第六节
矩阵光学

一、近轴光的矩阵表示

1．折射矩阵

我们采用（nu,h）和（$n'u',h$）作为表示入射光线和折射光线的位置坐标

$$\begin{cases} n_1^{'}u_1^{'} - n_1u_1 = \dfrac{n_1^{'} - n_1}{r_1}h_1 \\ h_1^{'} = h_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} n_1^{'}u_1^{'} \\ h_1^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1u_1 \\ h_1 \end{bmatrix}$$

其中 $\phi_1 = \dfrac{n_1^{'} - n_1}{r_1}$ 为第一折射面光焦度

$$R_1 = {}_1\begin{bmatrix} 1 & \phi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_1$$ 折射矩阵

$$M_1^{'} = R_1 M_1$$

2．过渡矩阵（转面矩阵）

$$\because \quad u_2 = u_1^{'}$$
$$n_2 = n_1^{'}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_2 u_2 = n_1^{'} u_1^{'} \\ h_2 = h_1 - u_1^{'} d_1^{'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_2 u_2 = n_1' u_1' \\ h_2 = h_1 - u_1' d_1' \end{cases}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} n_2 u_2 \\ h_2 \end{bmatrix} = {}_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{d_1'}{n_1'} & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} n_1' u_1' \\ h_1' \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{T}_{21} = {}_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{d_1'}{n_1'} & 1 \end{bmatrix}_1$$

$$M_2 = T_{21} M_1' = T_{21} R_1 M_1$$

$$M_1' = R_1 M_1$$

反射　　$n' = -n$

3．传递矩阵（或高斯矩阵特征矩阵）

$$R_2 = {}_2\begin{pmatrix} 1 & \phi_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_2$$

$$M_2' = R_2 M_2$$

$$M_2' = R_2 M_2 = R_2 T_{21} R_1 M_1$$

令　$S_{21} = R_2 T_{21} R_1$　　S_{21} 称为高斯矩阵

$$= {}_2\begin{bmatrix} 1 & \phi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_2 {}_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{d_1'}{n_1'} & 1 \end{bmatrix}_1 {}_1\begin{bmatrix} 1 & \phi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_1 = {}_2\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}_1$$

$$M_2' = S_{21} M_1 = {}_2\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}_1 M_1$$

当已知系统的结构参数（r、d、n），即可求得A、B、C、D值，用这四个常数可以表示光学系统的高斯光学性质（基点位置，焦距等），称之为高斯常数。

可以证明：

$$|S_{21}| = BC - AD = 1$$

若系统由K个折射面组成，则

$$S_{k1} = R_k T_{k(k-1)} R_{k-1} T_{(k-1)(k-2)} \cdots R_2 T_{21} R_1$$

$$= {}_k\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}_1$$

$$S_{k1}={}_k\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}_1$$

行列式 $$|S_{k1}| = BC - AD = 1$$

此式可用来对系统矩阵的运算结果进行检验

$$M_k' = S_{k1} M_1$$

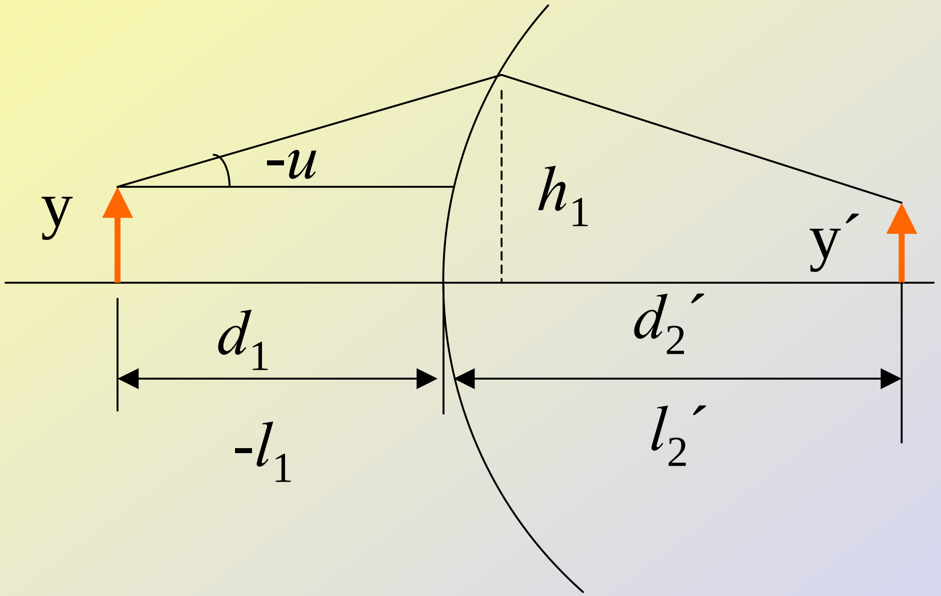
已知系统的S，不仅可用由入射光线求出射光线，也可以由出射光线求入射光线，将上式两边同乘以S的逆矩阵S^{-1}

$$M_1 = S_{k1}^{-1} M_k'$$

$$(S^{-1} = \frac{1}{|S|} S^* \qquad S^* \text{ 伴随矩阵})$$

$$\therefore S^{-1} = \begin{bmatrix} C & -A \\ -D & B \end{bmatrix} = R_1^{-} T_{21}^{-1} R_2^{-1} \cdots R_{k-1}^{-1} T_{k(k-1)}^{-1} R_k^{-1}$$

二、物像矩阵



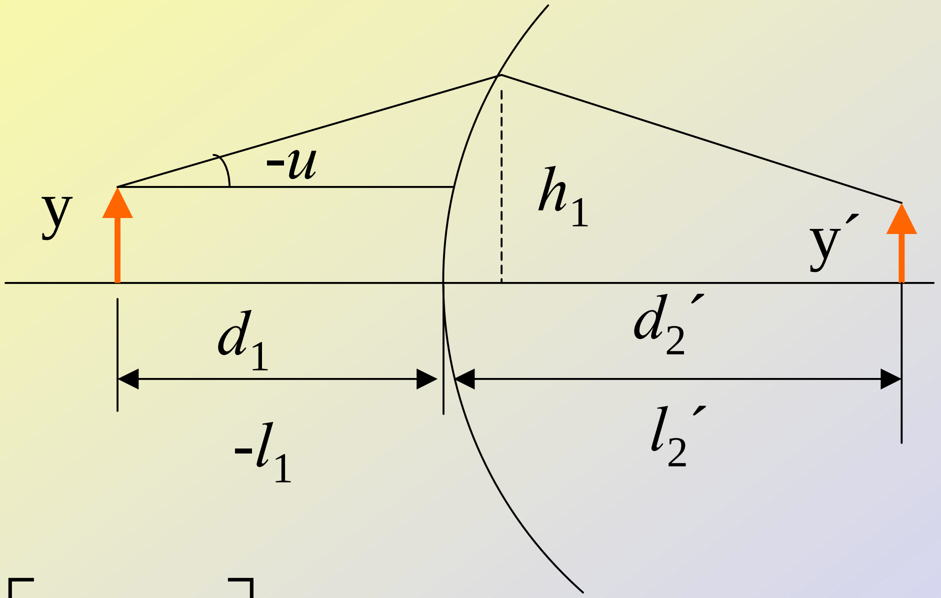
面→面⇒过渡矩阵

物空间

$$\begin{cases} n_1u_1 = n_1u_1 \\ h_1 = y - d_1u_1 = y + l_1u_1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} n_1u_1 \\ h_1 \end{bmatrix} = {}_{0_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{l_1}{n_1} & 1 \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} n_1u_1 \\ y \end{bmatrix}$$

像空间　　$d_2' = l_2'$



$$\begin{cases} n_2'u_2' = n_2'u_2' \\ y_2' = h' - d_2u_2 = h - l_2u_2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} n_2'u_2' \\ y' \end{bmatrix}_B = {}_{B'}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{l_2'}{n_2'} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_2'u_2' \\ h_2' \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} n_2'u_2' \\ h_2' \end{bmatrix} = S_{21} \begin{bmatrix} n_1u_1 \\ h_1 \end{bmatrix} = S_{21} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{l_1}{n_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1u_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} n_2' u_2' \\ h_2' \end{bmatrix} = S_{21} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{l_1}{n_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 u_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} n_2' u_2' \\ y' \end{bmatrix} = {}_{B'}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{l'}{n_2'} & 1 \end{bmatrix}_{O_2} \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}_{O_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{l_1}{n_1} & 1 \end{bmatrix}_{B} \begin{bmatrix} n_1 u_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$= {}_{B'}\begin{bmatrix} B + \dfrac{A l_1}{n_1} & A \\ -\dfrac{B l_2'}{n_2'} + D - \dfrac{A l_2' l_1}{n_2' n_1} + \dfrac{C l_1}{n_1} & -\dfrac{A l_2'}{n_2'} + C \end{bmatrix}_{B} \begin{bmatrix} n_1 u_1 \\ y \end{bmatrix}$$

物象矩阵

$$= S_{B'B} \begin{bmatrix} n_1 u_1 \\ y \end{bmatrix}$$

物像矩阵方程式

$$y' = \left(\frac{-Bl_2'}{n_2'} + D - \frac{Al_2' l_1}{n_2' n_1} + \frac{Cl_1}{n_1}\right) n_1 u_1 + \left(\frac{-Al_2'}{n_2'} + C\right) y$$

又 $\because$ 近轴区，y' 与入射光孔 u_1 角无关，近轴区象高 y' 和物高 y 成正比，与 u_1 大小无关

$$\therefore \frac{-Bl_2'}{n_2'} + D - \frac{Al_2' l_1}{n_2' n_1} + \frac{Cl_1}{n_1} = 0$$

$$\therefore \frac{l_2'}{n_2'} = \frac{\dfrac{Cl_1}{n_1} + D}{\dfrac{Al_1}{n_1} + B}$$

$$\therefore y' = \left(\frac{-Al_2'}{n_2'} + C\right) y$$

$$\therefore y' = \left(\frac{-Al_2'}{n_2'} + C\right) y$$

垂轴放大率： $$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{Al_2'}{n_2'} + C$$

（一般形式2→K）

$$S_{B'B} = \begin{bmatrix} B + \dfrac{Al_1}{n_1} & A \\ 0 & \dfrac{-Al_2'}{n_2'} + C \end{bmatrix} \qquad \therefore S_{B'B}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{-Al_2'}{n_2'} + C & -A \\ 0 & B + \dfrac{Al_1}{n_1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} n_1 u_1 \\ y \end{bmatrix} = S_{B'B}^{-1} \begin{bmatrix} n_2' u_2' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$S_{B'B}=\begin{bmatrix} B+\dfrac{Al_1}{n_1} & A \\ 0 & \dfrac{-Al_2'}{n_2'}+C \end{bmatrix} \qquad \therefore S_{B'B}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{-Al_2'}{n_2'}+C & -A \\ 0 & B+\dfrac{Al_1}{n_1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} n_1u_1 \\ y \end{bmatrix}=S_{B'B}^{-1}\begin{bmatrix} n_2'u_2' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\beta}=\frac{y}{y'}=B+\frac{Al_1}{n_1}$$

$$\therefore S_{B'B}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\beta} & \mathbf{A} \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

对K个折射面2→K。此物象矩阵是有普遍意义的。

三、用高斯常数表示系统的基点位置和焦距

1．主点位置

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{Al_2'}{n_2'} + C$$

$\beta = +1$ 由

$$\frac{1}{\beta} = \frac{y}{y'} = B + \frac{Al_1}{n_1}$$

$$\begin{cases} l_H' = -\dfrac{(1-C)n_2'}{A} \\ l_H = \dfrac{(1-B)n_1}{A} \end{cases}$$

一般形式2→K

2．焦点位置

$l=\infty$ $\beta=0$ 以及 $l'=\infty$ $\frac{1}{\beta}=0$

$$\begin{cases} l_F^{'}=\dfrac{Cn_2^{'}}{A} \\ l_F=-\dfrac{Bn_1}{A} \end{cases}$$

一般形式 2→K

3．焦距大小

$$f'=l_F^{'}-l_H^{'}=\frac{n_2^{'}}{A}$$

$$f=l_F-l_H=\frac{n_1}{A}$$

二焦距关系 $\frac{f'}{f}=-\frac{n_k^1}{n_1}$

物方象方当位于同一介质 $n_k'=n_1$ $f'=-f$

4．节点位置

角放大率 $\gamma = \dfrac{tgu'}{tgu}$

又由拉赫公式 $nytgu = n'y'tgu$ $\therefore \gamma = \dfrac{ny}{n'y'} = \dfrac{n}{n'} \cdot \dfrac{1}{\beta}$

$$\beta = \frac{n_1}{n_2'}\frac{1}{\gamma} \qquad \gamma = \frac{n_1}{n_2'}\frac{1}{\beta}$$

由 $\beta = \dfrac{y'}{y} = -\dfrac{Al_2'}{n_2'} + C$ $\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{y}{y'} = B + \dfrac{Al_1}{n_1}$

令角放大率 γ =1 得 $\begin{cases} l_J' = -\dfrac{n_1 - Cn_2'}{A} \\ l_J = \dfrac{n_2' - Bn_1}{A} \end{cases}$

当位于同一介质 $n_1 = n_k'$

四、薄透镜系统的矩阵计算

在空气中一单薄透镜，其折射矩阵为

$$R_1=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{1-n}{r_2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{n\text{-}1}{r_1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & (n\text{-}1)\ (\dfrac{1}{r_1}\text{-}\dfrac{1}{r_2})\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \phi_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

若N个薄透镜（N-1个间隔）组成的系统，且在空气中，相邻薄透镜之间的过渡矩阵

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{bmatrix}$$

d: 两透镜之间的距离

2. 高斯矩阵

$$S_{N1} = R_N T_{N(N-1)} R_{N-1} T_{(N-1)(N-2)} \cdots R_2 T_{21} R_1$$

$$S_{N1} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_N \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d_N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \phi_{N\text{-}1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & \phi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}$$

A、B、C、D由各薄透镜的光焦度和它们间的间隔所决定并知A为光焦度，这是有普遍意义的，对于同一介质中的任何光学系统，高斯常数A均为光焦度，如一光学系统由光焦度为两块薄透镜组成间隔为d则，

$$S=\begin{bmatrix}1 & \phi_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -d & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \phi_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-d\phi_2 & \phi_1+\phi_2-d\phi_1\phi_2\\ -d & 1-d\phi_1\end{bmatrix}$$

显然A为两个透镜组的光焦度

3．物像矩阵

薄透镜，物距 $-l$ 象距 l'

$$S_{B'B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -l' & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \phi\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+l\phi & \varphi\\ -l'-ll'\phi+l & 1-l'\varphi\end{bmatrix}$$

式中：

$$-l'-ll'\phi+l=0$$

$$1-l'\phi=\frac{f'-l'}{f'}=-\frac{x'}{f'}=\beta$$

$$1+l\phi=\frac{-f+l}{-f}=-\frac{x}{f}=\frac{1}{\beta}=\gamma$$

$$\therefore S_{B'B}=\begin{bmatrix}\gamma & \phi\\ 0 & \beta\end{bmatrix}$$

小结

1．折射矩阵描述单个折射面或单个薄透镜的折射作用，即光线通过它们以后方向的变化，参考平面和单个折射面或薄透镜重合。

2．过渡矩阵表示光线经过一段间隔，（透镜厚度，透镜间隔，物距和像距等）后，在不同参考面上交点坐标的变化。

3．光学系统的传递矩阵表示光线通过光学系统前、后光线方向的变化以及光线在最后折射面上的交点坐标，相对于光线在第一折射面上交点坐标的变化，并可按高斯常数求得系统的基点位置和焦距。

例1．试用矩阵法求直径为27mm，折射率为1.54的玻璃球的焦距和主平面的位置

已知 $n_1 = 1.0 \quad n_2 = 1.54 \quad n_2' = 1.0$

$r_1 = 13.5 \quad r_2 = -13.5 \qquad d_2 = 27mm$

解：高斯矩阵 $S = R_2 T_{21} R_1$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1.54\text{-}1}{13.5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1\text{-}1.54}{-13.5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{d_2}{n_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{27}{1.54} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore S_{21}=\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0.54/1.35 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -17.53 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0.54/13.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.052 \\ -17.53 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B=0.3 \qquad A=0.052 \qquad D=-17.53 \qquad C=0.3$$

作为验算 $|S_{21}|=BC-AD=(0.3\times 0.3)-0.052\times(-17.53)=1$