第27卷 第1期 应 用 力 学 学 报 Vol.27 No.1
2010年3月 CHINESE JOURNAL OF APPLIED MECHANICS Mar.2010
文章编号：1000- 4939（2010）01-0080-06

RLC 串联电路与微梁耦合系统 1:2 内共振分析

杨志安[1] 贾尚帅[2]

(唐山学院 063000 唐山)[1] （天津大学 300072 天津)[2]

摘要：研究电阻电感电容串联电路与微梁耦合系统的非线性振动,应用拉格朗日-麦克斯韦方程，建立受静电激励RLC串联电路与微梁耦合系统的数学模型。根据非线性振动的多尺度法，得到了在内共振 $\omega_2 \approx 2\omega_1$ 的情况下的近似解，并进行数值计算，得到用椭圆函数表示的解析解。计算结果表明，在无阻尼情况下，振动和能量在两个态间相互转换，没有能量损失。

关键词：RLC串联电路；微梁；耦合；多尺度法；非线性振动

中图分类号：O321 **文献标识码**：A

1 引言

机电耦联系统广泛存在于工农业生产和科学技术领域，在国民经济发展中占有重要地位[1]。关于微电子机械系统的研究已经有许多成果[2-10]。文献[2]研究了电容器和弹簧串联时极板的振动；文献[3]用拉格朗日方程分析了RLC电路的暂态过程；文献[4]研究了具有spurious energisation特征电路的非线性振动；文献[5]研究了RLC电路弹簧耦合系统的非线性振动，应用拉格朗日-麦克斯韦方程建立了一个受到简谐激励的RLC电路弹簧耦合系统的数学模型，得到了受简谐激励的Mathieu方程的级数形式解；文献[6]应用拉格朗日-麦克斯韦方程建立受简谐激励的具有电阻和电感非线性RLC电路的数学模型，根据非线性振动的多尺度法得到系统满足主共振条件的一次近似解及对应的定常解。但是这些研究都是针对单自由度系统，建立的模型必然是单自由度模型，仅适用于纯电路系统。微电子机械系统常作为传感器使用在悬臂梁、简支梁等结构上。文献[7]用多尺度法研究了一个双自由度的机电耦联系统，系统中各元器件都呈线性，电路系统与机械系统的固有频率满足1：2的比例关系，发现在内共振 $\omega_2 \approx 2\omega_1$ 情况下，系统两个模态的能量由低阶向高阶转移，微小的扰动就会破坏其稳定性；文献[8]根据相同的模型发现在双重共振 $\omega_2 \approx 2\omega_1$ 和 $\Omega \approx \omega_2$ 的情况下，系统出现了饱和现象，当外激励超过一个定值时，电极板的振动不再发生。静电驱动是微机械传感器、执行器的一种重要驱动方式，它将电信号转化为机械驱动力，或将电场力转化为机械能；文献[9]研究了微悬臂梁受温度影响时的动力学现象；文献[10]采用多尺度法研究了共振微梁在电场中非线性振动问题。

在已有微梁的研究中，学者们只采用了简单的静电驱动电路，并且在微梁电路中，只考虑存在的电场力与结构变形的简单耦合。本文在考虑微梁刚度非线性特性的情况下，研究系统在内共振 $\omega_2 \approx 2\omega_1$ 时特有的动力学现象。

基金项目：河北省自然科学基金(A2009000997) **来稿日期**：2008-12-10 **修回日期**：2009-06-02
第一作者简介：杨志安，男，1963年生，博士，唐山学院结构与振动工程实验室，教授；研究方向——机电系统动力学。
E-mail: yangzhian@eyou.com

2　电阻电感电容串联电路与微梁耦合静电力非线性系统

电阻电感电容串联电路与微梁耦合系统如图 1 所示。其中：电容的极板长为l、宽为b、厚为h；两个极板的间距为d；电容极板与电阻R和电感L串接；在重力、弹性力、阻尼力、电场力的作用下，电容的上极板可以沿z轴方向作横向振动。

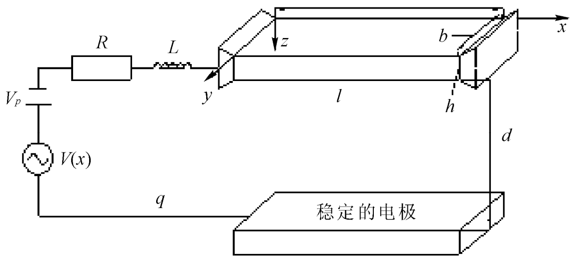

图 1　静电驱动微梁的耦合模型

系统存在两个广义变量，即电容器上极板的横向位移w和电路中的电流$\dot{q}$。系统的动能T、磁能W_m、势能U、电场能W_e、耗散函数F_e及非保守广义力E和F分别为

$$T=\frac{1}{2}\rho bh\int_0^l(\frac{\partial w}{\partial t})^2\mathrm{d}x,$$

$$W_m=\frac{1}{2}L\dot{q}^2,$$

$$U=\frac{EI}{2\left(1-\nu^2\right)}\int_0^l(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\hat{N}\int_0^l(\frac{\partial w}{\partial x})^2\mathrm{d}x+\frac{EA}{8l\left(1-\nu^2\right)}[\int_0^l(\frac{\partial w}{\partial x})^2\mathrm{d}x]^2,$$

$$W_e=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{d-w}{b}\cdot q^2\mathrm{d}x,$$

$$F_e=\frac{1}{2}R\dot{q}^2+\frac{1}{2}\int_0^l\hat{c}\cdot(\frac{\partial w}{\partial t})^2\mathrm{d}x,$$

$$E=v_p+v(t),\quad F=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r b\left(v_p+v(t)\right)^2}{2\left(d-w\right)^2}$$

根据拉格朗日-麦克斯韦方程[11]，可得到该系统的运动微分方程为

$$L\cdot\ddot{q}+R\cdot\dot{q}+\int_0^l\frac{d-w}{b\varepsilon_0}\mathrm{d}x\cdot q=v_p+v(t),$$

$$\rho bh\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{EI}{1-\nu^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-[\frac{EA}{2l\left(1-\nu^2\right)}\int_0^l(\frac{\partial w}{\partial x})^2\mathrm{d}x+\hat{N}]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\hat{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{1}{26}q^2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r b\left(v_p+v(t)\right)^2}{2\left(d-w\right)^2}\tag{1}$$

当电场力和周期激励均为零时，对于两端简支约束的微梁进行伽辽金截断，通常取梁的一阶模态。这样既满足精度要求又可避免计算的复杂性，将满足内力和位移边界条件的解取为[12-13]

$$w(x,t)=w_0(t)\sin\frac{\pi}{l}x\tag{2}$$

采用伽辽金方法，将式（1）中第二式转化常微分方程，并进行量纲一化得到

$$\ddot{\phi}(\tau)+\frac{D_1}{\omega}\dot{\phi}(\tau)+\phi(\tau)+\frac{D_3 d^2}{\omega^2}\phi^3(\tau)+\frac{D_5}{\omega^2 d}q^2=0\tag{3}$$

式中

$$\tau=\omega t,\quad \xi=\pi x/l,\quad \phi=w_0/d,$$

$$\omega^2=D_2,\quad D_1=\hat{c}/\rho A,\quad A=bh,$$

$$D_3=\frac{\frac{EA}{2l\left(1-\nu^2\right)}(\frac{\pi}{l})^4\int_0^l(\cos\frac{\pi}{l}x)^2\mathrm{d}x\iint_A\sin^2\frac{\pi}{l}x\mathrm{d}A}{\rho A\iint_A\sin^2\frac{\pi}{l}x\mathrm{d}A},$$

$$D_2=\frac{\frac{EI}{1-\nu^2}(\frac{\pi}{l})^4\iint_A\sin^2\frac{\pi}{l}x\mathrm{d}A+\hat{N}(\frac{\pi}{l})^2\iint_A\sin^2\frac{\pi}{l}x\mathrm{d}A}{\rho A\iint_A\sin^2\frac{\pi}{l}x\mathrm{d}A}$$

并且将电路方程与极板的振动方程统一时间尺度，可得

$$\ddot{q}(\tau)+\frac{dl}{b\varepsilon_0 L\omega^2}q+\frac{R}{L\omega}\dot{q}(\tau)-\frac{2dl}{\pi bL\varepsilon_0\omega^2}\phi q=0\tag{4}$$

进一步，可得

$$\ddot{u}_1+\omega_1^2u_1+\mu_1\dot{u}_1+k_1u_1u_2=0\,,$$

$$\ddot{u}_2+\omega_2^2u_2+\mu_2\dot{u}_2+k_3u_2^3+k_2u_1^2=0 \qquad (5)$$

式中：$q=u_1$，$\phi=u_2$，$\omega_1^2=dl/b\varepsilon_0L\omega^2$，$\omega_2^2=1$，$\mu_1=R/L\omega$，$\mu_2=D_1/\omega$，$k_1=-2dl/\pi bL\varepsilon_0\omega^2$，$k_2=D_5/\omega^2d$，$k_3=D_3d^2/\omega^2$，$D_5=-2/\pi\rho Ab\varepsilon_0$

3 共振理论分析与数值计算

调节机械系统的固有频率和电路系统固有频率成2:1内共振关系。由$\omega_2\approx2\omega_1$可推得二者满足关系

$$\omega_2=2\omega_1+\varepsilon\sigma_1 \qquad (6)$$

非线性振动理论中的多尺度法[14]原理是引入一系列越来越慢的时间尺度，并视这些时间尺度为独立变量。对于式（5）中的两个方程，尽管机械方程进行了量纲一化而电路方程没有进行量纲一化，但是两个方程在时间尺度上是统一的。因此可以采用非线性振动的多尺度法求系统的一次近似解，将式（5）中的非线性项、阻尼项和耦合项前面冠以小参数ε，并定义u_1和u_2为

$$u_1=u_{11}(T_0,T_1)+\varepsilon u_{12}(T_0,T_1)\,,$$

$$u_2=u_{21}(T_0,T_1)+\varepsilon u_{22}(T_0,T_1) \qquad (7)$$

式中：$T_0=t$；$T_1=\varepsilon t$；ε为小参数。

将式（7）代入式（5），比较ε的系数后可得

$$D_0^2u_{11}+\omega_1^2u_{11}=0\,,$$

$$D_0^2u_{21}+\omega_2^2u_{21}=0 \qquad (8)$$

$$D_0^2u_{12}+\omega_1^2u_{12}=-2D_0D_1u_{11}-\mu_1D_0u_{11}-k_1u_{11}u_{21},$$

$$D_0^2u_{22}+\omega_2^2u_{22}=-2D_0D_1u_{21}-\mu_2D_0u_{21}-k_3u_{21}^3-k_2u_{11}^2 \qquad (9)$$

式（8）的解为

$$u_{11}=A_1e^{j\omega_1T_0}+cc\,,\quad u_{21}=A_2e^{j\omega_2T_0}+cc \qquad (10)$$

将式（10）代入式（9）可得消除永年项条件

$$2j\omega_1D_1A_1+j\omega_1\mu_1A_1+k_1\bar{A}_1A_2e^{j\sigma_1T_1}=0\,,$$

$$2j\omega_2D_1A_2+j\omega_2\mu_2A_2+3k_3A_2^2\bar{A}_2+k_2A_1^2e^{-j\sigma_1T_1}=0 \qquad (11)$$

设：$A_1=\frac{1}{2}a_1e^{j\theta_1}$；$A_2=\frac{1}{2}a_2e^{j\theta_2}$（其中$a_n$、$\theta_n$为实数），代入式（11），并进行实虚部分离，可得到

$$a_1'=-\frac{1}{2}\mu_1a_1-\frac{1}{4}\omega_1^{-1}k_1a_1a_2\sin\gamma_1\,,$$

$$a_2'=-\frac{1}{2}\mu_2a_2+\frac{1}{4}\omega_2^{-1}k_2a_1^2\sin\gamma_1\,,$$

$$a_1\theta_1'=\frac{1}{4}\omega_1^{-1}k_1a_1a_2\cos\gamma_1\,,$$

$$a_2\theta_2'=\frac{3}{8}\omega_2^{-1}k_3a_2^3+\frac{1}{4}\omega_2^{-1}k_2a_1^2\cos\gamma_1 \qquad (12)$$

式中：$\gamma_1=\theta_2-2\theta_1+\sigma_1T_1$；“$'$”表示关于时间尺度$T_1$求导数。因此可得

$$a_1'=-\frac{1}{2}\mu_1a_1-\frac{1}{4}\omega_1^{-1}k_1a_1a_2\sin\gamma_1\,,$$

$$a_2'=-\frac{1}{2}\mu_2a_2+\frac{1}{4}\omega_2^{-1}k_2a_1^2\sin\gamma_1\,,$$

$$\gamma_1'=\frac{3}{8}\omega_2^{-1}k_3a_2^2+\frac{1}{4}\omega_2^{-1}k_2a_1^2a_2^{-1}\cos\gamma_1-\frac{1}{2}\omega_1^{-1}k_1a_2\cos\gamma_1+\sigma_1 \qquad (13)$$

将式（13）中的γ_1消掉，可得

$$a_1^2+\frac{\mu_2\omega_2k_1}{\mu_1\omega_1k_2}a_2^2=0 \qquad (14)$$

由式（14）可以看出，如果k_1和k_2符号相反，a_1和a_2将会发生自激振动，无论哪一个模态先发生振动，都会激起另一个模态的振动，并且两个模态振动的振幅同比增长。本例中，很显然k_1和k_2同号，则a_1和a_2都有界，且幅值被另一个模态控制。

本例中k_1和k_2同号，考虑特例$\mu_1=\mu_2=0$的情况，式（13）的精确解可借助椭圆函数表示，则由式（13）可得

$$a_1 a_1^{'} + a_2 a_2^{'} \upsilon = 0 \tag{15}$$

式中 $\upsilon = \dfrac{k_1 \omega_2}{k_2 \omega_1}$。

由此得到

$$a_1^2 + a_2^2 \upsilon = E \tag{16}$$

其中 E 是积分常数，它正比于系统中的初始能量。如果 k_1 和 k_2 同号，上式表明 a_1 和 a_2 总是有界的，则

$$\frac{\gamma_1^{'}}{a_2^{'}} = \frac{\frac{3}{8}\omega_2^{-1} k_3 a_2^2 + \frac{1}{4}\omega_2^{-1} k_2 a_1^2 a_2^{-1} \cos\gamma_1 - \frac{1}{2}\omega_1^{-1} k_1 a_2 \cos\gamma_1 + \sigma_1}{\frac{1}{4}\omega_2^{-1} k_2 a_1^2 \sin\gamma_1} \tag{17}$$

或

$$a_1^2 a_2 \sin\gamma_1 \frac{D\gamma_1}{Da_2} = \frac{4\sigma_1 a_2 \omega_2}{k_2} + (a_1^2 - 2\upsilon a_2^2)\cos\gamma_1 + \frac{3}{2}\frac{k_3}{k_2} a_2^3 \tag{18}$$

$$D(a_1^2 a_2 \cos\gamma_1) = -2\sigma_1 \omega_2 k_2^{-1} D a_2^2 - \frac{3}{8} k_3 k_2^{-1} a_2^4 \tag{19}$$

由此可得

$$a_1^2 a_2 \cos\gamma_1 + 2\sigma_1 \omega_2 k_2^{-1} a_2^2 + \frac{3}{8} k_3 k_2^{-1} a_2^4 = L \tag{20}$$

令 $a_1^2 = E\xi$，则由 $\upsilon a_2^2 = E(1-\xi)$ 消去 γ_1，得

$$a_1^4 a_2^2 = (L - 2\sigma_1\omega_2 k_2^{-1} a_2^2 - \frac{3}{8} k_3 k_2^{-1} a_2^4)^2 + 16 a_1^2 \omega_1^2 a_1'^2 k_1^{-2} \tag{21}$$

$$\frac{4\upsilon\omega_1^2}{Ek_1^2}(\frac{D\xi}{DT_1})^2 = \xi^2(1-\xi)\frac{\upsilon}{E^3}[L - 2\sigma_1\omega_2 k_2^{-1}\upsilon^{-1}(1-\xi) - \frac{3}{8}k_3 k_2^{-1}\upsilon^{-1}(1-\xi)^2]^2 = F^2(\xi) - G^2(\xi) \tag{22}$$

式中

$F = \pm\xi\sqrt{1-\xi}$，

$G = \pm\sqrt{\dfrac{\upsilon}{E^3}}[L - 2\sigma_1\omega_2 k_2^{-1}\upsilon^{-1}(1-\xi) - \dfrac{3}{8}k_3 k_2^{-1}\upsilon^{-1}(1-\xi)^2]$

函数 F 和 G 的曲线如图 2 所示：两曲线的交点可以是两个，如上支曲线；也可能有三个交点，对应三个根，如下支曲线；$\xi_1 \le \xi_2 \le \xi_3$；由于 $\xi = a_1^2 / E$，所以 ξ 取 ξ_2、ξ_3 之间的正值，ξ 是 ξ_2、ξ_3 之间的周期运动，可以表示为 Jacobi 椭圆函数。

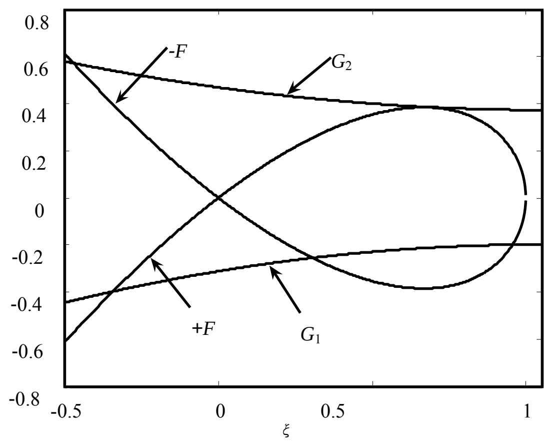

图 2　函数 F 和 G 曲线图

则式（22）可写为

$$\frac{4\upsilon\omega_1^2}{Ek_1^2}(\frac{D\xi}{DT_1})^2 = (\xi_3 - \xi)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_1) \tag{23}$$

令

$$\xi_3 - \xi = (\xi_3 - \xi_2)\sin^2\chi \tag{24}$$

则

$$\frac{4\omega_1}{k_1}\sqrt{\frac{\upsilon}{E}}\frac{D\chi}{DT_1} = \pm\sqrt{(\xi_3 - \xi_1)(1 - \eta^2 \sin^2\chi)} \tag{25}$$

式中

$$\eta = \sqrt{\frac{\xi_3 - \xi_2}{\xi_3 - \xi_1}},$$

$$\sqrt{\xi_3-\xi_1}\,\frac{k_1\sqrt{E}}{4\omega_1\sqrt{\upsilon}}DT_1=\frac{D\chi}{\sqrt{1-\eta^2\sin^2\chi}} \tag{26}$$

代入$T_1=\varepsilon t$得到

$$\frac{D\chi}{\sqrt{1-\eta^2\sin^2\chi}}=\frac{\varepsilon k_1}{4\omega_1}\sqrt{\frac{(\xi_3-\xi_1)E}{\upsilon}}Dt \tag{27}$$

或

$$\sin\chi=\mathrm{sn}[\kappa(t-t_0);\eta] \tag{28}$$

由此可得

$$\xi=\xi_3-(\xi_3-\xi_2)\mathrm{sn}^2[\kappa(t-t_0);\eta] \tag{29}$$

上式表明：在没有阻尼的内共振并且ξ_n均不相同（G_1位置）的情况下，振动在两种模态下持续转换，没有能量损失；当一个模态的能量减小时，另一个模态的能量增大。图 3、图 4 分别为关于a_1、a_2的时间响应曲线。图 3 对应的初始值为

$a_1(0)=0.0000001$，$a_2(0)=0.001$；

$a_1(0)=0.0000002$，$a_2(0)=0.001$

如果考虑阻尼，则振动的能量逐渐衰减直到消失殆尽，如图 5 和图 6 所示，对应的初始值分别为

$a_1(0)=0.0000002$，$a_2(0)=0.001$；

$a_1(0)=0.0000005$，$a_2(0)=0.001$

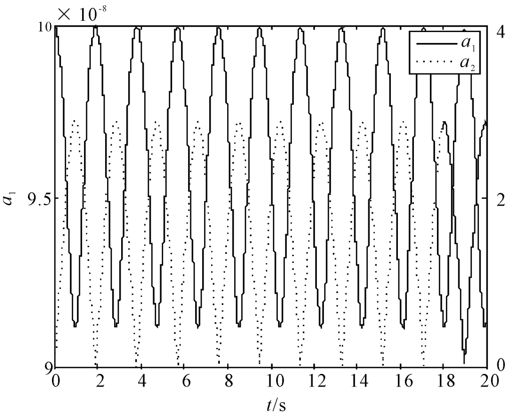

图 3 时间响应曲线

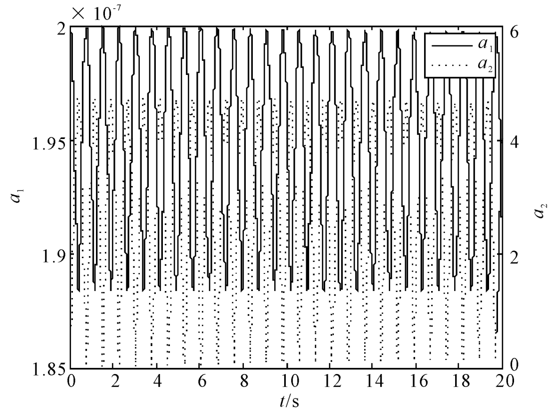

图 4 时间响应曲线

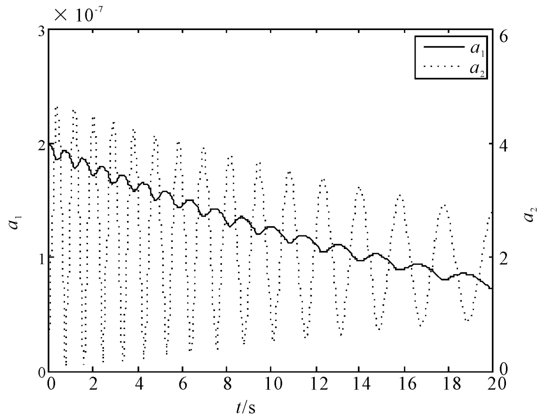

图 5 时间响应曲线

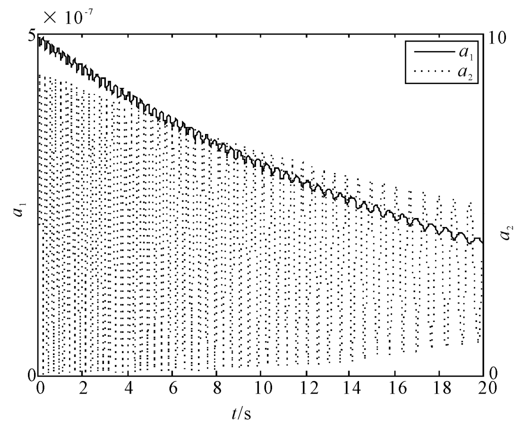

图 6 时间响应曲线

图 2 中曲线G_2的位置，与选线F的一个分支相切，即$\xi_2=\xi_3$，此时$\xi=\xi_3$为常数，由式(29)可得

$$a_1=\sqrt{E\xi_2}\,,\quad a_2=\sqrt{E\left(1-\xi_2\right)/\upsilon} \tag{30}$$

此时运动是周期的，然而任意小扰动都会导致类似G_1的曲线，即三个都不同的根，使得运动成为非周期的。

4　结论

本文建立了电阻电感电容串联电路与微梁耦合系统的非线性振动方程，得到无阻尼状态 1：2 内共振解析解的椭圆函数表达式，并对此进行了数值模拟。研究结果表明：调节电路的固有频率使其与机械系统的固有频率成 1：2 内共振关系，在这种情况下耦合系统能够使能量由低模态向高模态完全转移。但此时微小的扰动，就会破坏其稳定性。

参 考 文 献

[1] 邱家俊. 机电耦联动力系统非线性振动[M]. 北京: 科学出版社, 1996.

[2] 向裕民. 电容器极板的非线性振动[J]. 非线性动力学学报, 1996, 3（1）: 67-72.

[3] 姚仲瑜. 用拉格朗日方程研究 RLC 电路的暂态过程[J]. 广西大学学报, 2001, 26（2）: 145-149.

[4] Chakravarthy S K. Nonlinear oscillations due to spurious energisation of transformers[J]. IEEE Proc-Electr Power Appl, 1998,145(6):585-592.

[5] 崔一辉, 杨志安. RLC 电路弹簧耦合系统的级数解[J]. 振动与冲击, 2006, 25（4）: 76-77, 108.

[6] 杨志安, 崔一辉. 非线性电阻电感型 RLC 串联电路主共振分析[J]. 天津大学学报, 2007, 40（5）: 579-583.

[7] 杨志安, 崔一辉. RLC 电路弹簧耦合系统的非线性振动[J]. 唐山学院学报, 2005, 18（4）: 90-95.

[8] 崔一辉, 杨志安. RLC 电路弹簧耦合系统的非线性动力学分析[J]. 河北理工大学学报, 2005, 27(4): 49-54.

[9] Jazar G N. Mathematical modeling and simulation of thermal effects in flexural microcantilever resonator dynamics[J]. Joural of Vibration and Control, 2006, 12(2): 139-163.

[10] Younis M I, Nayfeh A H. A study of the nonlinear response of a resonant microbeam to an electric actuation[J]. Nonlinear Dynamics, 2003, 3(1): 91-117.

[11] 邱家俊. 机电分析动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1992.

[12] 胡宇达. 横向磁场中机械载荷作用梁式薄板的非线性主共振[J]. 振动与冲击, 2006, 25(4): 88-90, 178-179.

[13] 胡宇达. 传导薄板的非线性磁弹性振动问题[J]. 工程力学, 2001, 18（4）: 89-94.

[14] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear oscillation[M]. New York: Wiley-interscience, 1979.