

# 压电材料反平面界面裂纹的杂交元分析

平学成<sup>1</sup> 陈梦成<sup>1</sup> 谢基龙<sup>2</sup>

(华东交通大学 330013 南昌)<sup>1</sup> (北京交通大学 100044 北京)<sup>2</sup>

**摘要:** 基于奇异性电弹场数值特征解开发了一种新型反平面界面裂纹尖端单元。将新型单元与四节点压电 P-S 单元组装, 求解从绝缘到导通的任意电边界条件下, 压电结构反平面界面裂纹尖端电弹场的数值解。考察了层厚、载荷类型和裂纹面间电边界条件等对反平面界面裂纹尖端断裂参数的影响。算例证明新型单元能使 P-S 单元数显著降低, 计算结果更为精确。

**关键词:** 压电结构; 反平面问题; 界面裂纹; 部分导通

**中图分类号:** O346.1 **文献标识码:** A

## 1 引 言

层叠压电材料在机电器件和主动电子元件上广泛应用, 压电陶瓷的脆性使压电层中的裂纹问题备受关注。由于平面内电场和反平面机械载荷存在耦合关系, 需要考虑压电层界面裂纹的反平面问题<sup>[1-7]</sup>, 有限元法等数值分析技术得到了广泛应用<sup>[8]</sup>。本文基于文献[9-10]给出的奇异性电弹场数值特征解, 开发一种新型反平面界面裂纹尖端单元(简称新型单元), 将新型单元与传统四节点 P-S 单元结合, 用于求解压电结构反平面界面裂纹尖端的奇异性电弹场以及相应的断裂参数。

## 2 反平面问题裂纹尖端电弹场

压电材料裂纹尖端邻域的反平面奇异性电弹场一般可表示为<sup>[9-10]</sup>

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} w(r, \theta) \\ \phi(r, \theta) \end{Bmatrix} &= \sum_{n=1}^{N+M} k^{(n)} r^{\lambda_n+1} \begin{Bmatrix} W^{(n)}(\theta) \\ \Phi^{(n)}(\theta) \end{Bmatrix} \\
&= \sum_{n=1}^N [k_R^{(n)} \begin{Bmatrix} W_R^{(n)}(r, \theta) \\ \Phi_R^{(n)}(r, \theta) \end{Bmatrix} + k_I^{(n)} \begin{Bmatrix} W_I^{(n)}(r, \theta) \\ \Phi_I^{(n)}(r, \theta) \end{Bmatrix}] + \\
&\quad \sum_{n=1}^M k^{(n)} \begin{Bmatrix} W^{(n)}(r, \theta) \\ \Phi^{(n)}(r, \theta) \end{Bmatrix}, \\
\begin{Bmatrix} \tau(r, \theta) \\ \mathbf{D}(r, \theta) \end{Bmatrix} &= \sum_{n=1}^{N+M} k^{(n)} r^{\lambda_n} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\tau}^{(n)}(\theta) \\ \mathbf{D}^{(n)}(\theta) \end{Bmatrix} \\
&= \sum_{n=1}^N [k_R^{(n)} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_R^{(n)}(r, \theta) \\ \boldsymbol{\Gamma}_R^{(n)}(r, \theta) \end{Bmatrix} + k_I^{(n)} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_I^{(n)}(r, \theta) \\ \boldsymbol{\Gamma}_I^{(n)}(r, \theta) \end{Bmatrix}] + \\
&\quad \sum_{n=1}^M k^{(n)} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}^{(n)}(r, \theta) \\ \boldsymbol{\Gamma}^{(n)}(r, \theta) \end{Bmatrix} \tag{1}
\end{aligned}$$

其中:  $w$ 、 $\phi$ 、 $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{rz}, \tau_{\theta z}\}^T$ 、 $\mathbf{D} = \{D_r, D_\theta\}^T$  分别为极坐标下的反平面位移、电势、切应力矢量、电位移矢量;  $\lambda_n$  为特征值,  $-1 \leq \text{Re}(\lambda_n) \leq \text{Re}(\lambda_{n+1})$ ;  $N$

为截取的复特征值个数;  $M$  为截取的实特征值个数; 下标“R”和“I”分别表示实部和虚部;  $W^{(n)}$ 、 $\Phi^{(n)}$ 、 $\tau^{(n)}$ 、 $D^{(n)}$  分别为角分布函数, 特征值、角分布函数的数值解, 均可通过文献[10]的有限元特征分析法得到。只要调整裂纹面间介质的相对介电常数  $k_r$  的大小, 即可实现从绝缘到导通条件下的任意电边界条件。  $W^{(n)}$ 、 $\Phi^{(n)}$ 、 $S^{(n)}$ 、 $\Gamma^{(n)}$  为实特征值对应的中间变量;  $W_l^{(n)}$ 、 $\Phi_l^{(n)}$ 、 $S_l^{(n)}$ 、 $D_l^{(n)}$  ( $l = R, I$ ) 为复特征值对应的中间变量。上标“(n)”表示对应于特征值  $\lambda_n$  的系数和中间变量。需要指出的是, 所截取的  $n$  个特征值中, 只有少数几个是奇异性特征值, 大部分都是为了使结果更精确而截取的高阶项。

将式(1)中极坐标下的反平面电弹场转换到笛卡尔坐标下, 即

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w \\ \phi \end{Bmatrix} &= T_d \begin{Bmatrix} w(r, \theta) \\ \phi(r, \theta) \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{n=1}^N [k_R^{(n)} \begin{Bmatrix} W_{CR}^{(n)} \\ \Phi_{CR}^{(n)} \end{Bmatrix}] + \sum_{n=1}^N [k_I^{(n)} \begin{Bmatrix} W_{CI}^{(n)} \\ \Phi_{CI}^{(n)} \end{Bmatrix}] + \\ &\quad \sum_{n=1}^M k^{(n)} \begin{Bmatrix} W_C^{(n)} \\ \Phi_C^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_C \\ \Phi_C \end{Bmatrix} \{k\}, \\ \begin{Bmatrix} \tau \\ D \end{Bmatrix} &= \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, D_x, D_y\}^T \\ &= [T_s] \begin{Bmatrix} \tau(r, \theta) \\ D(r, \theta) \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{n=1}^N [k_R^{(n)} \begin{Bmatrix} S_{CR}^{(n)} \\ \Gamma_{CR}^{(n)} \end{Bmatrix}] + k_I^{(n)} \begin{Bmatrix} S_{CI}^{(n)} \\ \Gamma_{CI}^{(n)} \end{Bmatrix}] + \\ &\quad \sum_{n=1}^M k^{(n)} \begin{Bmatrix} S_C^{(n)} \\ \Gamma_C^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_C \\ D_C \end{Bmatrix} \{k\} \end{aligned} \quad (2)$$

其中:  $\tau = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T$  和  $D = \{D_x, D_y\}^T$  分别为直角坐标下的切应力和电位移矢量;  $w$  和  $\phi$  分别为直角坐标下的位移和电势分量; 下标“C”表示经过坐标转换后的重新定义的中间变量;  $[T_d]$  和  $[T_s]$  为转换矩阵。待定系数

$$\{k\} = \{k_R^{(1)}, k_I^{(1)}, \dots, k_R^{(N)}, k_I^{(N)}, k^{(1)}, \dots, k^{(M)}\}^T$$

最终求解电弹场, 需要确定  $2N+M$  个待定系数。

### 3 新型单元模型

#### 3.1 界面裂纹尖端邻域的泛函

按照平面问题的广义 Hellinger-Reissner 变分求解原理<sup>[11]</sup>, 两相压电材料反平面问题的泛函可表示为

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{i=1}^2 \int_{V_n} \left( -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \tau \\ D \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} S & g^T \\ g & -f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \\ D \end{Bmatrix} \right) dV_i + \\ &\quad \sum_{i=1}^2 \int_{V_n} \left( \begin{Bmatrix} \tau \\ D \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_m & 0 \\ 0 & D_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \phi \end{Bmatrix} \right) dV_i - \\ &\quad \sum_{i=1}^2 \int_{S_w} [(n_m \delta \tau)^T (w - \bar{w})] dS_i - \\ &\quad \sum_{i=1}^2 \int_{S_\phi} [(n_m \delta \tau)^T (\phi - \bar{\phi})] dS_i - \\ &\quad \sum_{i=1}^2 \int_{S_\tau} \bar{T}^T w dS_i - \sum_{i=1}^2 \int_{S_D} \bar{\omega}^T \phi dS_i \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $i=1,2$  代表两种不同的压电材料; 上划线表示边界值;  $S$ 、 $g$ 、 $f$  分别为材料弹性常数、压电常数、介电常数矩阵;  $S_\tau$  表示反平面张力  $\bar{T}$  作用的边界;  $S_w$  表示位移  $\bar{w}$  作用的边界; 微分算子矩阵  $D_m$  和法线向量  $n_m$  可分别为

$$D_m = \{\partial/\partial x \quad \partial/\partial y\}^T, \quad n_m = \{n_x \quad n_y\}$$

利用散度定理, 可将式(3)中的体积分转化为围绕邻域周界  $S_n$  的曲线积分形式, 即

$$\begin{aligned} \Pi &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{S_n} \left[ \begin{bmatrix} n_m & 0 \\ 0 & n_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \\ D \end{Bmatrix} \right]^T \begin{Bmatrix} w \\ \phi \end{Bmatrix} dS_i + \\ &\quad \sum_{i=1}^2 \int_{S_w \cup S_\phi} \left[ \begin{bmatrix} n_m & 0 \\ 0 & n_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \\ D \end{Bmatrix} \right]^T \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\phi} \end{Bmatrix} dS_i \end{aligned} \quad (4)$$

其中边界  $S_n = S_\tau \cup S_w \cup S_D \cup S_\phi$

#### 3.2 新型单元的有限元方程

为了便于与全域四节点反平面杂交应力元组装, 在裂纹尖端邻域定义 9 节点裂纹尖端单元 (图 1), 单元的电弹场  $w^e$ 、 $\phi^e$ 、 $\tau^e$ 、 $D^e$  可通过式(2)得到, 即

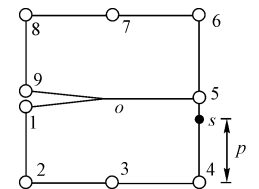


图 1 界面裂纹尖端奇异单元

$$\begin{Bmatrix} w^e \\ \phi^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_C^e \\ \Phi_C^e \end{Bmatrix} \{k\}, \quad \begin{Bmatrix} \tau^e \\ D^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_C^e \\ D_C^e \end{Bmatrix} \{k\} \quad (5)$$

边界位移和电势  $\{\bar{w}^e, \bar{\phi}^e\}^T$  用相邻两节点位移和电势值  $\{\bar{W}^e, \bar{\Phi}^e\}^T$  的插值表示为

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}^e \\ \bar{\phi}^e \end{Bmatrix} = [L] \{\bar{W}_i^e, \bar{\Phi}_i^e, \bar{W}_{i+1}^e, \bar{\Phi}_{i+1}^e\}^T, \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (6)$$

其中  $[L]$  是根据一维 Lagrangian 插值方法得到的插值函数矩阵, 所以单元节点上位移和电势的连续性自动满足。由于每个节点包含两个自由度,  $[L]$  可以假定为

$$[L] = \left[ \left(1 - \frac{s}{l}\right) I_2 \quad \frac{s}{l} I_2 \right] \quad (7)$$

其中  $I_2$  为 2 阶单位矩阵。

将式(5)~式(7)代入泛函式(4)得

$$\Pi^e = -\frac{1}{2} \{k\}^T [H]^e \{k\} + \{k\}^T [G]^e \begin{Bmatrix} \bar{W}^e \\ \bar{\Phi}^e \end{Bmatrix} \quad (8)$$

其中  $[G]^e = \sum_{i=1}^2 \int_{S_n} \left\{ \begin{bmatrix} n_m & 0 \\ 0 & n_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_c^e \\ D_c^e \end{Bmatrix} \right\}^T [L] dS_i$ ,

$$[H]^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{S_n} \left( \begin{bmatrix} n_m & 0 \\ 0 & n_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_c^e \\ \Gamma_c^e \end{Bmatrix} \right)^T \begin{Bmatrix} W_c^e \\ \Phi_c^e \end{Bmatrix} dS_i +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{S_n} \left( \begin{Bmatrix} W_c^e \\ \Phi_c^e \end{Bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} n_m & 0 \\ 0 & n_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_c^e \\ D_c^e \end{Bmatrix} dS_i,$$

$$\{\bar{W}^e, \bar{\Phi}^e\}^T = \{\bar{W}_1^e, \bar{\Phi}_1^e, \dots, \bar{W}_9^e, \bar{\Phi}_9^e\}$$

根据泛函  $\Pi^e$  的静态值

$$\{k\} = ([H]^e)^{-1} [G]^e \begin{Bmatrix} \bar{W}^e \\ \bar{\Phi}^e \end{Bmatrix} \quad (9)$$

将上式代入式(10)得

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \bar{W}^e \\ \bar{\Phi}^e \end{Bmatrix}^T [K_h]^e \begin{Bmatrix} \bar{W}^e \\ \bar{\Phi}^e \end{Bmatrix} \quad (10)$$

其中  $[K_h]^e = ([G]^e)^T ([H]^e)^{-1} [G]^e$  定义为新型单元的单元矩阵。

## 4 算例与讨论

图 2 为含界面裂纹的两相压电接合材料, 受到面内电载荷和反平面剪切载荷。界面裂纹右尖端的

应力强度因子和电位移强度因子为<sup>[6]</sup>

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \tau_{\theta z} |_{\theta=0}, \quad K_{IV} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} D_{\theta} |_{\theta=0} \quad (11)$$

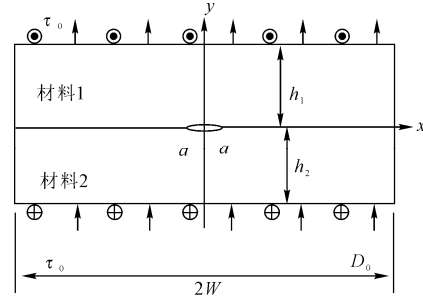


图 2 压电接合材料界面裂纹

界面裂纹问题的能量释放率可表示为<sup>[12]</sup>

$$G = G_{III} + G_{IV} = \frac{\pi}{4} [M(1,1) K_{III}^2 + 2M(1,2) K_{III} K_{IV} + M(2,2) K_{IV}^2] \quad (12)$$

其中  $M$  为包含材料常数的矩阵。

算例中用到 PZT5H 和 PZT6B 两种压电材料的材料常数见文献[6]。

### 4.1 考核算例

考察 PZT5H 无限大板, 假定裂纹面电绝缘, 网格划分见图 3。表 1 列出了分别作用机械载荷和电位移载荷的应力强度因子和电位移强度因子。可以看出, 网格加密收敛性提高。系数  $k$  的个数选取要适当, 根据 LBB 条件, 至少需要  $\text{Dim}(k) \geq 16$ 。表中  $\text{Dim}(k) = 14$  时不满足 LBB 条件, 误差较大。 $\text{Dim}(k) = 16$  时得到的结果最为精确。计算中发现,  $k$  的阶数过多 (比如  $\text{Dim}(k) = 18$ ) 也会导致精度的下降。考察网格 c 和  $\text{Dim}(k) = 16$  所得到的结果与文献[1]的相对误差: 机械载荷作用时, 误差分别为 0.215% 和 3.827%; 电位移载荷作用时, 误差分别为 0 和 0.203%。总之, 由于避免了裂尖邻域的高密度网格划分, 最多只采用了 405 个单元, 计算精度令人满意。

假设材料 1 为 PZT5H, 材料 2 为 PZT6B。图 4 考察了量纲一化应力强度因子  $K_{III} / \tau_0 \sqrt{a}$  与量纲一化的试样厚度  $a/H$  ( $H = h_1 = h_2$ ) 之间的关系。对比文献[6]可见, 本文解的误差绝对值小于 1.36%, 说明本文方法处理界面裂纹问题效果满意。

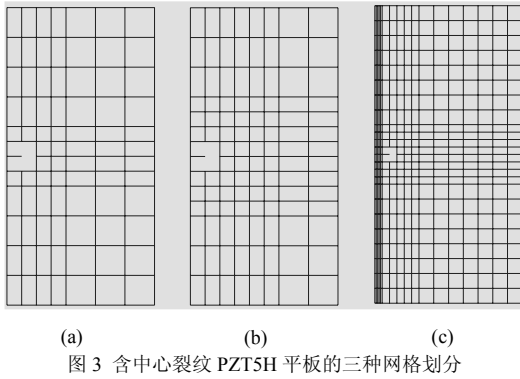


图3 含中心裂纹 PZT5H 平板的三种网格划分

假设材料 1 和材料 2 与核算例相同,  $h_2 = \infty$ , 考察厚度  $h_1$  的影响。机电耦合载荷作用下 ( $\tau_0 = 1.0\text{MPa}$ ,  $D_0 = 1000.0\text{pC/mm}^2$ ), 应力强度因子  $K_{III}$ 、电位移强度因子  $K_{IV}$  和能量释放率  $G$  和  $G_{III}$  的结果如图 5~图 8 所示。这些参数均随着板厚的增大而减小, 说明压电层越薄破坏的危险增大。注意到裂纹面间的介质的相对介电常数  $k_r$  增加,  $K_{III}$  基本不受影响,  $K_{IV}$  和  $G_{III}$  则呈现下降趋势, 而  $G$  却呈现上升趋势。

4.2 层厚对断裂参数的影响

表 1 网格划分和  $\text{Dim}(k)$  对  $K_{III}/\sqrt{a}$  ( $\text{N/mm}^2$ ) 和  $K_{IV}/\sqrt{a}$  ( $\text{pC/mm}^2$ ) 收敛的影响

载荷类型	网格	$\text{Dim}(k)=14$	$\text{Dim}(k)=16$	$\text{Dim}(k)=18$	文献 [1]
$\tau_0 = 1.0\text{MPa}$	a	0.98762, -0.05217	0.99315, -0.05365	0.98881, -0.05429	
	b	0.99391, -0.04351	0.99472, -0.04436	0.99578, -0.04678	1.0, 0.0
	c	1.00279, -0.04614	1.00215, -0.03827	1.00233, -0.03924	
$D_0 = 1000.0\text{pC/mm}^2$	a	-0.00247, 1004.36	-0.00865, 1004.10	-0.00357, 1004.14	
	b	-0.00085, 1003.01	-0.00008, 1002.94	-0.00007, 1003.12	0.0, 1000.0
	c	-0.00000, 1002.43	-0.00000, 1002.03	-0.00000, 1002.35	

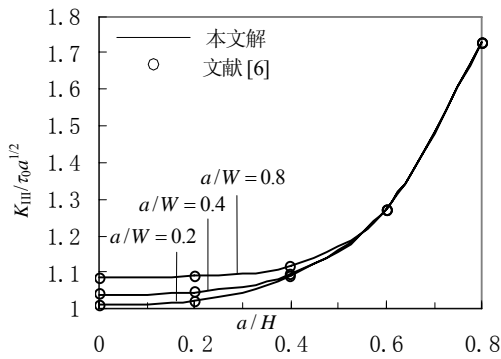


图4  $K_{III}$ 与 $a/H$ 的关系( $W$ 固定)

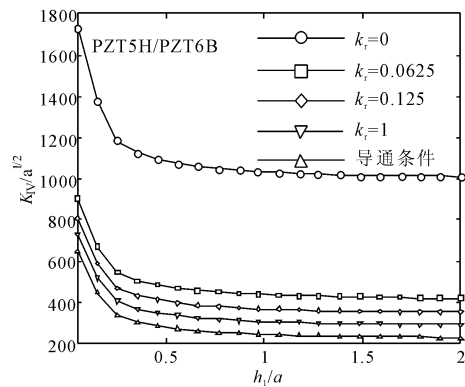


图6  $K_{IV}$ 与 $h_1/a$ 的关系曲线

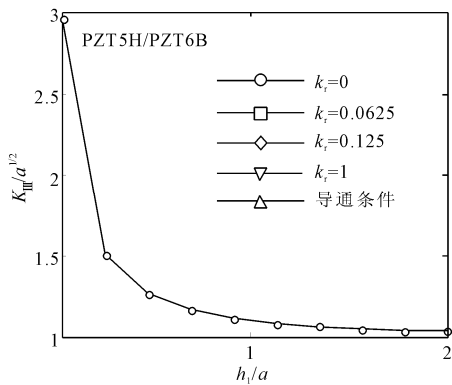


图5  $K_{III}$ 与 $h_1/a$ 的关系

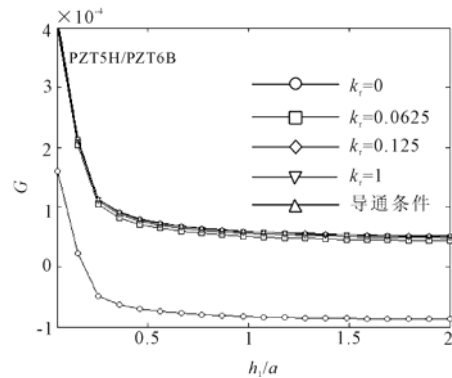


图7  $G$ 与 $h_1/a$ 的关系

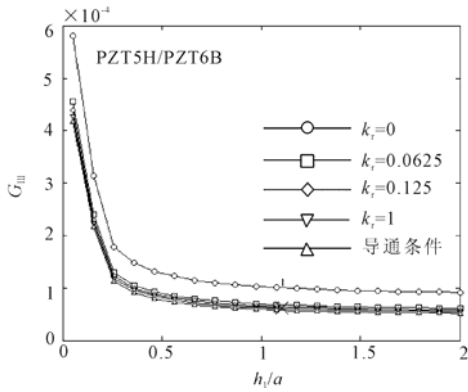


图8  $G_{III}$ 与 $h_1/a$ 的关系

### 4.3 电载荷对断裂参数的影响

固定机械载荷  $\tau_0$  和厚度  $h_1$  的情况下,  $D_0$  对断裂参数的影响如图 9 ~ 图 12 所示。  $D_0$  从 -1000 pC/mm<sup>2</sup> 增加到 1000 pC/mm<sup>2</sup>, 断裂参数  $K_{III}$ 、  $K_{IV}$  和  $G_{III}$  单调上升。随着  $k_r$  的增加, 所有断裂参数的变化幅度减小。这是因为随着裂纹面间介质导电性的提高, 电场奇异性会不断的下降, 从而使  $K_{III}$ 、  $K_{IV}$  和  $G_{III}$  受  $D_0$  的影响越来越小。可以看出, 不论  $k_r$  为多少, 断裂参数在  $D_0 \approx 260^\circ$  时的值均相同, 说明此时介质导电性不会对材料断裂性质产生任何影响。另外, 注意到  $G$  与其它的断裂参数的变化趋势差别较大, 在绝缘情况下 ( $k_r=0$ ) 这种现象最为明显。如果电载荷的绝对值达到一定程度, 不管正电场还是负电场,  $G$  都会出现小于 0 的情况, 即都会阻碍裂纹扩展, 这是与事实不符的, 所以  $G$  不适合作为断裂判据, 这与平面问题的论断类似。

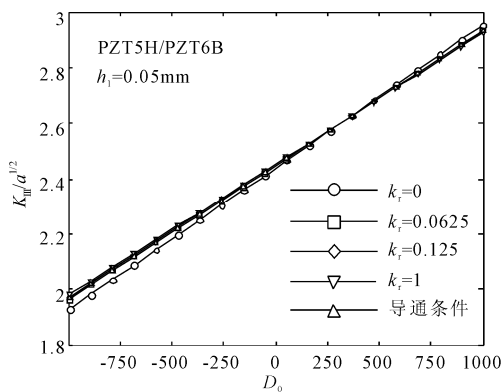


图9  $K_{III}$ 与 $D_0$ 的关系

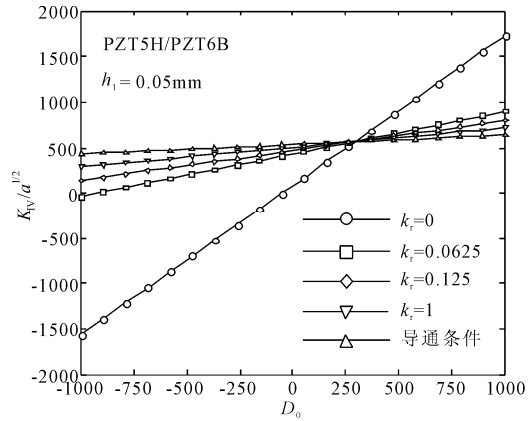


图10  $K_{IV}$ 与 $D_0$ 的关系

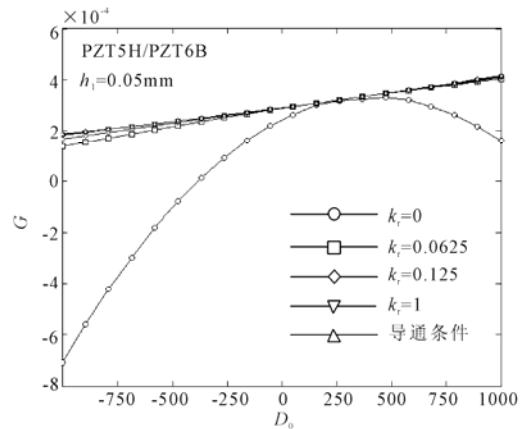


图11  $G$ 与 $D_0$ 的关系

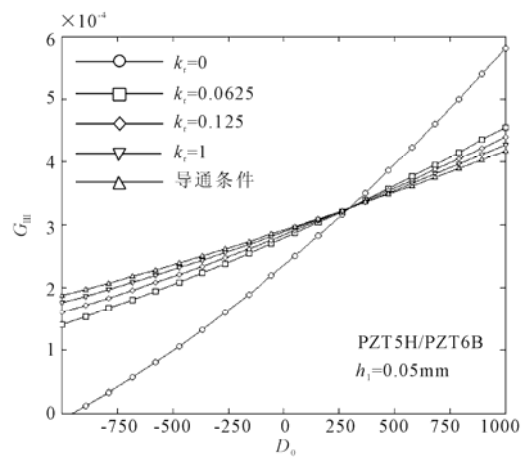


图12  $G_{III}$ 与 $D_0$ 的关系

## 5 结论

基于有限元特征分析方法开发出一种新型单元模型, 用于求解压电接合材料界面裂纹尖端电弹场的反平面问题。通过考核算例验证了模型的正确性和收敛性。该方法成功避免了奇异点附近的高密度网格划分, 不但使计算速度大幅提高, 而且计算

结果的精度较高。通过数值模拟发现：①两相压电材料界面裂纹的断裂参数 $K_{III}$ 受裂纹面间介质的导电性影响不明显；②随着层厚的增加， $K_{III}$ 和 $K_{IV}$ 的幅值下降，当层厚远大于裂纹长度时，两者趋于恒定值；③总能量释放率 $G$ 不适合作为反平面界面裂纹问题的断裂判据。

## 参 考 文 献

- [1] Zhang T Y, Tong P. Fracture mechanics for a mode III crack in a piezoelectric material[J]. International Journal of Solids and Structures, 1996, 33: 343-359.
- [2] 侯密山, 梅甫良. 不同压电材料反平面应变状态的电渗透型界面裂纹[J]. 科学通报, 1998, 43(2): 216-220.
- [3] Pak Y E, Goloubeva E. Electroelastic properties of cracked piezoelectric materials under longitudinal shear[J]. Mechanics of Materials, 1996, 24: 287-303.
- [4] Narita F, Shindo Y. Layered piezoelectric medium with interface crack under anti-plane shear[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1998, 30: 119-126.
- [5] Li X F, Tang G J. Antiplane interface crack between two bonded dissimilar piezoelectric layers[J]. European Journal of Mechanics-A: Solids, 2003, 22: 231-242.
- [6] Kwon S M, Lee K Y. Analysis of stress and electric fields in a rectangular piezoelectric body with a center crack under anti-plane shear loading[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37 (35): 4859-4869.
- [7] 曾云, 胡元太, Yang J S. 压电反平面裂纹问题中的电场梯度效应[J]. 华中科技大学学报, 2005, 22 (增刊): 31-35.
- [8] Qin Q H. Solving anti-plane problems of piezoelectric materials by the Trefftz finite element approach[J]. Computational Mechanics, 2003, 31: 461-468.
- [9] Sze K Y, Wang H T, Fan H. A finite element approach for computing edge singularities in piezoelectric materials[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38: 9233-9252.
- [10] Wang J, Chen W Q. Piezoelectricity, acoustic waves and device applications [M]. USA: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2006.: 107-112.
- [11] Zhang J Q, Zhang B N, Fan J H. A coupled electromechanical analysis of a piezoelectric layer bonded to an elastic substrate: Part I, development of governing equations[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40: 6781-6797.
- [12] 王保林. 压电材料及其结构的断裂力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.