

基体裂纹与界面刚性线的弹性干涉

罗紫电^{1,2} 刘又文¹

(湖南大学 410082 长沙)¹ (广东天联工程有限公司 510600 广州)²

摘要: 研究两种材料界面上的刚性线与其它任意位置处直线裂纹弹性干涉的反平面问题。基于界面上刚性线与任意位置处螺型位错干涉的基本解, 运用连续位错密度模型法将问题转化为奇异积分方程。用半开型积分法求解奇异积分方程, 得到位错密度函数的离散值, 计算裂纹尖端处的应力强度因子。算例说明该方法可用于工程实际问题。

关键词: 螺型位错; 界面刚性线; 连续位错密度模型法; 奇异积分方程; 应力强度因子

中图分类号: O341 **文献检索码:** A

1 引言

随着复合材料的不断发展, 材料的内部缺陷如裂纹、孔洞、刚性夹杂等, 越来越受到重视, 研究内部缺陷对应力场影响和由此引起的应力集中意义重大。关于不同的加载情况下界面裂纹问题, 包括共线和共圆弧裂纹, 都已得到较为充分的研究。界面刚性线是一种缺陷形式, 是由于界面偏析而产生的一种硬质夹杂, 类似裂纹尖端, 在刚性线尖端会发生严重的应力集中现象, 因此研究界面刚性线缺陷对双相材料是非常重要的。

本文主要研究两种材料界面上的刚性线与其它任意位置处的直线裂纹弹性干涉的反平面问题。基于交界面上刚性线与任意位置处螺型位错的干涉的基本解, 运用连续位错密度模型法将所设问题转化为奇异积分方程。利用半开型积分法求解奇异积分方程, 得到位错密度函数离散值, 并计算裂纹尖端处应力强度因子(SIF)。

2 基本原理

设: 无限弹性平面二相材料界面上含一长度为

$a+b$ 的刚性线; 平面内存在一长为 c 的直线裂纹, 与 x 正向所成的角度为 α ; 裂纹面自由(图 1); 两种材料的剪切弹性模量分布为 μ_1 和 μ_2 。

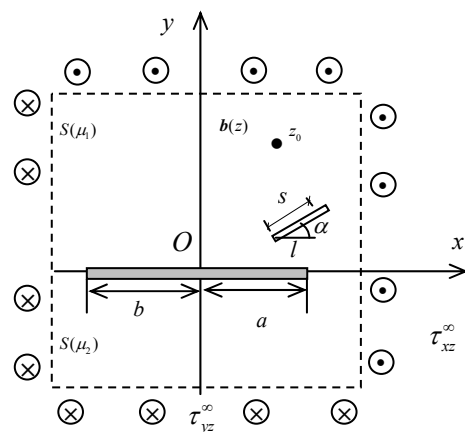


图 1 界面刚性线与直线裂纹干涉模型

在螺型位错作用下, 唯一不为零的 z 方向位移分量 w_j (其中 $j=1, 2$)、切应力 τ_{xy} 、 τ_{yz} 可用复变量 $z = x + iy$ 的解析函数 $f_j(z)$ 表示为^[1]

$$w_j = \frac{1}{2\mu_j} [f_j(z) + \overline{f_j(z)}] \quad (1)$$

$$\tau_{xj} - i\tau_{yj} = f'_j(z) \tag{2}$$

式中： μ_j 为材料的剪切模量； i 为虚数单位；上划线“—”表示取共轭。

$$\Gamma = \tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty \tag{3}$$

在 z_0 点布置Burgers 矢量为 b_z 的螺型位错，其相对应的复势函数 F_w [2]为

$$F_1 = \mu_{21}[h(z) + \frac{g(z)}{\mu_2}] \quad (z \in S^+) \tag{4}$$

$$F_2 = \mu_{12}[h(z) + \frac{g(z)}{\mu_1}] \quad (z \in S^-) \tag{5}$$

式中： $\mu_{12} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$ ； $\mu_{21} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$

$$\begin{cases} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \end{cases} = \begin{cases} F_1(z) \\ F_2(z) \end{cases} = \frac{\mu_{21}b_z}{2\pi i} (\Gamma_1 - \overline{\Gamma_2}) \pm \frac{\mu_{12}b_z}{2\pi i} \pm \frac{\mu_{12}b_z}{2\pi i} \frac{(\mu_1\Gamma_1 + \mu_2\overline{\Gamma_2})}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{\sqrt{(z_0-a)(z_0-b)}}{z-z_0} + \frac{\sqrt{(\overline{z_0}-a)(\overline{z_0}-b)}}{z-\overline{z_0}} \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \left(\frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{z-\overline{z_0}}\right) \frac{\mu_{21}b_z}{2\pi i} \tag{6}$$

沿斜线段 l 布置连续的分布位错时，把在微段 ds 上的分布位错看成强度为 $b(s)ds$ 的点位错，通过将式(6)中的分布螺型位错 b_z 沿裂纹积分可得由位错集合表示的裂纹复势函数，用 Φ_l 表示为

$$\begin{cases} \Phi_{l1}(z) \\ \Phi_{l2}(z) \end{cases} = \frac{\mu_{21}}{2\pi i} (\Gamma_1 - \overline{\Gamma_2}) J(b) \pm \frac{\mu_{12}}{2\pi i} [J(b) \pm \int_0^c \frac{(\mu_1\Gamma_1 + \mu_2\overline{\Gamma_2})b(s)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} ds] + \int_0^c \left\{ \frac{\sqrt{(z_{0\alpha}-a)(z_{0\alpha}-b)}}{(z-z_{0\alpha})\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{\sqrt{(\overline{z_{0\alpha}}-a)(\overline{z_{0\alpha}}-b)}}{(z-\overline{z_{0\alpha}})\sqrt{(z-a)(z-b)}} \right\} ds +$$

$$\frac{\mu_{21}}{2\pi i} \int_0^c b(s) \left[\frac{1}{z-z_{0\alpha}} + \frac{1}{z-\overline{z_{0\alpha}}} \right] ds \tag{7}$$

式中： $z_{0\alpha} = z_0 + se^{i\alpha}$ ； $\overline{z_{0\alpha}} = \overline{z_0} + se^{-i\alpha}$ ；

$$J(b) = \int_0^c b(s) ds$$

3 奇异积分方程的建立

对图 2 所示的斜面，设：斜面与 x 轴正向之间的夹角为 α ；斜面上切应力为 τ_{nz} 。由平衡条件可得

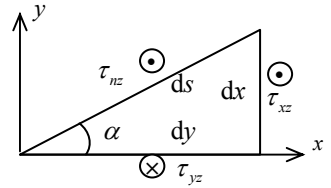


图2 斜面上的应力

$$\tau_{nz} ds = -\tau_{xz} dy + \tau_{yz} dx \tag{8}$$

因为 $dy/ds = \sin \alpha$, $dx/ds = \cos \alpha$ ，所以

$$\tau_{nz} = -\tau_{xz} \sin \alpha + \tau_{yz} \cos \alpha \tag{9}$$

由于

$$\Phi_j(z) = \phi'_j(z) = \tau_{xj} - i\tau_{yj} \tag{10}$$

得到

$$\tau_{nzj} = \text{Im}[-\Phi_j(z)e^{i\alpha}] \tag{11}$$

将式(7)代入式(11)得积分方程

$$\begin{cases} \tau_{nz1} \\ \tau_{nz2} \end{cases} = \frac{e^{i\alpha}}{2\pi} [\mu_{21}(\Gamma_1 - \overline{\Gamma_2})J(b) \pm \mu_{12}J(b)] \pm \frac{\mu_{12}e^{i\alpha}}{2\pi} \int_0^c \frac{(\mu_1\Gamma_1 + \mu_2\overline{\Gamma_2})b(s)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} ds + \frac{e^{i\alpha}}{i} \int_0^c \left[\frac{\sqrt{(z_{0\alpha}-a)(z_{0\alpha}-b)}}{(z-z_{0\alpha})\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{\sqrt{(\overline{z_{0\alpha}}-a)(\overline{z_{0\alpha}}-b)}}{(z-\overline{z_{0\alpha}})\sqrt{(z-a)(z-b)}} \right] ds + \frac{\mu_{21}e^{i\alpha}}{2\pi} \int_0^c b(s) \left(\frac{1}{z-z_{0\alpha}} + \frac{1}{z-\overline{z_{0\alpha}}} \right) ds \tag{12}$$

考虑倾斜裂纹分别在裂纹上下表面上的应力 τ_{nz}^+ 和 τ_{nz}^- 。当 z 在裂纹 OA 表面时， $\Phi_j(z)$ 中的广义积分在 Cauchy 型积分主值的意义下存在。根据

Plemelj 公式, 不管在裂纹的上表面还是在裂纹的下表面, 都会有

$$\tau_{nz} = \tau_{nz}^+ = \tau_{nz}^- = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{b(s)}{s-s_k} ds \quad (13)$$

若裂纹表面上的荷载为 $T_j(s_k)$, 则可得

$$\tau_{nz,j} = T_j(s_k) \quad (14)$$

式中下标 j 表示裂纹所在区域, 裂纹全部位于上层材料内时 $j=1$, 裂纹全部位于下层材料内时 $j=2$ 。

将式(12)代入式(14), 可得奇异积分方程

$$\begin{cases} T_1(s_k) \\ T_2(s_k) \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{b(s)ds}{s-s_k} + \frac{\mu_{21}e^{ia}}{2\pi} \int_0^c \frac{b(s)ds}{z-\bar{z}_{0\alpha}} + \frac{\mu_{21}e^{ia}}{2\pi} (\Gamma_1 - \bar{\Gamma}_2) \int_0^c b(s)ds + \frac{\mu_{12}e^{ia}}{2\pi} J(b) + \frac{\mu_{12}e^{ia}}{2\pi} (\mu_1\Gamma_1 + \mu_2\bar{\Gamma}_2) \int_0^c \frac{b(s)ds}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{e^{ia}}{i} \int_0^c \frac{\sqrt{(\bar{z}_{0\alpha}-a)(\bar{z}_{0\alpha}-b)}ds}{(z-\bar{z}_{0\alpha})\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{ds}{s-s_k} \quad (15)$$

计算奇异积分方程时要注意, 裂纹的主要部分对本身的影响会产生奇异性, 要利用 Plemelj 公式, 其余部分均可直接计算得到。

数值计算时, 奇异积分的计算采用半开型积分公式^[3]

$$\int_0^a \frac{f(t)}{t-x_k} \sqrt{\frac{t}{a-t}} dt = \sum_{m=1}^M \frac{A_m f(t_m)}{t_m-x_k} \quad (16)$$

$$\int_0^a g(t) \sqrt{\frac{t}{a-t}} dt = \sum_{m=1}^M A_m g(t_m) \quad (17)$$

式中:

$$\begin{aligned} t_m &= a \sin^2 \frac{m\pi}{2M}, \quad (m=1,2,\dots,M), \\ x_k &= a \sin^2 \frac{(k-0.5)\pi}{2M}, \quad (k=1,2,\dots,M), \\ A_M &= \pi a / 2M \end{aligned} \quad (18)$$

这里: t_m 为积分点; x_k 为配置点。

由应力强度因子与位错密度的关系式得到

$$b(s) = \sqrt{\frac{s}{a-s}} B(s), \quad (0 < s < a) \quad (19)$$

通过裂纹尖端的应力和位移特征展开式, 得到裂纹尖端的应力强度因子为

$$K_3 = -\sqrt{2\pi} \lim_{s \rightarrow a} \sqrt{a-s} b(s) = -\sqrt{2\pi a} B(a) \quad (20)$$

4 验证与算例

算例 1 无限大弹性平面中二相材料的界面上含有一位于 x 轴, 关于 y 轴对称的直线刚性线, 长度为 $2b$ 。另有一个直线裂纹, 长度为 a , 与 x 正向所成的角度设为 α , 裂纹起点 $z_0 = a \cos \alpha + ia \sin \alpha$ 。无穷远处作用 $\tau_{xz}^\infty = 0$, $\tau_{yz}^\infty = p$ (图 3)。SIF 的量纲一化形式^[4]为

$$K_3 = f p \sqrt{\pi a} \quad (21)$$

式(21)与式(20)联立求解。取 $M=21$ 个配置点, 计算得到的 f 如图 4~图 5 所示。

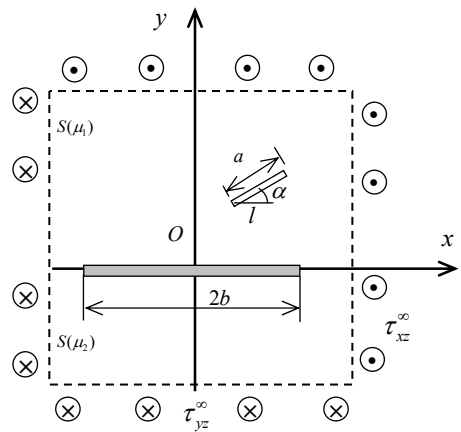


图 3 二相材料界面刚性线与基体裂纹干涉

结果显示, 裂纹与刚性线长度比值 a/b 及两相材料剪切弹性模量比值 G 对 K_3 的影响都比较大。 a/b 越小, K_3 越大, 说明刚性线的长度越大, 对应力强度因子影响越大。裂纹与刚性线间角度对 K_3 的影响比较小, 从图中可以看出夹角越大, K_3 越大。

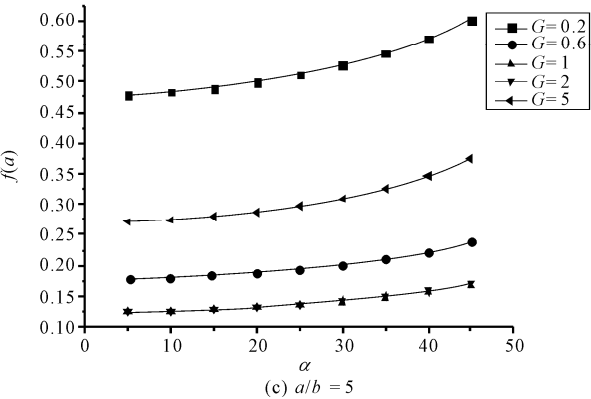
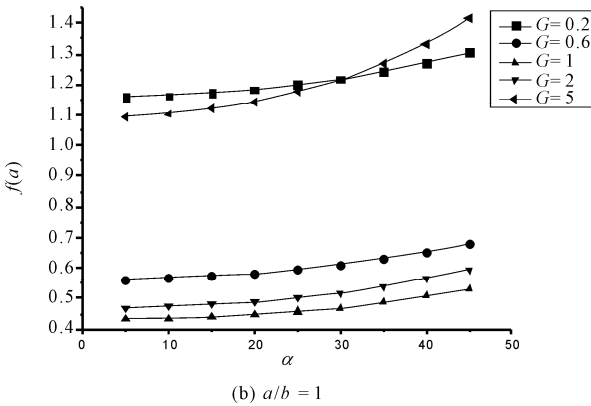
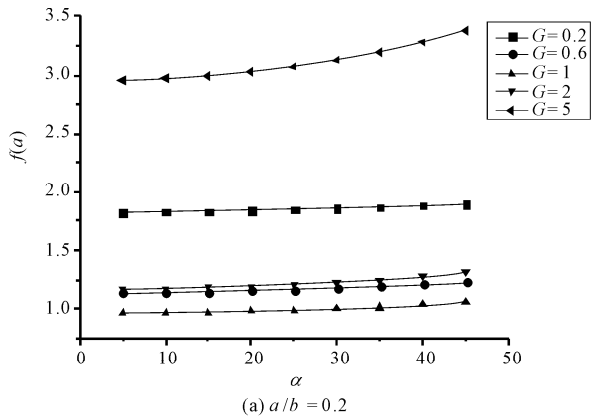


图4 f的变化

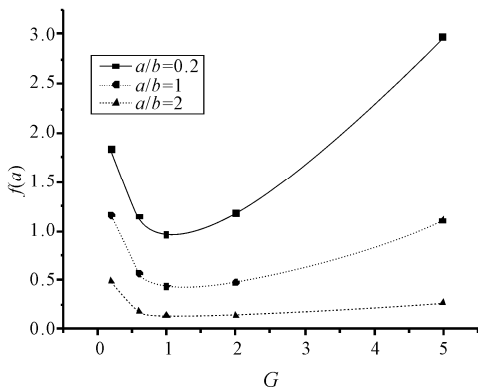


图5 alpha=10度时, f随G的变化

算例2 无限均匀弹性平面含有一位于x轴, 关于y轴对称的直线刚性线, 长度为2b. 另有一个直线裂

纹, 长度为a, 与x正向所成的角度设为alpha, 裂纹起点 z_0 = a cos alpha + ia sin alpha. 无穷远处作用 tau_xz^inf = p, tau_yz^inf = p, 剪切弹性模量为mu. SIF量纲一形式与式(21)相同[5]. 取M=21个配置点, f值如图6~图7所示.

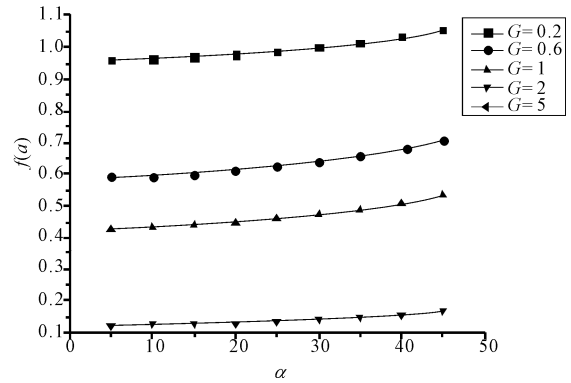


图6 算例2中f随alpha的变化

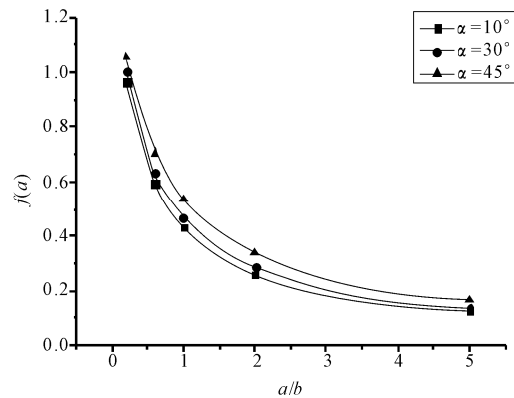


图7 算例2中f随a/b的变化

结果显示:同种介质中裂纹与刚性线长度比值对K_3的影响较大, 刚性线的长度越大, 基体裂纹应力强度越大; 裂纹与刚性线所成角度对K_3的影响相对小, 夹角越大, K_3越大.

4 结论

本文运用连续位错模型法获得基体裂纹与界面刚性线干涉解答的奇异积分方程. 再由数值解法, 研究了两种材料界面含直线刚性线与任意位置处的任一直线裂纹干涉的反平面问题以及同种材料内裂纹与刚性线干涉的特殊情况. 结果显示, 界面刚性线对界面与裂纹的干涉作用具有强烈的扰动效应. 界面刚性线越长, 基体裂纹应力强度越大, 两相材料剪切弹性模量比值趋于1时, 应力强度因

子值趋向最小值。基体裂纹与刚性线所成角度对 K_3 的影响较小, 且夹角越大, K_3 越大。同种介质中这种影响趋势相同。

参 考 文 献

- [1] Muskhelishvili N I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity[M]. Noordhoff, Groningen, 1954: 1-200.
- [2] Li Q Q, Ting T C T. Line inclusions in anisotropic elastic solids[J]. ASME :Journal of Applied Mechanics, 1989,56:556-563.
- [3] Boiko A V, Karpenko L N. On some numerical methods for the solution of the plane elasticity problem for bodies with cracks by means of singular integral equation[J]. Int J Fracture, 1981,17: 381-388.
- [4] Smith E. The interaction between dislocation and inhomogeneities-I[J]. International Journal of Engineering Science, 1968,6: 129-143.
- [5] 赵祯. 奇异积分方程[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1984: 1-200.