第 27 卷　第 2 期　　应　用　力　学　学　报　　Vol.27 No.2
2010 年 6 月　　CHINESE JOURNAL OF APPLIED MECHANICS　　Jun.2010

文章编号：1000-4939（2010）02-0239-04

基于拉格朗日键合图梁-多自由度耦合系统模态分析

薛晓鹏　樊久铭　盖秉政

（哈尔滨工业大学　150001　哈尔滨）

摘要：基于拉格朗日键合图建立了梁-多自由度耦合系统的离散模型，考虑子结构与梁间的相互影响，得到了系统振动的数学模型。以一个固支梁联接三个弹簧-质量的耦合系统为例进行了建模仿真，得到的模态分析结果与文献一致，表明该方法对此类耦合系统进行模态分析是正确的。

关键词：拉格朗日键合图；模态分析；梁；耦合系统

中图分类号：O326　　**文献标识码：**A

1　引　言

在工程实际中，存在许多梁-多自由度耦合系统或类似结构，较为常见的是一个或多个振动源被弹性地联接于梁结构上[1-7]。对该问题的研究，理论上很多方法是求解联接任意集中质量的等截面梁的特征值问题，但实际上由于数学表达式的复杂性使其很难实现，因此集中质量的个数一般不超过两个。文献[5]中将子结构的影响转化为边界条件，然后再对每一个小段进行求解，使得求解梁联接任意个弹簧-质量系统的振动问题不再困难,但该方法不能得到一个统一的表达式，而且计算量也比较大；文献[7]使用递归方程方法对整个耦合结构振动问题进行了研究，得到其解析表达式，但其推导过程比较繁琐，计算容易出错。本文提出了一种新方法，即基于拉格朗日键合图对整个耦合结构进行离散化处理，考虑联接的弹簧-阻尼-质量系统与梁的相互影响研究整个耦合结构，且计算过程简便，易于计算机仿真。

2　拉格朗日键合图方法

拉格朗日键合图是拉格朗日方程与标准键合图综合的一种模拟方法[8-9]。由于一种适用于仿真的向量系统方程可以很容易地从拉格朗日键合图模型得到,所以当确定了与所研究系统有关的广义坐标、参数矩阵、力输入以及各个速度转换矩阵后，就可以利用根据该键合图模型编制的程序对系统进行数字仿真[9]。该方法以代表系统广义坐标的一阶导数即广义速度的“1 结”，及联系各场与广义速度的调制变换器组成结型结构。具有拉格朗日因果关系的精简拉格朗日键合图如图1所示。广义坐标取为系统的运动位移向量 $\boldsymbol{q}_G$，$\boldsymbol{q}_C$为弹性场位移向量，$\boldsymbol{V}_I$ 为惯性场速度向量。设：$\boldsymbol{F}_I$为在$\dot{\boldsymbol{q}}_G$ 上的达朗贝尔力；$\boldsymbol{F}_C$ 为在$\dot{\boldsymbol{q}}_G$ 上的弹性力；$\boldsymbol{F}_S$为在$\dot{\boldsymbol{q}}_G$ 上的力输入；$\boldsymbol{F}_R$ 为在$\dot{\boldsymbol{q}}_G$ 上的耗散力。由该图中部的1结可知：$\boldsymbol{F}_I$、$\boldsymbol{F}_C$、$\boldsymbol{F}_R$、$\boldsymbol{F}_S$之和应为零，即

$$\boldsymbol{F}_I+\boldsymbol{F}_C+\boldsymbol{F}_R-\boldsymbol{F}_S=0 \tag{1}$$

基金项目：国家自然科学基金(50478030/E080509）　**来稿日期：**2008-11-20　**修回日期：**2010-02-05

第一作者简介：薛晓鹏，男，1982 年生，哈尔滨工业大学航天学院，博士生；研究方向——振动理论，计算流体力学。
E-mail：watt0304@126.com

式中

$$\boldsymbol{F}_I=\boldsymbol{T}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{T}_I\ddot{\boldsymbol{q}}_G+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}_I}{\mathrm{d}t}\dot{\boldsymbol{q}}_G) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F}_C=\boldsymbol{T}_C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}_C) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{T}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_R\dot{\boldsymbol{q}}_G \tag{4}$$

$$\boldsymbol{F}_S=\boldsymbol{T}_S f_S(t) \tag{5}$$

其中$\boldsymbol{T}_I$、$\boldsymbol{T}_C$、$\boldsymbol{T}_R$ 、$\boldsymbol{T}_S$为各速度转换矩阵。

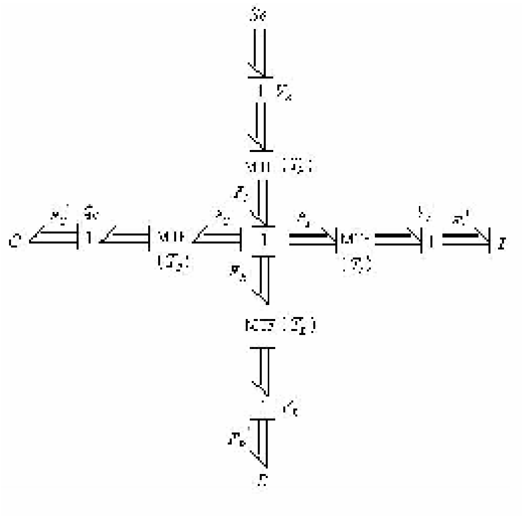

图 1　具有拉格朗日因果关系的精简拉格朗日键合图

3　联接弹簧-阻尼-质量系统的梁

联接 N 个弹簧-阻尼-质量的梁系统理论模型如图 2 所示。一个两端固定的等截面直梁联接有 N 个弹簧-阻尼-质量系统，其中第 r 个联接点所处的位置 a_r，耦合系统的参数为质量 m_r、阻尼为 c_r、刚度为 $k_r\,(r=1,2,\cdots,N)$。梁的质量为 M，长度为 L。

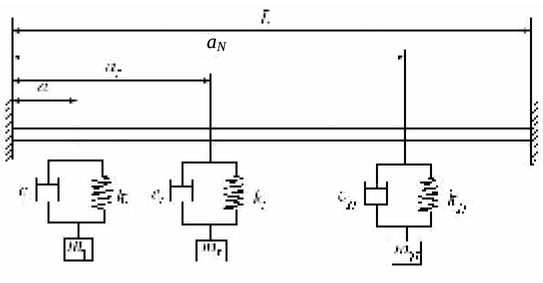

图 2　两端固支联接 N 个弹簧-阻尼-质量的梁系统

根据拉格朗日键合图的要求，将梁结构离散为刚杆-弹簧-质点系统。图 3 所示为第 r 个弹簧-阻尼-质量与梁的第 i 个离散点的联接示意图。

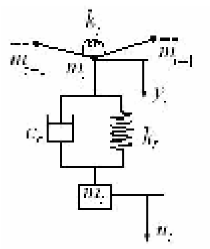

图 3　第 r 个弹簧-阻尼-质量系统联接点处示意图

按照拉格朗日键合图方法的步骤，确定关键向量为 $\boldsymbol{q}_G$、$\boldsymbol{q}_I$、$\boldsymbol{q}_C$、$\boldsymbol{V}_I$。其拉格朗日键合图模型如图 4 所示，其中 $\boldsymbol{q}_G$ 的维数 p 为梁集中质量的离散个数 n 与联接弹簧-阻尼-质量系统中质量的个数 N 之和；$\boldsymbol{q}_I$ 为 p 维的惯性位移向量。系统中有两类“弹簧”，一类是梁离散结构的“弹簧”；一类是弹簧-阻尼-质量系统中的弹簧

$$\boldsymbol{q}_G=\{y_1,\cdots,y_n,\cdots,u_1,\cdots,u_N\}^{\mathrm{T}}\ ,$$

$$\boldsymbol{q}_I=\{y_1,\cdots,y_n,\cdots,u_1,\cdots,u_N\}^{\mathrm{T}}\ ,$$

$$\boldsymbol{q}_C=\{y_1,\cdots,y_n,\cdots,u_1,\cdots,u_N\}^{\mathrm{T}}\ ,$$

$$\boldsymbol{q}_D=\begin{bmatrix} \dfrac{-y_2(n+1)}{L} \\ \dfrac{y_2(n+1)}{L}+\dfrac{(y_2-y_3)(n+1)}{L} \\ \vdots \\ \dfrac{(y_{n-1}-y_{n-2})(n+1)}{L}+\dfrac{y_{n-1}(n+1)}{L} \\ \dfrac{-y_{n-1}(n+1)}{L} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n+N} \tag{6}$$

其中：$\boldsymbol{q}_C$ 表示梁离散结构“弹簧”的弹性场位移向量；$\boldsymbol{q}_D$ 表示弹簧-阻尼-质量系统中弹簧相对耦合系统的弹性场位移向量，与矩阵 $\boldsymbol{K}_D$ 中的行(或列)相对应。其它元件的维数参见图 4。

由式(6)可以求出相应的速度转换矩阵 $\boldsymbol{T}_I$、$\boldsymbol{T}_C$、$\boldsymbol{T}_D$，$\boldsymbol{T}_S$、$\boldsymbol{T}_R$，求解与此相类似。从已知条件和图 2~图 4 可知系统的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和梁的抗弯刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_C$ 均为对角矩阵，其元素分别为

$$M_i=\frac{M}{n},\quad (i=1,2,\cdots n),$$

$$M_i=m_{i-n},\ (i=n+1,n+2,\cdots p)\tag{7}$$

$$K_{Ci}=\frac{EI(n+1)}{L},\quad (i=1,2,\cdots n),$$

$$K_{Ci}=0,\quad (i=n+1,n+2,\cdots p)\tag{8}$$

N 个弹簧-阻尼-质量系统中弹簧对于整个系统的影响用刚度矩阵 $\boldsymbol{K_D}$ 表示为

$$\boldsymbol{K}_D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\boldsymbol{k}_d&-\boldsymbol{k}_d\\0&-\boldsymbol{k}_d&\boldsymbol{k}_d\end{bmatrix}\tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{k}_d=\mathrm{diag}\{k_1,\mathbf{L},k_r,\mathbf{L},k_N\}\tag{10}$$

由以上各个参数矩阵可求得速度转换矩阵 $\boldsymbol{T_I}$、$\boldsymbol{T_C}$、$\boldsymbol{T_D}$、$\boldsymbol{T_S}$、$\boldsymbol{T_R}$。由式(2)~式(5)求得拉格朗日键合图中 1 结的各力 $\boldsymbol{F_I}$、$\boldsymbol{F_C}$、$\boldsymbol{F_D}$，$\boldsymbol{F_S}$、$\boldsymbol{F_R}$，代入式(1)中即可得到该耦合系统的系统方程。

当梁的边界条件发生变化，可参考文献[10]利用拉格朗日键合图方法对梁的边界条件进行定义，再考虑耦合自由度的个数进行计算。按照本文方法的步骤进行计算，可以方便地得到各种边界条件下的数学模型。

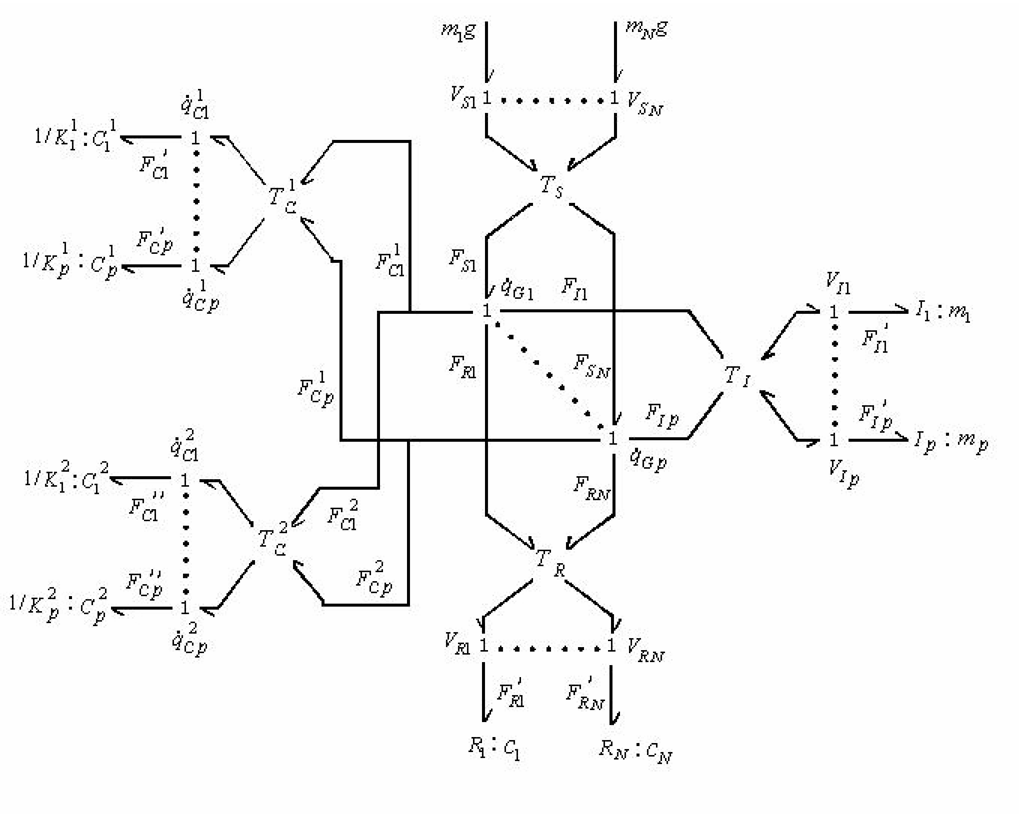

图 4 该耦合系统的拉格朗日键合图模型

4 算 例

耦合结构参考图 2 所示，一个等截面固支梁联接有 3 个弹簧-质量系统，耦合系统的参数分别为：L =1.0m； d =0.05m； E =2.069×10^{11}N/m^2； r =7.3867×10^{3}kg/m^3； 单元质量 rd =15.3867 kg/m; I =3.06796×10^{-7}m^4。3 个弹簧-质量系统的作用位置点位置以及结构参数分别为： $a_1=0.1L$，$m_1=0.2rd$，$k_1=3EI$；$a_2=0.4L$，$m_2=0.5rd$，$k_2=4.5EI$； $a_3=0.8L$， $m_3=rd$， $k_3=6EI$。

采用本文方法计算出系统的数学模型，利用自编的 MATLAB 程序计算系统的模态参数，最后得到耦合系统的前 5 阶固有频率如表 1 所示，同时绘制了前 5 阶固有振型，如图 5 所示。

从表 1 给出的结果可以看出，前 5 阶频率与文献[5]中相比一致性非常好，与参考文献中的振型图也非常吻合，同时从图中还可以看出前 3 阶振型梁受到了 3 个弹簧-质量系统的耦合影响，而从第 4 阶振型开始，后面的则类似于无耦合情况的振型。因此证明了本文方法的正确性。

表 1 耦合系统的前 5 阶频率

阶数	本文方法/Hz	文献[5] /Hz
1	24.9355	24.9349
2	30.3506	30.3508
3	39.5760	39.5758
4	231.7693	231.4580
5	632.4913	631.6021

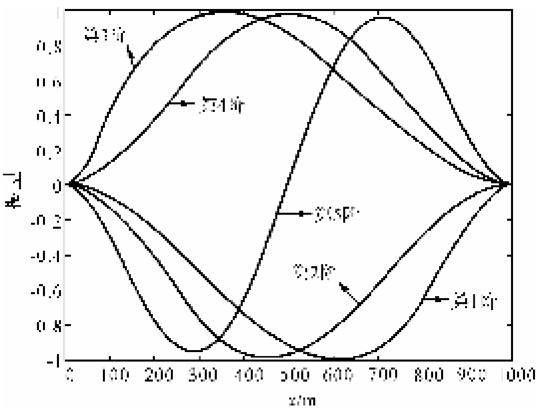

图 5 耦合系统前 5 阶振型曲线

5 结 论

本文利用拉格朗日键合图建立了固支梁-多自由度耦合系统的数学模型。当梁的边界条件发生变化时，可利用拉格朗日键合图方法对梁的边界条件进行定义，再按照本文方法考虑子系统之间的相互影响进行建模仿真，即可方便地得到其系统方程。以固支梁联接三个弹簧-质量的耦合结构为例进行了仿真计算，得到了精确的固有频率解和合理的振型，证明了利用该方法研究梁-多自由度耦合结构以及类似结构的振动问题是适用可行的，且不受联接耦合结构个数和边界条件的限制。

参 考 文 献

[1] Gürgöze M. On the eigenfrequencies of a cantilever beam with attached tip mass and a spring-mass system[J]. Journal of Sound and Vibration,1996, 190(2):149-162.

[2] Larrondo H, Avalos D, Laura P A A. Natural frequencies of a Bernoulli beam carrying an elastically mounted concentrated mass[J]. Ocean Engineering, 1992, 19(5):461-468.

[3] Jen M U, Magrab E B. Natural frequencies and mode shapes of beam carrying a two degree of freedom spring mass system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 115(2): 202-209.

[4] Rossi R E, Laura P A A, Avalos D R, et al. Free vibrations of Timoshenko beams carrying elastically mounted, concentrated masses[J]. Journal of Sound and Vibration,1993, 165(2): 209-223.

[5] Wu J S, Chou H M. A new approach for determining the natural frequencies and mode shapes of a uniform beam carrying any number of sprung masses.[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 220 (3): 451-468.

[6] Chen D W , Wu J S. The exact solutions for the natural frequencies and mode shapes of non-uniform beams with multiple spring-mass systems[J]. Journal of Sound and Vibra tion,2002, 255(2):299-322.

[7] 汤宏博,吴成军,黄协清.梁-多自由度耦合系统的振动响应分析[J]. 西安交通大学学报. 2006, 40(9): 1096-1098.

[8] 张尚才,罗森伯 R C. 用拉格朗日键图模拟非线性机械系统[J]. 浙江大学学报,1983, (3): 1-11.

[9] 张尚才. 非机械系统的拉格朗日键图模型[J]. 浙江大学学报, 1984, 18(1): 69-77.

[10] 薛晓鹏，樊久铭,刘钊,等.拉格朗日键合图的欧拉梁的模态分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2010, 42(1):682-685.