

封闭方腔内空气和水自然对流 每一次分岔数值预报

王小华¹ 朱文芳² 魏英杰³

(浙江大学 310027 杭州)¹ (浙江科技学院 310023 杭州)² (哈尔滨工业大学 150090 哈尔滨)³

摘要: 采用二阶全展开 ETG 分裂步有限元方法, 通过对流动拓扑的详细分析, 在排除网格密度影响的基础上, 结合二分法给出封闭方腔内空气和水两种典型流体自然对流发生第一次分岔时的临界 Rayleigh 数。计算结果表明, 该方法可用于进行不同 Prandtl 数条件下方腔内自然对流流动第一次分岔的数值预报, 可作为后续各阶分岔及转捩数值预报研究的基础。在相应的条件下, 封闭方腔内空气比水更容易发生分岔, 且空气的流动结构相对于水表现出一定的倾斜性。

关键词: 封闭方腔; 自然对流; 第一次分岔; 数值预报; 流动拓扑

中图分类号: O351

文献标识码: A

1 引 言

近年来, 由于封闭腔体的几何形状简单, 且有广泛的应用背景, 但其流动机制复杂, 大量学者从物理实验和数值模拟的角度对内部的自然对流问题进行了深入的研究。这些研究成果从不同角度不断加深人们对这一复杂非线性问题的认识, 并且相关研究结果已在生产实际中得到应用。现有的研究表明, 随着 Ra (Rayleigh 数) 不断增加, 封闭腔体内的流动会发生一系列的分岔, 先是从一种定常层流转化为另外一种更为复杂的定常层流, 再转化为按照某种周期变化的层流流动。最终随着 Ra 的进一步增加, 发生转捩形成复杂的湍流流动。流体流动经历了从稳定到局部失稳再到全局失稳的复杂过程。

从文献[1]的数值分析开始, 尽管通过大量的数值和物理研究对上述过程有了定性的了解。但

绝大多数的研究都是针对给定的几何边界条件下, 某个给定的 Ra 范围内的流动特征展开分析, 或者分析几何以及物理边界条件对流动拓扑的影响, 并加入相应的流动控制手段整合流动结构以达到某种实际的要求; 文献[2]研究了不同边界条件和温度场对封闭腔体内自然对流的影响; 文献[3]数值分析了对应于 Davis 给定的物理边界条件下的矩形封闭方腔内的自然对流问题。其结果均表明在发生流动向湍流的转捩后, 对应 Nusselt 数的变化会强烈依赖于相应的 Ra , 且这一发生转捩过程所对应的临界 Ra_{Cr} 的取值并不依赖于 Pr (Prandtl 数)^[4-6], 但关于转捩的研究所给出的 Ra_{Cr} 的取值范围却相当宽泛, 在 $10^6 \sim 10^8$ 之间变化; 文献[7]研究了底部边界加热、两侧边界和上部边界冷却条件下不同长宽比对矩形腔体内自然对流的影响, 其研究表明流动对应的 Nu 是矩形腔体长宽比值的函数; 文献[8]则分析了不同倾斜角度条件下, 矩形腔体内的自然对流流动, 在分析中考虑

重力的影响;文献[9]采用Lattice Boltzman方法分析了长宽比、Knudsen数对转捩 Ra_C 的作用。上述结果都表明几何和物理边界条件都会对封闭腔体内自然对流流动结构及流动稳定性产生直接的甚至是决定性的影响,但相关文献都未对具体转捩的 Ra_C 做出准确的预报,从这一点出发,应该说完全理解转捩这一复杂的非线性过程,乃至自然对流流动的机制,还需要进行大量的工作。

其实不仅对于湍流现象,即便是定常层流对应自然对流流动现象的机理阐述也还存在很多值得深入研究的问题,如第一次分岔的时间演化过程和对对应 Ra 的准确预报对于后续各阶分岔、转捩和整个流动机制的阐明都具有重要的意义,但到目前为止还没有对封闭方腔内自然对流第一次分岔进行数值预报的相关报导。对于几何边界条件给定方腔内的自然对流,其第一次分岔的数值捕捉将取决于如下几个主要因素:离散格式精度、网格密度、物理边界条件(倾角、加热情况)以及 Pr 。本文采用二阶全展开ETG分裂步有限元方法,首先分析5种不同的网格密度对典型问题计算精度的影响,在计算量和精度要求共同作用下,确定出合适的网格密度,并从流动拓扑的演化过程出发对封闭方腔内水和空气两种特定流体第一次分岔进行数值预报研究,初步分析了 Pr 对第一次分岔的影响。

2 数值方法

针对自然对流问题,根据问题本身的特性,特征参数的选取通常有四种不同的形式,本文分别采用如下形式进行参数的量纲一化

$$x_i = \frac{x_i^*}{L}, \quad t = \frac{t^*}{L^2/\alpha}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{\alpha/L},$$

$$p = \frac{p^*}{\rho(\alpha/L)^2}, \quad T = \frac{T^* - T_0}{T_1 - T_0}$$

其中: L 为封闭方腔的特征长度; α 为导温系数; T_0 和 T_1 分别为指定温度。对于二维方腔自然对流问题,相应量纲一化方程如式(1)~式(3)所示。

2.1 基本方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + Pr \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + RaPrT \cos \theta_i$$

(2)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial Tu_j}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3)$$

式中:流动对应的量纲为一的常数 Prandtl 数

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \text{ Rayleigh 数 } Ra = \frac{g\beta L^3 \Delta T}{\alpha \nu}; \nu \text{ 为运动粘}$$

性系数。

2.2 数值方法

采用二阶全展开Euler-Taylor-Galerkin分裂步有限元方法^[10-11],在此只给出离散后的单元及总体方程的形式。

单元的有限元分析得到的速度离散方程为

$$A_{IJ} u_J^{n+1} = (B_{IJ} u_J^n + C_{IJ} u_J^n + P_I + E_I + F_I) \Delta t + A_{IJ} u_J^n \quad (4)$$

其中

$$A_{IJ} = \int_{\Omega_E} N_I \left(1 - \frac{\Delta t}{2} Pr \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}\right) N_J d\Omega,$$

$$B_{IJ} =$$

$$\int_{\Omega_E} N_I \left(1 - \frac{\Delta t}{2} u_j^n \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \left(-u_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} + Pr \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}\right) N_J d\Omega,$$

$$C_{IJ} = \int_{\Omega_E} \frac{\Delta t}{2} N_I \left(-u_k^n \frac{\partial u_j^n}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_k} -$$

$$Pr \frac{\partial^2 u_j^n}{\partial x_j \partial x_j} - RaPr \cos \theta_j T^n\right) N_J d\Omega,$$

$$P_I = \int_{\Omega_E} N_I \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{n-1}}{\partial x_i}\right)\right] d\Omega,$$

$$E_I = \int_{\Omega_E} N_I \left[\frac{1}{2} RaPr \cos \theta_j (T^n - T^{n-1})\right] d\Omega,$$

$$F_I =$$

$$\int_{\Omega_E} N_I \left(1 - \frac{\Delta t}{2} u_j^n \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \left(-\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + Pr Ra T^n \cos \theta_i\right) d\Omega$$

将单元的有限元方程迭加形成的总体有限元方程为

$$A u^{n+1} = (B u^n + C u^n + P + E + F) \Delta t + A u^n \quad (5)$$

能量方程的离散及总体方程形式为

$$R_{IJ} T_J^{n+1} = (S_{IJ} + Q_{IJ}) T_J^n + R_{IJ} T_J^n \quad (6)$$

$$\text{其中 } R_{IJ} = \int_{\Omega_E} N_I \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}\right) N_J d\Omega,$$

$$S_{IJ} =$$

$$\int_{\Omega_E} N_I \left(1 - \frac{\Delta t}{2} u_j^n \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \left(-u_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}\right) N_J d\Omega,$$

$$Q_{IJ} = \int_{\Omega_E} -N_I \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} N_J d\Omega$$

对应的总体有限元方程为

$$RT^{n+1} = (S + Q)T^n + RT^n \quad (7)$$

2.3 初始及边界条件

对于给定的方腔, 速度场的初始值全场取值为零, 并且在固壁处采用无滑移边界条件, 温度场的边界条件采用左侧固壁加热, 右侧固壁冷却, 上下壁面采用绝热条件, 除去各固壁处, 全场初始温度设为零, 具体的边界条件如下

$$x = 0: u = 0, v = 0, T = 1 \quad (8)$$

$$x = 1: u = 0, v = 0, T = 0 \quad (9)$$

$$y = 0: u = 0, v = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$y = 1: u = 0, v = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

2.4 相关参数

对于自然对流问题所关心的参量除去速度场和温度场的分布之外, 还需分析不同 Pr 和 Ra 条件下 Nu 的变化趋势, 本文采用全域平均的 Nu 进行相关的分析。

3 计算结果分析

对于给定几何边界参数和物理边界条件的封闭方腔内的自然对流流动过程, 其第一次分岔的数值预报精度主要取决于计算所采用时空离散格式的精度和网格的特性 (结构、非结构、密度)。本文在保证计算精度的前提下, 采用均匀的结构化网格, 并设计五套不同的网格, 重复计算 Davis 所研究的问题, 以确定网格参量对计算精度的影响。并在此基础上从精度要求和计算量大小之间平衡的角度出发, 确定出基本的网格参量, 结合

分半法对相应流体在不同 Ra 条件下流动拓扑进行仔细分析, 确定出所研究流动第一次分岔所对应的 Ra , 并初步分析 Pr 对其取值即物理过程的影响。

3.1 网格密度对计算结果的影响

采用 $Pr=0.71$ 和 $Ra=10^3$ 的二维方腔内的自然对流问题作为基本算例, 分析不同网格密度对计算精度的影响, 具体结果如表 1、图 1、图 2 所示。表 1 给出了不同网格密度条件下, 收敛时垂直中心线上最大水平速度及其位置和水平中心线上最大垂直速度及其位置, 对应的两条速度阔线如图 2 所示。

表 1 不同网格密度的计算结果

网格参数	y	v_{max}	x	\overline{Nu}
31×31	0.800000	3.704088	0.166667	1.115254
51×51	0.820000	3.703260	0.180000	1.118537
61×61	0.816667	3.700078	0.183333	1.118923
81×81	0.812500	3.701353	0.175000	1.118912
100×100	0.810000	3.702972	0.180000	1.118334
文献[1]	0.813	3.697	0.178	1.118
文献[2]	-	-	-	1.116

从表 1 中可以看出, 所采用的方法在不同的网格密度条件下, 各相应参量的取值有一定程度的变化, 但都与文献中所提供的结果吻合良好, 表明所采用的二阶全展开 ETG 分裂步有限元方法具有较高的精度。从计算量和精度的要求出发, 本文决定采用节点数为 61×61 的均匀网格进行后续计算。图 1 和图 2 分别给出此网格条件下, 收敛解的流函数、等温线以及特定截面处的速度阔线。

对于二维方腔内的自然对流问题, 流动的拓扑将随着 Ra 的增加首先在不同结构的定常层流流动结构之间变化, 这种结构一般会从单一涡经过第一次分岔变化为一对涡, 当这一对涡对称时相关文献将其定义为“猫眼”。对定常层流而言, 自然对流流动拓扑从单一涡到一对涡的变化过程中, 就经历了从“枣核型”到“棒槌型”, 经“葫芦型”再发展到“猫眼”这样一个复杂的过程。而第一次分岔发生在前两种拓扑形状之间, 采用分半法确定出两种流体发生第一次分岔的具体过程并给出相应的 Ra , 并进行相应的比较分析。

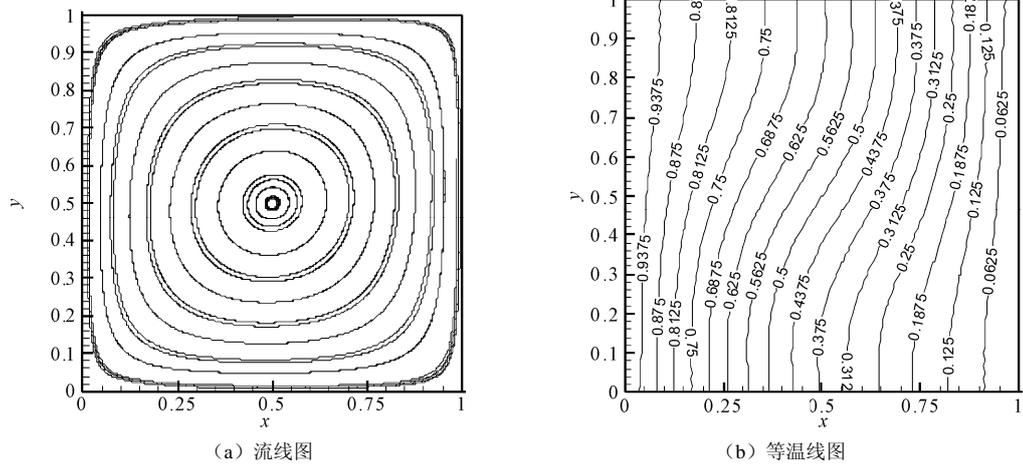


图 1 $Ra=103$ 收敛解

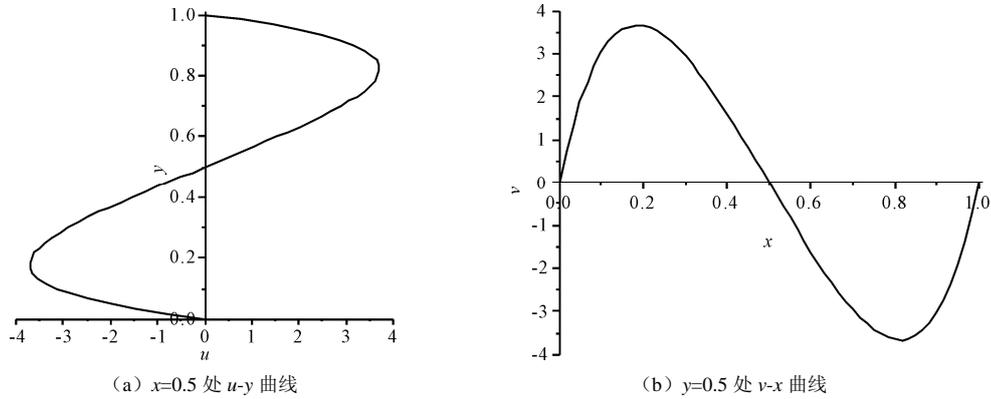
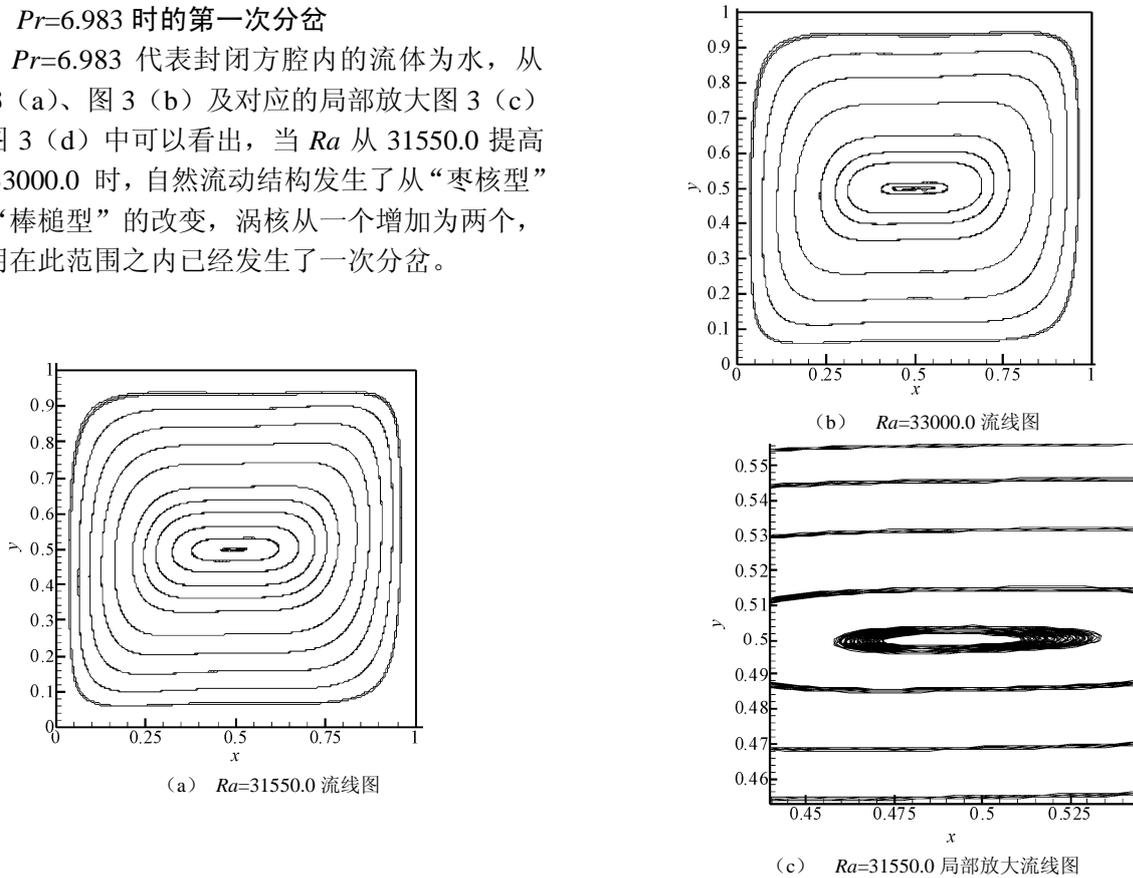


图 2 特定截面处速度曲线图

3.2 $Pr=6.983$ 时的第一次分岔

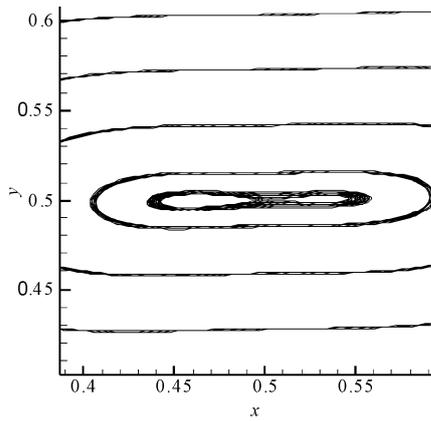
$Pr=6.983$ 代表封闭方腔内的流体为水，从图 3 (a)、图 3 (b) 及对应的局部放大图 3 (c) 和图 3 (d) 中可以看出，当 Ra 从 31550.0 提高至 33000.0 时，自然流动结构发生了从“枣核型”到“棒槌型”的改变，涡核从一个增加为两个，说明在此范围之内已经发生了一次分岔。



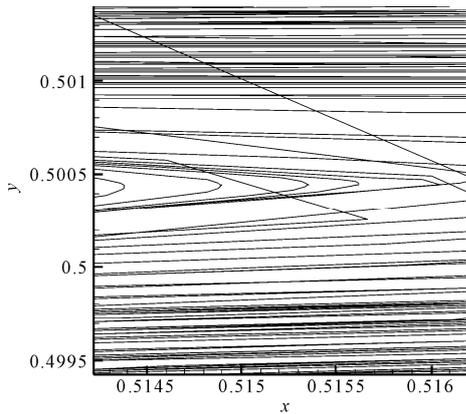
(a) $Ra=31550.0$ 流线图

(b) $Ra=33000.0$ 流线图

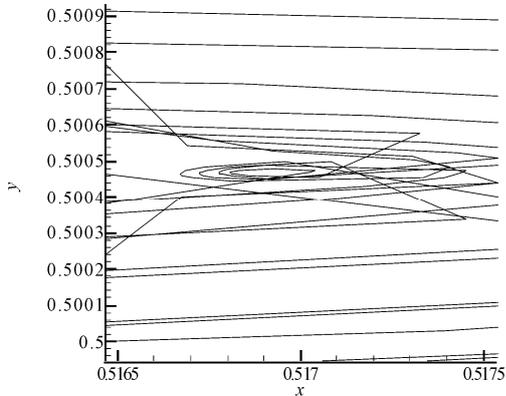
(c) $Ra=31550.0$ 局部放大流线图



(d) $Ra=33000.0$ 局部放大流线图



(e) $Ra=32875.0$ 局部放大流线图



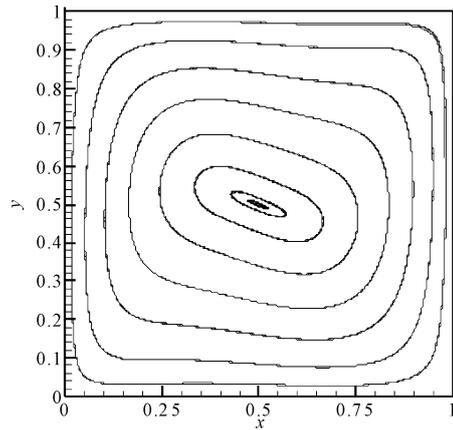
(f) $Ra=32876.0$ 局部放大流线图

图 3 流体为水时不同 Ra 数条件下流线图及其局部放大

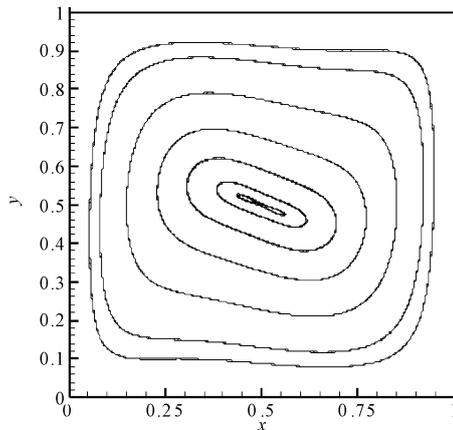
为了精确捕捉到分岔对应的 Ra 以及涡结构的变化。因 $Ra_{Cr} \in (31550, 33000)$ ，在上述区间内采用分半法，进行大量的计算分析。以 $Ra=32875.0$ 和 $Ra=32876.0$ 时的计算结果为例，如图 3 (e) 和图 3 (f) 所示。同样的局部区域 $Ra=32875.0$ 时，流动拓扑只显示一个涡核，而在 $Ra=32876.0$ 时，第二个涡核被捕捉到，“棒槌结构”已经完全成型，流动出现了双涡核的结构。由于此处局部流动的突变，相应流线图的变化也较为剧烈。进一步采用分半法确定封闭方腔内水的自然对流流动发生第一次分岔对应的 Ra 取值为 32875.5。

3.3 $Pr = 0.733$ 时的第一次分岔

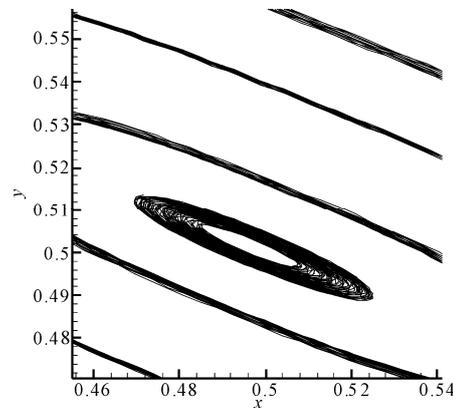
采用与方腔内水自然流动相同的分析过程，首先大致计算发生第一次分岔的 Ra 取值范围，其条件是流动涡核从 1 个增加为 2 个，如图 4(a)~ 4(d) 所示。结合流动拓扑的变化，并采用区间分半的方法，逐步缩小计算分析的区间，从图 4(e)和图 4(f) 中可得出封闭方腔内空气自然对流流动发生第一次分岔的 Ra 应约为 31159.5。



(a) $Ra=30000.0$ 流线图



(b) $Ra=32000.0$ 流线图



(c) $Ra=30000.0$ 流线局部放大图

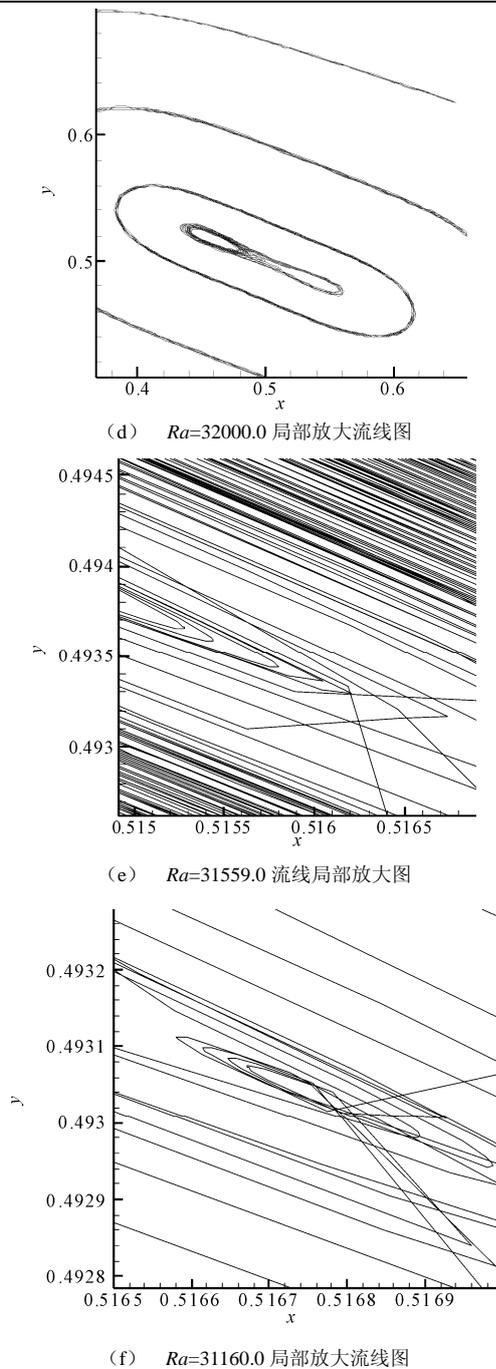


图4 流体为空气时不同 Ra 数条件下流线图及其局部放大

3.4 结果对比

从上述两个小节之中的计算结果可以看出, Pr 或者说封闭方腔内流体的属性直接影响着方腔内自然对流, 相应流动拓扑之间具有较大的差异。封闭方腔内空气的自然对流产生的流动有较大的“倾斜性”, 而水对应的自然流动这种“倾斜性”则小很多, 且空气的自然对流相对来说更容易产生第一次分岔。空气和水作为自然界和工程中最常见的两种流体介质, 其第一次分岔特性和流动拓扑存在的明显差异, 说明在封闭方腔自然对流流动特征分析和进行流动控制是必须适当考虑流体介质本身的属性。

4 结论

基于二阶 Taylor 展开的分裂步有限元方法, 通过采用空间项来表达时间项的技术, 在捕捉封闭方腔内自然对流流动涡结构的时空演化过程方面具有较强的优势, 同时能够提供足够的计算精度。在保证计算精度和效率的前提下, 本文分析了不同网格密度对特定流动数值分析的影响并由此确定出合适的网格密度参数。在此基础上本文分析了水和空气两种常见流体在封闭方腔内自然对流发生第一次分岔的过程, 结果显示流动涡核拓扑随着 Ra 的增加, 在相应的 Ra 取值条件下, 方腔中心区域流动拓扑, 都将发生从“枣核型”到“棒槌型”再到“葫芦型”的变化, 并采用分半法确定其数值的大小分别为 32875.5 和 31159.5。其中从“枣核型”到“棒槌型”的变化过程, 流动拓扑结构在定常层流范围内发生了以此明显的局部突变, 对应拓扑结构的变化表现为涡核数目的突变, 而从“棒槌型”到“葫芦型”的变化, 则体现为第二个涡核能量的增强, 其形状随 Ra 的增加从小向大逐步增加, 但仍然是具有双涡核的拓扑结构。本文将从“枣核型”到“棒槌型”突变的临界点定义为封闭方腔内自然流动的第一次分岔, 可以初步得出如下结论, 随着 Pr 的不同, 封闭方腔内不同流体发生第一次分岔的拓扑结构的变化具有相同的基本过程和特征。相比之下, 封闭方腔内流体为空气时更容易发生分岔, 但对应临界 Ra 取值范围变化的幅度并不是非常大, 或者说封闭方腔内自然对流问题的第一次分岔现象对应的 Ra 的取值对 Pr 并不是非常敏感。

参考文献

- [1] Davis G. Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution[J]. Int J Numer Methods Fluids, 1983, 3: 249-264.
- [2] Ostrach S. Natural convection in enclosures[J]. J Heat Trans, 1988, 110(50): 1175-1189.
- [3] Aydin O, Unal A, Ayhan T. Natural convection in rectangular enclosures heated from one side and cooled from the ceiling[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1999, 42: 2345-2355.
- [4] Ganzarolli M M, Milanez L F. Natural convection in rectangular enclosures heated from below and symmetrically cooled from the sides[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1995, 38: 1063-1073.
- [5] Xia C, Murthy J Y. Buoyancy-driven flow transitions in cavities heated from below[J]. Trans ASME, 2002, 124: 650-659.

- [6] Crunkleton D W, Narayanan R, Anderson T J. Numerical simulations of periodic flow oscillations in low Prandtl number fluids[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2006, 49: 427-438.
- [7] Dalal A, Das M K. Natural convection in a rectangular cavity heated from below and uniformly cooled from the top and both sides[J]. *Numer Heat Transfer Part A*, 2006, 49: 301-322.
- [8] Sharif M A R, Mohammad T R. Natural convection in cavities with constant flux heating at the bottom wall and isothermal cooling from the side wall[J]. *Int Therm Sci*, 2005, 44: 865-878.
- [9] Kao P H, Chen Y H, Yang R J. Simulations of the macroscopic and mesoscopic natural convection flows within rectangular cavities[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, 51: 3776-3793.
- [10] 王小华, 孙海鸥, 何钟怡. 船用气水分离器惯性级流场分析及阻力特性研究[J]. *应用力学学报*, 2003, 20(1): 89-93.
- [11] Wang X H, Wei Y J, Shen X R. Numerical investigation of the first bifurcation for natural convection of fluids enclosed in a 2D square cavity with Pr lower than 1.0[J]. *Energy Convers Manage*, 2009, 50(10): 2504-2512.