,不能用 Cholesky 分解法来求解方程组,文中采用选主元的 LU 分解法来求解方程组,做到了在移动场源时,只需改变右端项(即只需计算一次场),增加一个测点只需增加一次回代,从而提高了计算速度;采用了让波数 m 随时间 t 滑动(根据每个时间 t 所对应的主要拉氏频率 s ,选取不同波数)的选取方案,从而大大提高了计算精度。给出的算例表明:该算法直接计算异常场,计算速度快、精度高,实现了仅使用 1057 个节点,2070 个单元,用 P 733, 128M 内存,175min(其中一次场计算占 50 % 以上)完成一条 9 个测点的剖面,15 个 t 时间的 2.5 维正演计算。

附录 拉氏傅氏变换 (s, m) 域中矩形回线源一次电磁场的积分表达式

矩形回线源的一次电磁场,可看成回线内无数微小的垂直磁偶极源 dm 产生的一次电磁场的积分。

基于这种思想,可导出 (s, m) 域中一次电磁场的积分表达式

$$e_x^0 = imG_e \int_0^+ \frac{e^{-u_0 z}}{(u_0 + u_1)n} \sin(na) \cos(nx) dn, \quad (A1)$$

$$e_y^0 = -G_e \int_0^+ \frac{e^{-u_0 z}}{(u_0 + u_1)n} \sin(na) \sin(nx) dn, \quad (A2)$$

$$h_x^0 = -G_h \int_0^+ \frac{u_0 e^{-u_0 z}}{(u_0 + u_1)n} \sin(na) \sin(nx) dn, \quad (A3)$$

$$h_y^0 = -imG_h \int_0^+ \frac{u_0 e^{-u_0 z}}{(u_0 + u_1)n} \sin(na) \cos(nx) dn, \quad (A4)$$

$$h_z^0 = G_h \int_0^+ \frac{(m^2 + n^2) e^{-u_0 z}}{(u_0 + u_1)n} \sin(na) \cos(nx) dn, \quad (A5)$$

$$e_x^1 = imG_e \int_0^+ \frac{e^{-u_1 z}}{(u_0 + u_1)n} \sin(na) \cos(nx) dn, \quad (A6)$$

$$e_y^1 = -G_e \int_0^+ \frac{e^{-u_1 z}}{(u_0 + u_1)n} \sin(na) \sin(nx) dn, \quad (A7)$$

$$h_x^1 = G_h \int_0^+ \frac{u_1 e^{-u_1 z}}{(u_0 + u_1)n} \sin(na) \sin(nx) dn, \quad (A8)$$

$$h_y^1 = imG_h \int_0^+ \frac{u_1 e^{-u_1 z}}{(u_0 + u_1)n} \sin(na) \cos(nx) dn, \quad (A9)$$

$$h_z^1 = G_h \int_0^+ \frac{(m^2 + n^2) e^{-u_1 z}}{(u_0 + u_1)n} \sin(na) \cos(nx) dn, \quad (A10)$$

$$\text{式中, } G_e = \sqrt{\frac{2}{\mu_0}} \cdot \frac{2\mu_0 I \sin(mb)}{m},$$

$$G_h = \sqrt{\frac{2}{\mu_0}} \cdot \frac{2\mu_0 I \sin(mb)}{\mu_0 s m} = \frac{G_e}{\mu_0 s},$$

$$u_0 = \sqrt{m^2 + n^2 - k_0^2}, u_1 = \sqrt{m^2 + n^2 - k_1^2},$$

$$k_0^2 = -\mu_0 s(s + s_0), k_1^2 = -\mu_0 s(s + s_1);$$

$e_x^0, e_y^0, h_x^0, h_y^0, h_z^0, e_x^1, e_y^1, h_x^1, h_y^1, h_z^1$ 分别为 (s, m) 域中的一次电磁场在 x, y, z 各方向的分量, e 代表电场, h 代表磁场,上标 0 代表空气, 1 代表大地; $2a, 2b$ 为矩形回线的长宽, m, n 分别为 y 和 x 方向的波数。计算时, μ 取真空中的磁导率 μ_0, ϵ 也取真空中的介电常数 ϵ_0 。

参考文献

- [1] 米萨克 N 纳比吉安主编. 勘查地球物理电磁法(第一卷:理论). 赵经祥, 王艳君译. 北京:地质出版社, 1992
Nabighian N Misac. Electromagnetic Methods in Applied Geophysics (Volume 1) (in Chinese). ZHAO Jingxiang WANG Yanjun Trans. Beijing: Geological Publishing House, 1992
- [2] 蒋邦远. 实用近区磁源瞬变电磁法勘探. 北京:地质出版社, 1998
JIANG Bangyuan. Applied Near Zone Magnetic Source Transient Electromagnetic Exploration (in Chinese). Beijing: Geological Publishing House, 1998
- [3] 朴化荣. 电磁测深法原理. 北京:地质出版社, 1990
PIAO Huarong. Principle of Electromagnetic Sounding Method (in Chinese). Beijing: Geological Publishing House, 1990
- [4] Nabighian M N. Electromagnetic Methods in Applied Geophysics, Vol. 2., Application. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 1991
- [5] Pirttijarvi, Markku, Verma, et al. Inversion of transient electromagnetic profile data using conductive finite plate model. *Journal of Applied Geophysics*, 1998, **38**: 181 ~ 194
- [6] Zhdanov M. Wannamaker P (Editors in chief). Three-Dimensional Electromagnetics-the Second International Symposium on Three-Dimensional Electromagnetics, Salt Lake City, Utah, USA, 1999. 26 ~ 29
- [7] 史明娟. 瞬变电磁二、三维正演理论的发展. 国外地质勘查技术, 1996, (2): 1 ~ 4
SHI Mingjuan. The developing of the forward theory for 2-D and 3-D transient electromagnetic. *Foreign Geoeexploration Technology* (in Chinese), 1996, (2): 1 ~ 4
- [8] 吕国印. 瞬变电磁法二维逆时电磁偏移. 物探与化探, 1998, **22**(2): 139 ~ 142
LV Guoyin. Two-dimensional reverse-time electromagnetic migration for transient electromagnetic method. *Geophysical and Geochemical Exploration* (in Chinese), 1998, **22**(2): 139 ~ 142
- [9] 林君. 电磁探测技术在工程与环境中的应用现状. 物探与化

- 探, 2000, 24(2)
- LIN Jun. Trend of electromagnetic instrumentation for engineering and environment. *Geophysical and Geochemical Exploration* (in Chinese), 2000, 24(2): 139 ~ 142
- [10] Leppin M. Electromagnetic modeling of 3-D sources over 2-D inhomogeneities in the time domain. *Geophysics*, 1992, 57: 994 ~ 1003
- [11] Torres-Verdin C, Habashy T M. Rapid 2.5-dimensional forward modeling and inversion via a new nonlinear scattering approximation. *Radio Science*, 1994, 29(4): 1051 ~ 1079
- [12] Habashy T M, Groom R W, Spies B R. Beyond the Born and Rytov approximations: A nonlinear approach to electromagnetic scattering. *J. Geophys. Res.*, 1993, 98(B2): 1759 ~ 1775
- [13] Unsworth M J, Traves B J, Chave A D. Electromagnetic induction by a finite electric dipole source over a 2-D earth. *Geophysics*, 1993, 58: 198 ~ 214
- [14] Everett M E, Edwards R N. Transient marine electromagnetics: the 2.5-D forward problem. *Geophys. J. Int.*, 1993, 113: 545 ~ 561
- [15] Yu L M. Computation of the electrical responses of mid-ocean ridged structures [Ph. D. thesis]. Toronto: University of Toronto, 1994
- [16] Knight J H, Raiche A P. Transient electromagnetic calculation using the Gaver-Stehfest inverse Laplace transform method. *Geophysics*, 1982, 47(1): 47 ~ 50
- [17] 曾繁京. 二维地电构造上水平电偶源电磁场的有限单元算法 [硕士论文]. 武汉: 中国地质大学, 1988
- ZENG Fanjing. Finite element method for solving electromagnetic field with horizontal dipolar source on two-dimensional geoelectric model [Master Thesis] (In Chinese), Wuhan: China University of Geosciences, 1988
- [18] 孟永良, 罗延钟. 二维地电构造上谐变电偶极子电磁场的有限单元算法. 中国地球物理学会年刊 1994. 北京: 地震出版社, 1994, 281
- MENG Yongliang, LUO Yanzhong. Finite element method for solving electromagnetic field with harmonic dipolar source on two-dimensional geoelectric model. Annual of The Chinese Geophysical Society (in Chinese), 1994. Beijing: Seismological Press, 1994, 281
- [19] 孟永良, 罗延钟. 电偶源 CSAMT 法二维正演的有限单元算法. 见: 罗延钟等主编, 勘查地球物理勘查地球化学文集, 第 20 集, 北京: 地质出版社, 1996, 103 ~ 114
- MENG Yongliang, LUO Yanzhong. Two-dimensional direct finite-element algorithm of electrical dipolar source CSAMT method. In: LUO Yanzhong ed. Contributions To The Exploration Geophysics and Geochemistry (in Chinese), 20, Beijing: Geological Publishing House, 1996, 103 ~ 114
- [20] Meng Y L, Li W D, Zhdanov M, et al. 2.5-D electromagnetic forward modeling in the time and frequency domains using the finite element method. SEG '69 Annual Meeting Expanded Abstracts, Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 1999. 1 ~ 7
- [21] 罗延钟, 昌彦君. GS 变换的快速算法. 地球物理学报, 2000, 43(5): 684 ~ 690
- LUO Yanzhong, CHANG Yanjun. A rapid algorithm for GS transform. *Chinese J. Geophys.*, 2000, 43(5): 684 ~ 690
- [22] 孟永良, 罗延钟, 昌彦君. 时间谱电阻率法的二维正演算法. 地球科学, 2000, 25(6): 656 ~ 662
- MENG Yongliang, LUO Yanzhong, CHANG Yanjun. 2-dimensional forward algorithm for time spectral resistivity. *Earth Science* (in Chinese), 2000, 25(6): 656 ~ 662
- [23] 陈金窗, 戴光明. 微机网络并行计算及 2.5 维 CSAMT 正演的并行实现. 物探化探计算技术, 1997, 19(2): 103 ~ 107
- CHEN Jinchuang, DAI Guangming. Micro-computer networked computing and 2.5-D CSAMT forward parallel computing. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration* (in Chinese), 1997, 19(2): 103 ~ 107
- [24] Mitsuhashi Y J. 2-D electromagnetic modeling by finite-element method with a dipole source and topography. *Geophysics*, 2000, 65: 465 ~ 475
- [25] 罗延钟, 孟永良. 关于用有限单元法对二维构造作电阻率法模拟的几个问题. 地球物理学报, 1986, 29: 613 ~ 621
- LUO Yanzhong, MENG Yongliang. Some problems on two-dimensional finite element method for resistivity method modeling. *Chinese J. Geophys. (Acta Geophysica Sinica)*, 1986, 29: 613 ~ 621
- [26] 牛之琰. 时间域电磁法原理. 长沙: 中南工业大学出版社, 1992
- NIU Zhilian. The Theory of Time-Domain Electromagnetic Methods (in Chinese). Changsha: Central South University of Technology Press, 1992