УДК 517.984

Асимптотика собственных значений задачи высшего чётного порядка с дискретным самоподобным весом

А. А. Владимиров, И. А. Шейпак

Аннотация. В статье изучается вопрос об асимптотике спектра граничной задачи

$$(-1)^n\, y^{(2n)} - \lambda\rho y = 0,$$
$$y^{(k)}(0) = y^{(k)}(1) = 0, \qquad 0 \leqslant k < n,$$

в случае, когда порядок $2n$ уравнения удовлетворяет неравенству $n > 1$, а вес $\rho \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ представляет собой обобщённую производную самоподобной функции $P \in L_2[0,1]$ нулевого спектрального порядка.

§ 1. Введение

1. Целью настоящей статьи является распространение результатов работы [**1**] о спектральных асимптотиках граничной задачи

$$-y'' - \lambda\rho y = 0,$$
$$y(0) = y(1) = 0,$$

где вес $\rho \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ представляет собой обобщённую производную самоподобной функции $P \in L_2[0,1]$ нулевого спектрального порядка, на случай граничной задачи

$$(-1)^n\, y^{(2n)} - \lambda\rho y = 0, \tag{1}$$

$$y^{(k)}(0) = y^{(k)}(1) = 0, \qquad 0 \leqslant k < n, \tag{2}$$

отвечающей тому же классу весовых функций при $n > 1$. Используемая в настоящей статье техника в основном совпадает с развитой в работе [**1**]. Это, однако, не означает, что переход от частного случая $n = 1$ к общему носит чисто механический характер. Дополнительные трудности, возникающие в задаче высших порядков (в отличие от случая задачи Штурма–Лиувилля), будут указаны нами далее.

На протяжении всей статьи мы резервируем символ n для обозначения половины порядка уравнения (1).

2. Структура статьи имеет следующий вид. В § 2 приводятся необходимые для дальнейшего сведения о самоподобных функциях нулевого спектрального порядка. В § 3 даётся операторная трактовка задачи 1 (1), 1 (2) и доказываются некоторые вспомогательные утверждения. В § 4 устанавливаются основные результаты об асимптотике спектра задачи 1 (1), 1 (2). Наконец, в § 5 обсуждается конструктивный характер полученных результатов, а также приводятся иллюстрирующие эти результаты итоги численных экспериментов.

1) Работа поддержана РФФИ, грант № 10-01-00423.

§ 2. Квадратично суммируемые самоподобные функции нулевого спектрального порядка

1. Пусть зафиксировано натуральное число $N > 1$, и пусть вещественные числа $a_k > 0$, β_k и d_k, где $k = 1, \dots N$, удовлетворяют равенству

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = 1.$$

Указанному набору чисел можно поставить в соответствие непрерывное отображение $G : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ вида

$$G(f) \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{N} \left\{ \beta_k \cdot \chi_{(\alpha_{k-1},\alpha_k)} + d_k \cdot G_k(f) \right\}, \tag{1}$$

где использована следующая символика:

1°. Через α_k обозначены числа $\alpha_0 \rightleftharpoons 0$ и $\alpha_k \rightleftharpoons \alpha_{k-1} + a_k$ при $k = 1, \dots N$.

2°. Через χ_Δ обозначена характеристическая функция интервала Δ, рассматриваемая как элемент пространства $L_2[0,1]$.

3°. Через G_k, где $k = 1, \dots N$, обозначены непрерывные линейные отображения в пространстве $L_2[0,1]$, действующие на произвольно фиксированную функцию $f \in L_2[0,1]$ согласно правилу

$$[G_k(f)](x) \rightleftharpoons \begin{cases} f((x - \alpha_{k-1})/a_k) & \text{при } x \in (\alpha_{k-1}, \alpha_k), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отображения вида (1) будут далее называться *операторами подобия.* Имеют место следующие два простых факта:

1.1. *Действующий в пространстве* $L_2[0,1]$ *оператор подобия* G *является сжимающим в том и только том случае, когда выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \, |d_k|^2 < 1. \tag{2}$$

1.2. *Если выполняется неравенство* (2)*, то решение* $f \in L_2[0,1]$ *уравнения* $G(f) = f$ *существует и единственно.*

Функции, удовлетворяющие уравнению $G(f) = f$ с некоторым сжимающим оператором подобия G, мы будем называть *аффинно самоподобными*, или просто самоподобными. Определяющие оператор G числа a_k, β_k и d_k, где $k = 1, \dots N$, мы будем при этом называть *параметрами самоподобия* функции f.

2. Нетривиальная[1)] самоподобная функция называется функцией *нулевого спектрального порядка*, если её параметры самоподобия удовлетворяют следующим двум условиям:

1°. Среди чисел β_k, где $k = 1, \dots N$, по меньшей мере одно отлично от нуля.

2°. Среди чисел d_k, где $k = 1, \dots N$, в точности одно отлично от нуля.

[1)] То есть не являющаяся кусочно-постоянной с конечным числом точек разрыва.

В дальнейших рассуждениях о самоподобных функциях нулевого спектрального порядка через m мы будем обозначать натуральное число $m \in [1, N]$, удовлетворяющее соотношению $d_m \neq 0$. Неравенство 1 (2) при этом превращается в неравенство $a_m|d_m|^2 < 1$, из выполнения которого с очевидностью следует также выполнение неравенства $a_m^{2n-1}|d_m| < 1$.

3. Более подробные све́дения о квадратично суммируемых самоподобных функциях могут быть найдены в работах [**2**], [**3**].

§ 3. Операторная трактовка задачи и некоторые вспомогательные утверждения

1. Через $\mathfrak{H}$ мы далее будем обозначать пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$, снабжённое скалярным произведением

$$\langle y, z\rangle \rightleftharpoons \int\limits_0^1 y^{(n)}\overline{z^{(n)}}\,dx.$$

Через $\mathfrak{H}'$ мы при этом будем обозначать пространство, двойственное к $\mathfrak{H}$ относительно $L_2[0,1]$, то есть получаемое пополнением пространства $L_2[0,1]$ по норме

$$\|y\|_{\mathfrak{H}'} \rightleftharpoons \sup_{\|z\|_{\mathfrak{H}}=1} \left|\int\limits_0^1 y\overline{z}\,dx\right|.$$

Непосредственно из определения пространства $\mathfrak{H}'$ вытекает возможность непрерывного продолжения сопряжённого к оператору вложения $J : \mathfrak{H} \to L_2[0,1]$ оператора $J^* : L_2[0,1] \to \mathfrak{H}$ до изометрии $J^+ : \mathfrak{H}' \to \mathfrak{H}$.

Аналогично использованной в работе [**1**] трактовке задачи Штурма–Лиувилля, в качестве операторной модели задачи § 1.1 (1), § 1.1 (2) мы будем рассматривать линейный пучок $T_\rho : \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}')$ ограниченных операторов, удовлетворяющий тождеству

$$(1) \qquad (\forall\lambda \in \mathbb{C})\,(\forall y \in \mathfrak{H}) \qquad \langle J^+T_\rho(\lambda)y, y\rangle = \int\limits_0^1 \left(|y^{(n)}|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)'\right)\,dx.$$

Через P здесь, как и ранее, обозначена квадратично суммируемая обобщённая первообразная весовой функции $\rho \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$.

2. Через $\operatorname{ind} D$ мы далее будем обозначать отрицательный индекс инерции действующего в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{E}$ ограниченного эрмитова оператора D, то есть точную верхнюю грань размерностей подпространств $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, удовлетворяющих условию

$$(\exists\varepsilon > 0)\,(\forall y \in \mathfrak{M}) \qquad \langle Dy, y\rangle_{\mathfrak{E}} \leqslant -\varepsilon\,\|y\|^2_{\mathfrak{E}}.$$

3. Через $\mathfrak{H}_0$ мы далее будем обозначать замыкание линейной оболочки системы собственных функций пучка T_ρ. Имеют место следующие три факта:

3.1. *Ортогональным дополнением* $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$ *подпространства* $\mathfrak{H}_0$ *является множество функций* $y \in \mathfrak{H}$, *обращающихся в нуль на носителе* $\operatorname{supp} \rho \subseteq [0,1]$ *весовой функции* ρ.

Доказательство. Из определения 1(1) и общей теории самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве следует, что искомым ортогональным дополнением является множество функций $y \in \mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию

$$(\forall z \in \mathfrak{H}) \qquad \int\limits_0^1 P \cdot (y\overline{z})'\,dx = 0.$$

Данное условие равносильно указанному в формулировке доказываемого утверждения. □

3.2. *Пусть* λ — *вещественное число. Тогда существует подпространство* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}_0$ *размерности* $\operatorname{ind} J^+T_\rho(\lambda)$, *удовлетворяющее условию*

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall y \in \mathfrak{M}) \qquad \langle J^+T_\rho(\lambda)y, y\rangle \leqslant -\varepsilon\,\|y\|^2_{\mathfrak{H}}.$$

Для доказательства утверждения 3.2 достаточно заметить, что для любых функции $y \in \mathfrak{H}$ и её ортогональной проекции $z \in \mathfrak{H}_0$ выполняется неравенство

$$\langle J^+T_\rho(\lambda)z, z\rangle \leqslant \langle J^+T_\rho(\lambda)y, y\rangle.$$

3.3. *Для любой изолированной точки* $\xi \in \operatorname{supp}\rho$ *существует и единственна функция* $\varphi_\xi \in \mathfrak{H}_0$, *удовлетворяющая равенству* $\varphi_\xi(\xi) = 1$ *и обращающаяся в нуль на множестве* $\operatorname{supp}\rho \setminus \{\xi\}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $f \in \mathfrak{H}$, удовлетворяющую равенству $f(\xi) = 1$ и обращающуюся в нуль на множестве $\operatorname{supp}\rho \setminus \{\xi\}$. На роль искомой функции φ_ξ может быть теперь выбрана ортогональная проекция функции f на подпространство $\mathfrak{H}_0$ [3.1]. Для завершения доказательства остаётся лишь заметить, что любая функция $y \in \mathfrak{H}_0$ однозначно определяется своим ограничением на множество $\operatorname{supp}\rho$ [3.1]. □

4. Введём в рассмотрение два подпространства $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{H}_0$, определяемые следующим образом:

1°. Подпространство $\mathfrak{H}_1$ образовано всевозможными функциями $y \in \mathfrak{H}_0$, обращающимися в нуль на множестве $\operatorname{supp}\rho \setminus (\alpha_{m-1}, \alpha_m)$.

2°. Подпространство $\mathfrak{H}_2$ представляет собой линейную оболочку функций φ_ξ [3.3], отвечающих всевозможным точкам $\xi \in \operatorname{supp}\rho \setminus (\alpha_{m-1}, \alpha_m)$.

Рассмотрим два линейных пучка $A : \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_1)$ и $C : \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_2)$ ограниченных операторов, удовлетворяющие тождествам

$$(1) \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{C})\,(\forall y \in \mathfrak{H}_1) \qquad \langle A(\lambda)y, y\rangle = \int_0^1 \left(|y^{(n)}|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)'\right)\,dx,$$

$$(\forall \lambda \in \mathbb{C})\,(\forall y \in \mathfrak{H}_2) \qquad \langle C(\lambda)y, y\rangle = \int_0^1 \left(|y^{(n)}|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)'\right)\,dx,$$

а также оператор $B : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$, удовлетворяющий тождеству

$$(2) \qquad (\forall y \in \mathfrak{H}_1)\,(\forall z \in \mathfrak{H}_2) \qquad \langle By, z\rangle = \int_0^1 y^{(n)}\overline{z^{(n)}}\,dx.$$

Имеют место следующие два факта:

4.1. *Существует неотрицательный оператор $E : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ конечного ранга, для которого независимо от выбора значения $\lambda > 0$ выполняется равенство*

$$\operatorname{ind}[A(\lambda) + E] = \operatorname{ind} J^+ T_\rho(a_m^{2n-1} d_m\,\lambda).$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $S : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ вида

$$[Sy](x) \rightleftharpoons \begin{cases} y((x - \alpha_{m-1})/a_m) & \text{при } x \in (\alpha_{m-1}, \alpha_m), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

а также оператор $R : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}$, сопоставляющий каждой функции $y \in \mathfrak{H}_1$ ортогональную проекцию на подпространство $\mathfrak{H}_0$ функции вида

$$z(x) \rightleftharpoons \psi(x) y(\alpha_{m-1} + a_m x),$$

где $\psi \in W_2^n[0,1]$ — произвольно фиксированная функция, тождественно равная 1 на некоторой окрестности множества $\operatorname{supp}\rho$ и обращающаяся в нуль на некоторой окрестности множества $\{0,1\} \setminus \operatorname{supp}\rho$. Из утверждения 3.1 и факта самоподобия функции P следует, что для любой функции $y \in \mathfrak{H}_1$ справедливы следующие два положения:

1°. Ортогональная проекция функции SRy на подпространство $\mathfrak{H}_0$ совпадает с функцией y.

2°. Функция Ry есть единственный элемент подпространства $\mathfrak{H}_0$, ортогональная проекция S-образа которого на это же подпространство совпадает с функцией y.

Соответственно, оператор $E \rightleftharpoons R^*S^*SR - 1$ является неотрицательным. Из утверждения 3.1 и факта самоподобия функции P также следует, что на имеющем конечную коразмерность подпространстве функций $y \in \mathfrak{H}_1$, тождественно равных нулю вне интервала (α_{m-1}, α_m), выполняется равенство $SRy = y$. Тем самым, оператор E имеет конечный ранг.

Наконец, из определений 1 (1) и (1) с учётом утверждения 3.1 и факта самоподобия функции P легко выводится справедливость тождества

$$(\forall y \in \mathfrak{H}_1) \qquad \langle [A(\lambda) + E]y, y\rangle = a_m^{1-2n} \cdot \langle J^+ T_\rho(a_m^{2n-1} d_m\,\lambda) Ry, Ry\rangle.$$

Объединяя это тождество с утверждением 3.2 и вытекающим из сказанного ранее равенством $\operatorname{im} R = \mathfrak{H}_0$, убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения. $\square$

4.2. *Пусть λ — вещественное число, не принадлежащее спектру пучка C. Тогда выполняется равенство*

$$\operatorname{ind} J^+ T_\rho(\lambda) = \operatorname{ind}[A(\lambda) - B^* C^{-1}(\lambda) B] + \operatorname{ind} C(\lambda).$$

Доказательство. Прямым вычислением легко устанавливается, что для любых функций $y \in \mathfrak{H}_1$ и $z \in \mathfrak{H}_2$ выполняется равенство

$$\langle J^+ T_\rho(\lambda)\,(y+z), (y+z)\rangle = \langle [A(\lambda) - B^* C^{-1}(\lambda) B] y, y\rangle + \langle C(\lambda) u, u\rangle,$$

где положено $u \rightleftharpoons z + C^{-1}(\lambda) B y$. Объединяя это равенство с утверждением 3.2 и соотношением $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2$, убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения. $\square$

5. Рассмотрим величины ζ_k, где $k = 1, \dots N-1$, имеющие вид

$$\zeta_k \rightleftharpoons \begin{cases} \beta_m - \beta_{m-1} + d_m \beta_1 & \text{при } k = m-1, \\ \beta_{m+1} - \beta_m - d_m \beta_N & \text{при } k = m, \\ \beta_{k+1} - \beta_k & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим также через $\mathrm{Z}_\pm$ две величины

$$\mathrm{Z}_\pm \rightleftharpoons \#\{k \in [1, N-1] : \pm\zeta_k > 0\}.$$

Имеют место следующие два факта:

5.1. *Для любого достаточно большого вещественного числа $\lambda > 0$ выполняется равенство*

$$\operatorname{ind} C(\lambda) = \mathrm{Z}_+.$$

Справедливость утверждения 5.1 немедленно вытекает из легко проверяемого тождества

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathfrak{H}_2) \qquad \langle C(\lambda) y, y\rangle = \|y\|^2_{\mathfrak{H}} - \lambda \sum_{k=1}^{N-1} \zeta_k \cdot |y(\alpha_k)|^2. \tag{1}$$

5.2. *Пусть выполнено равенство $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = N-1$. Тогда для любого достаточно большого вещественного числа $\lambda > 0$ оператор $C(\lambda)$ является ограниченно обратимым, причём при $\lambda \to +\infty$ справедлива асимптотика*

$$\|C^{-1}(\lambda)\| = O(\lambda^{-1}).$$

Справедливость утверждения 5.2 также представляет собой несложное следствие тождества (1).

6. Имеют место следующие два факта:

6.1. *Пусть $\mathfrak{E}$ — конечномерное гильбертово пространство, $D : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ — неотрицательный оператор, а $F : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ — эрмитов оператор. Пусть также $\{\mu_k\}_{k=1}^r$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^r$, где положено $r \rightleftharpoons \operatorname{rank} F$ — списки сосчитанных с учётом кратности собственных значений пучков $1 - \lambda F$ и $1 + D - \lambda F$, соответственно. Тогда выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{r} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \leqslant \det(1 + D).$$

Доказательство. Разложим пространство $\mathfrak{E}$ в прямую сумму $\ker F \oplus \operatorname{im} F$ и рассмотрим отвечающие этому разложению блочно-матричные представления

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что спектр пучка $1 - \lambda F$ совпадает со спектром пучка $1 - \lambda F_{22}$, а спектр пучка $1 + D - \lambda F$ совпадает со спектром пучка $1 + D_{22} - D_{21}(1 + D_{11})^{-1} D_{12} - \lambda F_{22}$. Соответственно, имеют место равенства

$$\prod_{k=1}^{r} \mu_k = \frac{1}{\det F_{22}},$$
$$\prod_{k=1}^{r} \lambda_k = \frac{\det[1 + D_{22} - D_{21}(1 + D_{11})^{-1} D_{12}]}{\det F_{22}},$$

а потому и равенства

$$\prod_{k=1}^{r} \frac{\lambda_k}{\mu_k} = \det[1 + D_{22} - D_{21}(1 + D_{11})^{-1} D_{12}] = \frac{\det(1 + D)}{\det(1 + D_{11})}.$$

Отсюда и из факта неотрицательности операторов D и D_{11} немедленно вытекает справедливость доказываемого утверждения. □

6.2. *Пусть $\mathfrak{E}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $D : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ — неотрицательный оператор конечного ранга, а $F : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ — вполне непрерывный эрмитов оператор. Пусть также $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательности занумерованных в порядке возрастания (с учётом кратности) положительных собственных значений пучков $1 - \lambda F$ и $1 + D - \lambda F$, соответственно. Тогда последовательность частичных произведений бесконечного произведения*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \tag{1}$$

является неубывающей и ограниченной.

Доказательство. Заметим, что при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\operatorname{ind}[1+D-\lambda F] \leqslant \operatorname{ind}[1-\lambda F]$. Заметим также, что все положительные собственные значения пучков $1-\lambda F$ и $1+D-\lambda F$ имеют отрицательный тип (см., например, [**4**], [**5**]). Из общих вариационных принципов для самосопряжённых оператор-функций (см. там же) потому следует, что при любом $k \geqslant 1$ выполняется соотношение $\lambda_k \geqslant \mu_k$. Тем самым, последовательность частичных произведений бесконечного произведения (1) является неубывающей.

Далее, зафиксируем последовательность $\{Q_l\}_{l=1}^{\infty}$ имеющих конечный ранг ортопроекторов, сходящуюся в смысле сильной операторной топологии к единичному оператору и удовлетворяющую тождеству $Q_l D Q_l \equiv D$. Обозначим через $\{\mu_{k,l}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{k,l}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности[2)] занумерованных в порядке возрастания (с учётом кратности) положительных собственных значений пучков $1-\lambda Q_l F Q_l$ и $1+D-\lambda Q_l F Q_l$, соответственно. Аналогичным образом, через $\{\mu_{-k,l}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{-k,l}\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим последовательности занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений тех же пучков. Из упоминавшихся выше вариационных принципов вытекает, что количество $r_{+,l}$ положительных и количество $r_{-,l}$ отрицательных собственных значений пучка $1-\lambda Q_l F Q_l$ совпадают с таковыми для пучка $1+D-\lambda Q_l F Q_l$, причём выполняются неравенства

$$\begin{aligned} (\forall k \in [1, r_{+,l}]) \qquad\qquad & \lambda_{k,l} \geqslant \mu_{k,l}, \\ (\forall k \in [1, r_{-,l}]) \qquad\qquad & \lambda_{-k,l} \leqslant \mu_{-k,l}. \end{aligned}$$

С учётом этого обстоятельства соотношение

$$\prod_{k=1}^{r_{+,l}} \frac{\lambda_{k,l}}{\mu_{k,l}} \times \prod_{k=1}^{r_{-,l}} \frac{\lambda_{-k,l}}{\mu_{-k,l}} \leqslant \det(1+D) \tag{6.1}$$

означает, что при любом выборе индекса $r \leqslant r_{+,l}$ выполняются неравенства

$$\prod_{k=1}^{r} \frac{\lambda_{k,l}}{\mu_{k,l}} \leqslant \det(1+D).$$

При помощи предельного перехода отсюда немедленно выводится справедливость не зависящих от выбора индекса $r \geqslant 1$ оценок

$$\prod_{k=1}^{r} \frac{\lambda_{k}}{\mu_{k}} \leqslant \det(1+D),$$

означающих ограниченность последовательности частичных произведений бесконечного произведения (1). □

§ 4. Основные результаты

1. Имеют место следующие три факта:

1.1. *Пусть выполняются соотношения $d_m > 0$, $\mathrm{Z}_+ > 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = N-1$. Тогда существуют вещественные числа $\tau_l > 0$, где $l = 1, \dots \mathrm{Z}_+$, для которых последовательность*

[2)] Частичные, то есть не предполагающие определённости своих членов при каждом значении индекса $k \geqslant 1$.

$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *занумерованных в порядке возрастания (с учётом кратности) положительных собственных значений задачи § 1.1 (1), § 1.1 (2) удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотическому соотношению*

$$\lambda_{l+k\mathrm{Z}_+} = \tau_l \cdot (a_m^{2n-1} d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство. Согласно утверждению § 3.5.2, найдётся вещественное число $\lambda_0 > 0$, для которого при любом $\lambda > \lambda_0$ будет выполняться неравенство $\|C^{-1}(\lambda)\| < \lambda_0/(3\lambda)$. Отсюда и из очевидным образом получамой на основе определения § 3.4 (2) оценки $\|B\| \leqslant 1$ следует, что при любом $\lambda > \lambda_0$ будут выполняться неравенства

$$\operatorname{ind}[A(\lambda) + \lambda_0/(3\lambda)] \leqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) - B^* C^{-1}(\lambda) B] \leqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) - \lambda_0/(3\lambda)]. \tag{1}$$

С использованием немедленно вытекающих из определения § 3.4 (1) равенств

$$A(\lambda \pm \lambda_0/2) = (1 \pm \lambda_0/(2\lambda)) \cdot \left[A(\lambda) \mp \frac{\lambda_0}{2\lambda \pm \lambda_0}\right]$$

из оценок (1) легко выводятся оценки

$$\operatorname{ind} A(\lambda - \lambda_0/2) \leqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) - B^* C^{-1}(\lambda) B] \leqslant \operatorname{ind} A(\lambda + \lambda_0/2). \tag{2}$$

Обозначим теперь через $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность занумерованных в порядке возрастания (с учётом кратности) положительных собственных значений пучка A. Из оценок (2), утверждений § 3.4.2, § 3.5.1 и вариационных принципов для самосопряжённых оператор-функций (см., например, [**4**], [**5**]) следует выполнение при всех $k \gg 1$ неравенств

$$\mu_k - \lambda_0/2 \leqslant \lambda_{k+\mathrm{Z}_+} \leqslant \mu_k + \lambda_0/2,$$

а потому и асимптотического соотношения

$$\frac{\lambda_{k+\mathrm{Z}_+}}{\mu_k} = 1 + O(\lambda_{k+\mathrm{Z}_+}^{-1}). \tag{3}$$

С другой стороны, согласно утверждениям § 3.4.1 и § 3.6.2, последовательность частичных произведений бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(a_m^{2n-1} d_m) \cdot \mu_k}{\lambda_k} \tag{4}$$

является монотонной и ограниченной. Комбинируя этот факт с асимптотикой (3), устанавливаем, что независимо от выбора параметров $l \geqslant 1$ и $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотика

$$\lambda_{l+k\mathrm{Z}_+}^{-1} = O\big([(1+\varepsilon) \cdot a_m^{2n-1} d_m]^k\big),$$

означающая сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{l+k\mathrm{Z}_+}}{\mu_{l+(k-1)\mathrm{Z}_+}}.$$

Для завершения доказательства остаётся теперь лишь объединить последний факт с уже упомянутым ранее фактом монотонности и ограниченности последовательности частичных произведений бесконечного произведения (4). $\square$

l	k	λ_{l+2k}	$\lambda_{l+2k}/54^k$
1	0	$2,86\cdot 10^2 \pm 1\%$	$286{,}10 \pm 10^{-2}$
2	0	$1,38\cdot 10^3 \pm 1\%$	$1377{,}99 \pm 10^{-2}$
1	1	$1,48\cdot 10^4 \pm 1\%$	$273{,}71 \pm 10^{-2}$
2	1	$6,83\cdot 10^4 \pm 1\%$	$1265{,}31 \pm 10^{-2}$
1	2	$7,91\cdot 10^5 \pm 1\%$	$271{,}33 \pm 10^{-2}$
2	2	$3,69\cdot 10^6 \pm 1\%$	$1264{,}04 \pm 10^{-2}$
1	3	$4,27\cdot 10^7 \pm 1\%$	$271{,}32 \pm 10^{-2}$
2	3	$1,99\cdot 10^8 \pm 1\%$	$1264{,}04 \pm 10^{-2}$

Таблица 1. Оценки первых собственных значений для случая $n = 2$, $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2/3$, $\beta_3 = 1$.

1.2. *Пусть выполняются соотношения $d_m > 0$, $\mathrm{Z}_- > 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = N-1$. Тогда существуют вещественные числа $\tau_l > 0$, где $l = 1, \ldots \mathrm{Z}_-$, для которых последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^{\infty}$ занумерованных в порядке убывания (с учётом кратности) отрицательных собственных значений задачи § 1.1 (1), § 1.1 (2) удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотическому соотношению*

$$\lambda_{-(l+k\mathrm{Z}_-)} = -\tau_l \cdot (a_m^{2n-1} d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство утверждения 1.2 проводится аналогичным доказательству утверждения 1.1 способом.

1.3. *Пусть выполняются соотношения $d_m < 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = N-1$. Тогда существуют вещественные числа $\tau_l > 0$, где $l = 1, \ldots N-1$, для которых последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ занумерованных в порядке возрастания (с учётом кратности) положительных собственных значений задачи § 1.1 (1), § 1.1 (2) удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотическому соотношению*

$$\lambda_{l+k(N-1)} = \tau_l \cdot (a_m^{2n-1}\,|d_m|)^{-2k} \cdot (1 + o(1)),$$

а последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^{\infty}$ занумерованных в порядке убывания (с учётом кратности) отрицательных собственных значений задачи § 1.1 (1), § 1.1 (2) удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотическому соотношению

$$\lambda_{-(l+\mathrm{Z}_-+k(N-1))} = -\tau_l \cdot (a_m^{2n-1}\,|d_m|)^{-2k-1} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство утверждения 1.3 также проводится аналогичным доказательству утверждения 1.1 способом.

§ 5. Примеры и обсуждение

1. В таблице 1 представлены результаты численных расчётов для первых восьми положительных собственных значений задачи четвёртого порядка, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная квадратично суммируемой функции с параметрами

l	k	$-\lambda_{-(l+k)}$	$-\lambda_{-(l+k)}/54^k$
1	0	$3,70 \cdot 10^2 \pm 1\%$	$369{,}75 \pm 10^{-2}$
1	1	$8,51 \cdot 10^3 \pm 1\%$	$157{,}53 \pm 10^{-2}$
1	2	$4,58 \cdot 10^5 \pm 1\%$	$157{,}20 \pm 10^{-2}$
1	3	$2,48 \cdot 10^7 \pm 1\%$	$157{,}20 \pm 10^{-2}$

Таблица 2. Оценки первых собственных значений для случая $n = 2$, $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$.

l	k	λ_{l+2k}	$\lambda_{l+2k}/54^{2k}$	$-\lambda_{-(l+1+2k)}$	$-\lambda_{-(l+1+2k)}/54^{2k+1}$
1	0	$3,04 \cdot 10^2 \pm 1\%$	$304{,}08 \pm 10^{-2}$	$1,61 \cdot 10^4 \pm 1\%$	$299{,}04 \pm 10^{-2}$
2	0	$1,38 \cdot 10^4 \pm 1\%$	$13820{,}11 \pm 10^{-2}$	$7,43 \cdot 10^5 \pm 1\%$	$13764{,}22 \pm 10^{-2}$
1	1	$8,72 \cdot 10^5 \pm 1\%$	$299{,}00 \pm 10^{-2}$	$4,71 \cdot 10^7 \pm 1\%$	$299{,}00 \pm 10^{-2}$
2	1	$4,01 \cdot 10^7 \pm 1\%$	$13764{,}02 \pm 10^{-2}$	$2,17 \cdot 10^9 \pm 1\%$	$13764{,}02 \pm 10^{-2}$
1	2	$2,54 \cdot 10^9 \pm 1\%$	$299{,}00 \pm 10^{-2}$	$1,37 \cdot 10^{11} \pm 1\%$	$299{,}00 \pm 10^{-2}$
2	2	$1,17 \cdot 10^{11} \pm 1\%$	$13764{,}02 \pm 10^{-2}$	$6,32 \cdot 10^{12} \pm 1\%$	$13764{,}02 \pm 10^{-2}$

Таблица 3. Оценки первых собственных значений для случая $n = 2$, $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = -1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$.

самоподобия $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2/3$, $\beta_3 = 1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = 2/3$, $\zeta_2 = 1/3$, $\mathrm{Z}_+ = 2$, $\mathrm{Z}_- = 0$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 4.1.1.

В таблице 2 представлены данные численных расчётов первых четырёх отрицательных собственных значений задачи четвёртого порядка, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$, $\mathrm{Z}_+ = \mathrm{Z}_- = 1$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 4.1.2.

В таблице 3 представлены данные численных расчётов первых шести положительных и семи отрицательных (исключая первое) собственных значений задачи четвёртого порядка, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = -1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$, $\mathrm{Z}_+ = \mathrm{Z}_- = 1$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 4.1.3.

Для получения вышеприведённого иллюстративного материала нами была применена — в незначительным образом модифицированном виде — вычислительная методика, описанная в работе [**6**].

2. Некоторые из рассуждений, проведённых нами в предыдущих параграфах, не являются приемлемыми с точки зрения конструктивного направления в математике [**7**], [**8**]. Это относится, в частности, к характеру установления утверждений из пункта § 3.3, связанному с привлечением теоремы об ортогональном проектировании в гильбертовом пространстве. Несколько более громоздкое рассуждение (на деталях которого мы здесь не останавливаемся) позволило бы избежать опоры на следствия этой теоремы, не меняя существа дела. Однако использование в ходе доказательств утверждений из § 4 теоремы Больцано–Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности вещественных чисел является в рамках применённого нами подхода, по-видимому, неустранимым. Соответственно, коэффициенты τ_l полученных асимптотик оказываются с точки зрения конструктивного математического анализа так называемыми *псевдочислами*[3]. Данное обстоятельство коренным образом отличает результаты настоящей статьи от результатов работы [**1**], где соответствующие коэффициенты заведомо являлись *конструктивными вещественными числами*[4]: в случае задачи Штурма–Лиувилля оператор E из утверждения § 3.4.1 является нулевым, что позволяет полностью избежать апелляции к утверждению § 3.6.2. Вопрос о возможности дальнейшего уточнения конструктивного характера полученных асимптотик мы оставляем открытым.

Список литературы

[1] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с дискретным самоподобным весом*// `http://arxiv.org/arXiv:0709.0424`.

[2] И. А. Шейпак. *О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0,1]$*// Матем. заметки. — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 924–938.

[3] И. А. Шейпак. *Особые точки самоподобной функции нулевого спектрального порядка. Самоподобная струна Стилтьеса*// Матем. заметки. — 2010. — Т. 88, № 2. — С. 303–316.

[4] P. Lancaster, A. Shkalikov, Qiang Ye. *Strongly definitizable linear pencils in Hilbert space*// Integr. Equat. Oper. Th. — 1993. — V. 17. — P. 338–360.

[5] А. А. Владимиров. *Оценки числа собственных значений самосопряжённых оператор-функций*// Матем. заметки. — 2003. — Т. 74, № 6. — С. 838–847.

[6] А. А. Владимиров. *О вычислении собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с фрактальным индефинитным весом*// Журнал выч. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, № 8. — С. 1350–1355.

[7] Н. А. Шанин. *Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства*// Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1962. — Т. 67. — С. 15–294.

[8] Б. А. Кушнер. *Лекции по конструктивному математическому анализу.* — М.: Наука, 1973.

[3] Для которых эффективный метод построения сколь угодно точных рациональных приближений либо неизвестен, либо прямо невозможен.

[4] Допускающими вычисление сколь угодно точных рациональных приближений посредством единого алгорифма.