GÉOMÉTRIES RELATIVES

THOMAS BLOSSIER, AMADOR MARTIN-PIZARRO ET FRANK O. WAGNER

Résumé. Une analyse des propriétés géométriques d'une structure relatives à un reduit est entamée. En particulier la définissabilité des groupes et des corps dans ce cadre est étudiée. Dans le cas relativement monobasé, tout groupe définissable est isogène à un sous-groupe d'un produit de groupes définissables dans les réduits. Dans le cas relativement CM-trivial, cas qui englobe certains amalgames de Hrushovski (la fusion de deux théories fortement minimales, les expansions d'un corps par un prédicat), tout groupe définissable s'envoie par un homomorphisme à noyau central dans un produit de groupes définissables dans les réduits.

1. Introduction

Un théorème de Pillay [20] affirme que tout groupe différentiellement constructible se plonge dans un groupe algébrique. Kowalski et Pillay [12] ont obtenu un résultat analogue pour les groupes constructibles connexes sur un corps de différence, modulo un noyau fini [9]. Ces deux exemples nous montrent que des groupes *définissables* dans des structures *enrichies* peuvent être analysés à partir de la structure de base. Dans les deux cas précédents, la démonstration consiste à passer de relations dans les corps enrichis à des relations purement algébriques dans une certaine configuration géométrique, dite *configuration de groupe*. A partir d'une telle configuration on récupère un groupe [11] qui sera ici algébrique.

Il s'avère que des propriétés d'un groupe définissable dans une structure dépendent de l'existence de certains types de configurations géométriques. Un pseudo-plan généralise la notion d'incidence entre points et droites existante dans un plan euclidien. Une structure interprétant un pseudo-plan (complet) est *1-ample* et cette configuration peut être généralisée pour chaque n : une géométrie n*-ample* correspond à l'existence d'un pseudo-espace en dimension n, ce qui nous donne toute une hiérarchie de complexité géométrique (hiérarchie conjecturée stricte, voir Evans [10]). Notons qu'un corps algébriquement clos est n-ample pour tout n.

Une structure est *monobasée* si elle n'est pas 1-ample. D'après Hrushovski et Pillay [13] un groupe stable monobasé est abélien-par-fini et possède des propriétés de rigidité remarquables : tout sous-ensemble définissable est une combinaison booléenne de cossettes de sous-groupes définissables (en fait de sous-groupes définissables sur la clôture algébrique du vide ce qui entraîne qu'il n'y a qu'un nombre borné de sous-groupes définissables). Cette propriété est à la base de la

Date: 3 septembre 2010.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 03C45.

Key words and phrases. Model Theory, Amalgamation methods, CM-triviality, Geometry, Group, Definability.

Recherche soutenu par le réseau européen MRTN-CT-2004-512234 Modnet, le projet ANR-09-BLAN-0047 Modig, ainsi que l'Institut universitaire de France (F. Wagner).

démonstration modèle-théorique donnée par Hrushovski [16] de la conjecture de Mordell-Lang, qui réside dans la caractérisation des géométries associées aux types minimaux différentiels de variétés semi-abéliennes.

Dans le cas des structures non-2-amples (aussi appelées *CM-triviales* par Hrushovski [15]), Pillay [18] a montré que les groupes de rang de Morley fini sont nilpotents-par-fini ; ce résultat a été généralisé à certains groupes stables [28].

Dans cet article, nous définissons des notions de 1-ampleur et 2-ampleur relatives à un réduit ce qui nous permet d'obtenir en particulier des caractérisations des groupes définissables dans de telles structures.

On montre dans le cas relativement monobasé que tout groupe définissable connexe se plonge définissablement modulo un noyau fini dans un groupe définissable dans le réduit. Les corps différentiellement clos et les corps munis d'un automorphisme générique sont des exemples de structures relativement monobasées (c.à.d. non 1-amples) au-dessus du pur corps algébriquement clos sous-jacent. On retrouve ainsi les théorèmes énoncés au début (quoique pour un groupe différentiel on obtienne seulement une monogénie, c'est-à-dire un plongement d'un sous-groupe d'indice fini modulo un noyau fini).

Dans le cas relativement CM-trivial, pour un groupe définissable connexe on construit un homomorphisme définissable de noyau virtuellement central dans un groupe définissable dans le réduit. En particulier tout groupe simple définissable se plonge dans un groupe du réduit, ce qui permet de montrer que tout corps définissable est définissablement isomorphe à un sous-corps d'un corps définissable dans le réduit.

Les corps munis d'un sous-groupe (appelés corps *colorés* par Poizat) additif ou multiplicatif [23, 24, 1, 5, 3] ainsi que la fusion de deux théories fortement minimales [14, 6] furent obtenus par la méthode d'amalgamation de Hrushovski. Dans la dernière partie on vérifie que ces amalgames sont relativement CM-triviaux (c.à.d. non 2-amples) au dessus des théories de base. Notons que la CM-trivialité relative ne permet pas d'analyser tous les groupes définissables. Dans les corps colorés non-collapsés, on vérifie facilement que tout groupe définissable connexe est l'extension d'un sous-groupe coloré par un groupe algébrique. Ceci n'est plus vrai pour certains groupes interprétables, comme le quotient du corps entier par le sous-groupe coloré. Notons que dans le cas collapsé de rang fini, tout groupe interprétable devient définissable par élimination des imaginaires.

Quant à la fusion, Hrushovski avait défini dans [15] une notion de *platitude* (absolue) qui empêche l'existence de groupes ; il affirme dans [14] que la fusion sur un réduit commun trivial est *plate* relativement aux théories de base, et que cela implique que tout groupe définissable est isomorphe à un produit direct, à centre fini près, de deux groupes définissables dans les deux théories de départ. Dans un travail en cours nous utilisons cette notion afin d'étudier les groupes abéliens.

Bien que ce papier demande une certaine connaissance d'outils modèle-théoriques (voir [19] et [22]), une connaissance approfondie de la méthode d'amalgamation n'est pas nécessaire pour sa lecture (la partie 6 est indépendante et contient un rappel de cette méthode).

Nous remercions A. Pillay pour ses commentaires qui nous ont permis de démarrer ce travail. Bonne lecture !

2. Prélude

Dans cet article nous allons considérer une théorie stable T dans un langage $\mathcal{L}$ avec un réduit stable T_0 dans un sous-langage $\mathcal{L}_0$, ou encore avec une famille de réduits stables $(T_i : i < n)$ dans des sous-langages $\mathcal{L}_i$. Les notions modèle-théoriques comme la clôture définissable dcl, la clôture algébrique acl, les types tp, les bases canoniques Cb ou l'indépendance $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$ s'entendent au sens de T ; si on les prend au sens de T_i on l'indiquera par l'indice i : dcl_i, acl_i, tp_i, Cb_i, $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^i$. Remarquons que si E est une relation d'équivalence $\mathcal{L}$-définissable mais non-$\mathcal{L}_i$-définissable, alors une classe modulo E n'a aucun sens dans T_i ; les imaginaires de T n'existent pas nécessairement dans les réduits. On travaillera donc avec les éléments réels.

Ainsi, les clôtures algébrique et définissable sont restreintes aux réels sauf indication contraire. Afin d'avoir néanmoins un certain contrôle sur les imaginaires, nous supposerons par la suite que les T_i éliminent géométriquement les imaginaires pour tout $i < n$, c'est-à-dire tout T_i-imaginaire est T_i-interalgébrique avec un uple réel. Ceci est satisfait par exemple si les T_i sont fortement minimaux avec $\mathrm{acl}_i(\emptyset)$ infini. Tout objet (type-)définissable (dans les réels) ou (type-)interprétable (dans les imaginaires) sera supposé d'arité finie sauf indication explicite (par exemple $*$-définissable). Les énoncés principaux de cet article, notamment les théorèmes 3.3, 4.8 et 5.7, restent valables si le groupe de départ est $*$-définissable. Dans ce cas les groupes obtenus dans les réduits sont $*$-interprétables.

Les résultats de cet article peuvent s'étendre au cas où la théorie T est simple instable mais les réduits sont stables. L'existence de plusieurs génériques principaux est alors traité à l'aide de [21, Proposition 2.2] ; les bases canoniques au sens de T sont des hyperimaginaires, et la clôture algébrique imaginaire doit être remplacée par la clôture bornée. Notons en passant que la clôture bornée réelle est la clôture algébrique réelle. Ceci est exactement le cadre considéré dans [12], où pour un groupe définissable dans ACFA [9] on obtient une monogénie dans un groupe $*$-définissable dans un corps algébriquement clos, que l'on peut supposer définissable grâce à la stabilité et l'élimination des imaginaires du réduit ainsi que la définissabilité du premier groupe. Nos techniques permettent de retrouver ce résultat. Plus généralement, on pourrait partir de réduits qui ne sont que simples avec élimination géométrique des hyperimaginaires, alors le théorème de configuration de groupe dans le cas simple [7] donnerait des plongements dans des groupes presque hyperdéfinissables dans les réduits.

Le lemme suivant, moins évident qu'il ne le semble à première vue, sera utilisé fréquemment dans cet article.

Lemme 2.1. *Si B est algébriquement clos (au sens de T) et $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B c$, alors $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_B c$.*

Démonstration. Comme la théorie T_0 est stable, il suffit de voir que $\mathrm{tp}_0(a/Bc)$ ne divise pas sur B. Fixons $\varphi(x,y)$ une $\mathcal{L}_0$-formule à paramètres sur B satisfaite par (a,c). Considérons une suite de Morley $(c_j : j < \omega \cdot 2)$ de $\mathrm{tp}(c/B)$. Alors $\bigwedge_i \varphi(x, c_i)$ est consistant, comme a et c sont indépendants sur B. Pour montrer que $\varphi(x,c)$ ne 0-divise pas, il suffit de montrer que $(c_j : j < \omega \cdot 2)$ est une 0-suite de Morley. Or, la 0-indiscernabilité ne posant aucun problème, il s'agit de montrer qu'elle est 0-indépendante sur B.

Remarquons que $(c_j : \omega \leq j < \omega \cdot 2)$ est 0-indépendante sur $(B, c_j : j < \omega)$ par stabilité, et forme donc une 0-suite de Morley de $\mathrm{tp}(c_\omega/B, c_j : j < \omega)$. Puisque la base canonique d'un type est algébrique sur une suite de Morley de réalisations, on

a
$$\mathrm{Cb}_0(c_\omega/B, c_j : j < \omega) \in \mathrm{acl}_0^{eq}(B, c_j : j < \omega) \cap \mathrm{acl}_0^{eq}(c_j : \omega \leq j < \omega \cdot 2).$$
Or, T_0 élimine géométriquement les imaginaires, B est algébriquement clos, et
$$(c_j : j < \omega) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_B (c_j : \omega \leq j < \omega \cdot 2).$$
Ceci implique que $\mathrm{Cb}_0(c_\omega/B, c_j : j < \omega) \in \mathrm{acl}_0^{eq}(B)$, et donc
$$c_\omega \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^0_B (c_j : j < \omega).$$
Par indiscernabilité, la suite $(c_j : j < \omega \cdot 2)$ est bien 0-indépendante sur B. □

Corollaire 2.2. *Si A est algébriquement clos, alors le rang $U(a/A)$ est plus grand ou égal que le rang $U_0(a/A)$.*

Démonstration. Par récurrence. □

Le but originel de ce travail était l'étude des groupes définissables dans les amalgames. Dans ces constructions la clôture autosuffisante joue un rôle central (voir la partie 6). Nous supposerons donc que la théorie T de départ est munie d'un opérateur de clôture $\langle . \rangle$ finitaire et invariant tel que $A \subseteq \langle A \rangle \subseteq \mathrm{acl}(A)$ pour tout ensemble réel A. On considère les conditions suivantes pour cet opérateur :

(†) Si A est algébriquement clos et $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A c$, alors $\langle Abc \rangle \subseteq \bigcap_{i<n} \mathrm{acl}_i(\langle Ab \rangle, \langle Ac \rangle)$.

(‡) Si $\bar{a} \in \bigcup_{i<n} \mathrm{acl}_i(A)$, alors $\langle \mathrm{acl}(\bar{a}), A \rangle \subseteq \bigcap_{i<n} \mathrm{acl}_i(\mathrm{acl}(\bar{a}), \langle A \rangle)$.

Remarque 2.3. Notons que la clôture algébrique d'une théorie ne satisfait pas la condition (†) au-dessus du réduit à l'égalité dès qu'un groupe non-trivial est définissable.

3. Groupes et réduits

Dans cette section nous allons construire un homomorphisme d'un groupe T-définissable vers un produit de groupes interprétables dans les réduits. Cet homomorphisme peut s'avérer trivial sans conditions supplémentaires, comme les non-ampleurs relatives qui seront discutées dans les parties suivantes.

Lemme 3.1. *Soient G un groupe connexe type-définissable sur $\emptyset$ dans la théorie T et, a, b deux génériques indépendants de G avec $c = ab$. Notons*
$$\begin{aligned} \alpha &= \mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(b), \mathrm{acl}(c)/\mathrm{acl}(a)), \\ \beta &= \mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(a), \mathrm{acl}(c)/\mathrm{acl}(b)), \\ \gamma &= \mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(a), \mathrm{acl}(b)/\mathrm{acl}(c)). \end{aligned}$$
Alors α est T_0-interalgébrique avec $\mathrm{Cb}_0(\beta, \gamma/\mathrm{acl}(a))$.

Démonstration. Soit $\xi = \mathrm{Cb}_0(\beta, \gamma/\mathrm{acl}(a))$. Clairement $\xi \in \mathrm{acl}_0(\alpha)$, car $\beta \in \mathrm{acl}(b)$ et $\gamma \in \mathrm{acl}(c)$. D'un autre côté,
$$\begin{array}{llllll} \mathrm{acl}(a) & \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^0_\alpha & \mathrm{acl}(b), \mathrm{acl}(c), & \mathrm{acl}(b) & \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^0_\beta & \mathrm{acl}(a), \mathrm{acl}(c), \\ \mathrm{acl}(c) & \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^0_\gamma & \mathrm{acl}(a), \mathrm{acl}(b), & \mathrm{acl}(a) & \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^0_\xi & \beta, \gamma. \end{array}$$
Comme $\gamma \in \mathrm{acl}(c)$ et $\xi \in \mathrm{acl}(a)$, on obtient
$$\mathrm{acl}(b) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^0_{\beta,\gamma,\xi} \mathrm{acl}(a).$$

Maintenant, la transitivité entraîne que

$$\mathrm{acl}(a) \mathop{\downarrow}^0_{\xi} \mathrm{acl}(b), \gamma.$$

Finalement $\mathrm{acl}(c) \downarrow^0_{\gamma,\xi,\mathrm{acl}(b)} \mathrm{acl}(a)$ implique par transitivité que

$$\mathrm{acl}(a) \mathop{\downarrow}^0_{\xi} \mathrm{acl}(b), \mathrm{acl}(c).$$

Par définition des bases canoniques, $\alpha \in \mathrm{acl}_0(\xi)$. □

La proposition suivante permet de passer d'une relation algébrique dans T donnée par la loi d'un groupe à une relation de T_0-algébricité à l'aide d'une suite de Morley du générique du groupe. Sans hypothèses supplémentaires, cette relation peut être triviale : dans le cas où T_0 est le réduit de T au langage de l'égalité, la relation obtenue porte sur des uples vides.

Proposition 3.2. *Soient G un groupe connexe type-définissable sur $\emptyset$ dans T et a, b deux génériques indépendants de G avec $c = ab$. Considérons D une suite de Morley dénombrable du générique de G sur a, b et*

$$\alpha = \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(b, D), \mathrm{acl}(c, D)) \cap \mathrm{acl}(a, D)$$
$$\beta = \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(a, D), \mathrm{acl}(c, D)) \cap \mathrm{acl}(b, D)$$
$$\gamma = \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(a, D), \mathrm{acl}(b, D)) \cap \mathrm{acl}(c, D).$$

Alors α, β et γ sont indépendants deux-à-deux, chacun est 0-algébrique sur les deux autres, et en plus

$$\mathrm{acl}(b, D), \mathrm{acl}(c, D) \mathop{\downarrow}^0_{\alpha} \mathrm{acl}(a, D).$$

Démonstration. Soit $(d_j : 0 < j < \omega)$ une suite de Morley du générique de G sur a, b. On pose $d_0 = 1$ et pour $j, k, \ell < \omega$,

$$\begin{array}{rclrcl} {}_j a_k &=& d_j^{-1} a d_k, & {}_j\alpha_k &=& \mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}({}_k b_\ell), \mathrm{acl}({}_j c_\ell)/\mathrm{acl}({}_j a_k)), \\ {}_k b_\ell &=& d_k^{-1} b d_\ell, & {}_k\beta_\ell &=& \mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}({}_j a_k), \mathrm{acl}({}_j c_\ell)/\mathrm{acl}({}_k b_\ell)), \\ {}_j c_\ell &=& d_j^{-1} c d_\ell, & {}_j\gamma_\ell &=& \mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}({}_j a_k), \mathrm{acl}({}_k b_\ell)/\mathrm{acl}({}_j c_\ell)). \end{array}$$

Le type $\mathrm{tp}({}_j a_k, {}_k b_\ell, {}_j c_\ell)$ est celui de trois génériques de G deux-à-deux indépendants dont le produit des premiers deux éléments vaut le troisième. Il est donc unique. A fortiori $\mathrm{tp}_0(\mathrm{acl}({}_k b_\ell), \mathrm{acl}({}_j c_\ell)/\mathrm{acl}({}_j a_k))$ ne dépend pas de ℓ et donc l'élément ${}_j\alpha_k$ non plus : il est bien défini. Le type $\mathrm{tp}({}_j\alpha_k)$ ne dépend pas de j, k (et de même pour ${}_k\beta_\ell$ et ${}_j\gamma_\ell$).

Comme $(d_j : 0 < j < \omega)$ est une suite de Morley du générique de G sur a, b, c, la suite $({}_k b_\ell : \ell < \omega)$ l'est aussi sur ${}_j a_k$. Donc $(\mathrm{acl}({}_k b_\ell), acl({}_j c_\ell) : \ell < \omega)$ est une 0-suite de Morley sur $\mathrm{acl}({}_j a_k)$ avec base canonique ${}_j\alpha_k$. De même, $({}_k\beta_\ell, {}_j\gamma_\ell : \ell < \omega)$ est une 0-suite de Morley sur $\mathrm{acl}({}_k a_\ell)$ et sa base canonique est interalgébrique avec ${}_j\alpha_k$ d'après le lemme 3.1. Puisque tout base canonique est définissable sur une suite de Morley, on obtient ${}_j\alpha_k \in \mathrm{acl}_0({}_k\beta_\ell, {}_j\gamma_\ell : \ell < \omega)$; avec $\alpha_0 = ({}_j\alpha_k : j, k < \omega)$, $\beta_0 = ({}_k\beta_\ell : k, \ell < \omega)$ et $\gamma_0 = ({}_j\gamma_\ell : j, \ell < \omega)$ on obtient $\alpha_0 \in \mathrm{acl}_0(\beta_0, \gamma_0)$.

En particulier, avec $D_0 = (d_j : j < \omega)$ on a

$$\alpha_0 \in \mathrm{acl}(a, D_0), \quad \beta_0 \in \mathrm{acl}(b, D_0), \quad \gamma_0 \in \mathrm{acl}(c, D_0)$$

et $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ sont deux-à-deux indépendants sur D_0, mais chacun est 0-algébrique sur les deux autres.

Remarquons pour la suite de la preuve, que par construction
- $\mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(b), \mathrm{acl}(c)/\mathrm{acl}(a)) = {}_0\alpha_0 \in \alpha_0$,
- $\alpha_0 \in \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(b, D_0), \mathrm{acl}(c, D_0)) \bigcap \mathrm{acl}(a, D_0)$ et en particulier α_0 est 0-algébrique sur $\mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(b, D_0), \mathrm{acl}(c, D_0)/\mathrm{acl}(a, D_0))$.

Maintenant on travaille au-dessus de D_0 et on considère $D_1 \supset D_0$ tel que $D_1 \setminus D_0$ est une suite de Morley dénombrable du générique de G sur D_0, a, b. On obtient de la même façon

$$\alpha_1 \in \mathrm{acl}(a, D_1), \quad \beta_1 \in \mathrm{acl}(b, D_1), \quad \gamma_1 \in \mathrm{acl}(c, D_1)$$

et $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont deux-à-deux indépendants sur D_1, mais chacun est 0-algébrique sur les deux autres. De plus α_0 est 0-algébrique sur α_1.

En itérant ainsi ω fois, on obtient une chaîne $D_0 \subseteq D_1 \subseteq \cdots$ dont la réunion D est toujours une suite de Morley dénombrable du générique de G sur a, b. On obtient des éléments $\alpha_j \in \mathrm{acl}(a, D_j)$, $\beta_j \in \mathrm{acl}(b, D_j)$ et $\gamma_j \in \mathrm{acl}(c, D_j)$ tels que pour tout $j < \omega$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(b, D_j), \mathrm{acl}(c, D_j)/\mathrm{acl}(a, D_j)) &\in \alpha_{j+1}\\
\mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(a, D_j), \mathrm{acl}(c, D_j)/\mathrm{acl}(b, D_j)) &\in \beta_{j+1}\\
\mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(a, D_j), \mathrm{acl}(b, D_j)/\mathrm{acl}(c, D_j)) &\in \gamma_{j+1}.
\end{aligned}$$

De plus $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ sont deux-à-deux indépendants sur D_j, mais chacun est 0-algébrique sur les deux autres et D_{j-1}. Notons que

$$\alpha_j \in \mathrm{acl}_0(\alpha_{j+1}), \quad \beta_j \in \mathrm{acl}_0(\beta_{j+1}) \quad \text{et} \quad \gamma_j \in \mathrm{acl}_0(\gamma_{j+1}).$$

Soient

$$\begin{array}{rclcl}
\alpha & = & \mathrm{acl}_0(\alpha_j : j < \omega) & \in & \mathrm{acl}(a, D),\\
\beta & = & \mathrm{acl}_0(\beta_j : j < \omega) & \in & \mathrm{acl}(b, D),\\
\gamma & = & \mathrm{acl}_0(\gamma_j : j < \omega) & \in & \mathrm{acl}(c, D).
\end{array}$$

Alors α, β, γ sont deux-à-deux indépendants sur D, mais chacun est 0-algébrique sur les deux autres et D. Et par construction $\alpha \subseteq \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(b, D), \mathrm{acl}(c, D)) \cap \mathrm{acl}(a, D)$. En plus

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(b, D), \mathrm{acl}(c, D)/\mathrm{acl}(a, D)) &= \bigcup_{j<\omega} \mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(b, D_j), \mathrm{acl}(c, D_j)/\mathrm{acl}(a, D))\\
&= \bigcup_{j<\omega} \mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(b, D_j), \mathrm{acl}(c, D_j)/\mathrm{acl}(a, D_j))\\
&\in \bigcup_{j<\omega} \alpha_{j+1} \subseteq \alpha.
\end{aligned}$$

Comme α_j est 0-algébrique sur $\mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(b, D_j), \mathrm{acl}(c, D_j)/\mathrm{acl}(a, D_j))$, on obtient que α est 0-interalgébrique avec $\mathrm{acl}_0(\mathrm{Cb}_0(\mathrm{acl}(b, D), \mathrm{acl}(c, D)/\mathrm{acl}(a, D)))$. Donc

$$\mathrm{acl}(b, D), \mathrm{acl}(c, D) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid\,}^{0}_{\alpha} \mathrm{acl}(a, D),$$

et

$$\alpha = \mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}(b, D), \mathrm{acl}(c, D)) \cap \mathrm{acl}(a, D).$$

$\square$

Théorème 3.3. *Soit T une théorie stable avec des réduits $(T_i : i < n)$ qui ont éliminations géométriques des imaginaires. Tout groupe connexe G type-définissable dans T s'envoie par un homomorphisme définissable ϕ (à l'aide de paramètres* *éventuels) vers un produit de groupes H_i $*$-interprétables dans T_i, tel que pour deux génériques indépendants g, g' de G on a*

$$\operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g') \underset{\phi(gg')}{\overset{i}{\downarrow}} \operatorname{acl}(gg').$$

De plus, si $\phi(gg') = (h_i : i < n)$ alors h_i est i-interalgébrique avec

$$\operatorname{acl}_i(\operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g')) \cap \operatorname{acl}(gg')$$

pour tout $i < n$.

Remarque. Si les réduits ont élimination des imaginaires on peut se ramener à des groupes H_i type-définissables.

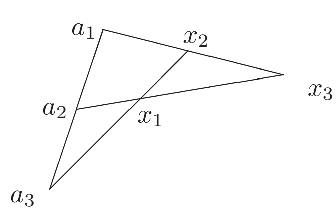
Démonstration. Pour la démonstration, on peut supposer que l'on a un seul réduit T_0 : en effet à partir d'homomorphismes ϕ_i de G dans H_i, on obtient un homomorphisme $\phi = (\phi_i : i < n)$ de G dans $H = \prod_{i<n} H_i$; comme $\phi(gg') \in \operatorname{acl}(gg')$, l'indépendance

$$\operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g') \underset{\phi_i(gg')}{\overset{i}{\downarrow}} \operatorname{acl}(gg')$$

entraîne par transitivité que

$$\operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g') \underset{\phi(gg')}{\overset{i}{\downarrow}} \operatorname{acl}(gg').$$

On travaille sur un ensemble algébriquement clos D qui contient les paramètres nécessaires à G et une suite de Morley du générique de G. Soient a_1, a_2 et x_1 trois éléments génériques indépendants de G, et $a_3 = a_1a_2$, $x_2 = a_1a_2x_1$ et $x_3 = a_2x_1$. Alors $(a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, x_3)$ forme une configuration de groupe :



tous les paires et les triplets non-colinéaires sont indépendants, et pour trois points colinéaires, le troisième est algébrique sur les deux autres.

Soient pour $\{j, k, \ell\} = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{array}{rcl} \alpha_j & = & \operatorname{acl}_0(\operatorname{acl}(a_k, D), \operatorname{acl}(a_\ell, D)) \cap \operatorname{acl}(a_j, D) \quad \text{et} \\ \xi_j & = & \operatorname{acl}_0(\operatorname{acl}(a_k, D), \operatorname{acl}(x_\ell, D)) \cap \operatorname{acl}(x_j, D). \end{array}$$

Puisque on a $a_1, a_2, a_3 \equiv a_1, x_3, x_2$ (et de même pour les autres couples de lignes), la proposition 3.2 implique que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est une 0-configuration de groupe. D'après [11, 8, 19] il existe un groupe H_0 connexe $*$-interprétable dans T_0 et trois génériques indépendants g_1, g_2 et h_1 de H_0 avec $g_3 = g_1g_2$, $h_2 = g_1g_2h_1$ et $h_3 = g_2h_1$, tels que α_j et g_j sont 0-interalgébriques pour chaque $j \in \{1, 2, 3\}$, et de même pour ξ_j et h_j. Notons que la stabilité de T_0 implique que H_0 est en fait une limite projective de groupes T_0-interprétables.

Soit $S \leq G \times H_0$ le stabilisateur du $\operatorname{tp}(a_1, g_1/D)$. L'ensemble

$$\begin{array}{rcl} C = \{(a, g) \in G \times H_0 & : & \forall\, (x, y) \models \operatorname{tp}(a_1, g_1/D) \text{ si } (x, y) \downarrow_D (a, g) \text{ alors} \\ & & (ax, gy) \models \operatorname{tp}(a_3, g_3/D) \text{ et } (ax, gy) \downarrow_D (a, g)\}. \end{array}$$

est une cossette à gauche de S contenant (a_2, g_2). On en déduit que la projection de S sur la première coordonnée est surjective. Par contre la projection sur la deuxième coordonnée ne l'est pas nécessairement : le type $\mathrm{tp}(g_2/D)$ n'est pas forcément générique pour H_0 au sens de T bien que le $\mathrm{tp}_0(g_2/D)$ le soit au sens de T_0. Le sous-groupe $N = \{g \in H_0 : (1, g) \in S\}$ est limite projective (de cardinalité bornée) de sous-groupes finis car $g_1 \in \mathrm{acl}(D, a_1)$. Donc $H = N_{H_0}(N)/N$ est $*$-interprétable dans T_0 ; comme S normalise $\{1\} \times N$, il induit un homomorphisme ϕ de G dans H.

L'uple réel g_3 est borné sur g_3N donc ils sont 0-interalgébriques. La proposition 3.2 implique

$$\mathrm{acl}(a_1, D), \mathrm{acl}(a_2, D) \underset{D,\alpha_3}{\overset{0}{\perp\!\!\!\perp}} \mathrm{acl}(a_3, D).$$

Ce qui entraîne

$$\mathrm{acl}(a_1, D), \mathrm{acl}(a_2, D) \underset{D,\phi(a_3)}{\overset{0}{\perp\!\!\!\perp}} \mathrm{acl}(a_3, D)$$

car α_3 et $\phi(a_3) = g_3N$ sont aussi 0-interalgébriques. □

Dans la proposition précédente le groupe H peut être trivial, par exemple si on considère le réduit à l'égalité. Afin de controler le noyau de l'homomorphisme, nous allons introduire des conditions géométriques relatives.

4. Théories relativement monobasées

Définition 4.1. La théorie T est *monobasée au dessus de* T_0 pour $\langle . \rangle$ si pour tous ensembles réels $A \subseteq B$ algébriquement clos et tout uple réel $\bar{c}$, si

$$\langle A\bar{c} \rangle \underset{A}{\overset{0}{\perp\!\!\!\perp}} B,$$

alors la base canonique $\mathrm{Cb}(\bar{c}/B)$ est algébrique sur A. (Notons que cette base canonique est un imaginaire de T).
Plus généralement, T est *monobasée au dessus de* $(T_i : i < n)$ pour $\langle . \rangle$ si pour tout $A \subseteq B$ algébriquement clos et tout uple $\bar{c}$, si

$$\langle A\bar{c} \rangle \underset{A}{\overset{i}{\perp\!\!\!\perp}} B \text{ pour tout } i < n,$$

alors la base canonique $\mathrm{Cb}(\bar{c}/B)$ est algébrique sur A.

Remarque 4.2. Toute théorie est monobasée au dessus d'elle même pour l'opérateur acl. Pour le même opérateur de clôture, si une théorie T est monobasée au-dessus de son réduit au langage de l'égalité, alors elle est monobasée au sens classique ; la réciproque est vraie si T élimine géométriquement les imaginaires.

Définition 4.3. La théorie T est 1-*ample* au dessus de T_0 pour $\langle . \rangle$ s'il existe des uples réels $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{c}$ tels que :
– $\mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \perp\!\!\!\perp^0_{\mathrm{acl}(\bar{a})} \langle \mathrm{acl}(\bar{a}), \bar{c} \rangle$.
– $\bar{c} \not\perp\!\!\!\perp_{\bar{a}} \bar{b}$.
Plus généralement, T est 1-*ample* au dessus de $(T_i : i < n)$ pour $\langle . \rangle$ s'il existe des uples $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{c}$ tels que :
– $\mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \perp\!\!\!\perp^i_{\mathrm{acl}(\bar{a})} \langle \mathrm{acl}(\bar{a}), \bar{c} \rangle$ pour tout $i < n$.
– $\bar{c} \not\perp\!\!\!\perp_{\bar{a}} \bar{b}$.

Remarque 4.4. Une théorie T est monobasée au-dessus de $(T_i : i < n)$ pour $\langle . \rangle$ si et seulement si elle n'est pas 1-ample au dessus de $(T_i : i < n)$.

Démonstration. On prend $A = \mathrm{acl}(\bar{a})$ et $B = \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b})$. $\square$

Proposition 4.5. *Supposons que $\langle . \rangle$ satisfasse (†). Alors la 1-ampleur relative est conservée par l'adjonction ou la suppression de paramètres.*

Démonstration. C'est évident pour la suppression de paramètres. Pour l'adjonction, considérons un ensemble D de paramètres tel que $T(D)$ soit monobasée au dessus de $(T_i : i < n)$. Soient $A \subseteq B$ algébriquement clos, et un uple $\bar{c}$ tels que $\langle A\bar{c} \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{A} B$ pour tout $i < n$. On peux toujours supposer $B\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} D$. Soit $A' = \mathrm{acl}(AD)$ et $B' = \mathrm{acl}(BD)$. Alors $\langle A\bar{c} \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B} B'$; donc $\langle A\bar{c} \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{B} B'$ pour tout $i < n$, d'où $\langle A\bar{c} \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{A} B'$ par transitivité. Donc $\langle A\bar{c} \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{A'} B'$. Puisque $\langle . \rangle$ satisfait (†), l'indépendance $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} A'$ implique $\langle A'\bar{c} \rangle \subseteq \mathrm{acl}_i(\langle A\bar{c} \rangle, A')$ pour tout $i < n$, et donc $\langle A'\bar{c} \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{A'} B'$.

Comme $T(D)$ est relativement monobasée, $\mathrm{Cb}(\bar{c}/B')$ est algébrique sur A'. Mais $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B} D$ implique $\mathrm{Cb}(\bar{c}/B') = \mathrm{Cb}(\bar{c}/B) \in \mathrm{acl}^{eq}(B)$. Alors

$$\mathrm{Cb}(\bar{c}/B) \in \mathrm{acl}^{eq}(B) \cap \mathrm{acl}^{eq}(A') = \mathrm{acl}^{eq}(A),$$

puisque $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} A'$. Donc T est relativement monobasée. $\square$

Remarque 4.6. De même que pour le cas classique,on peut toujours se ramener au cas où A et B sont des modèles pour la définition de relativement monobasé sous l'hypothèse (†).

Démonstration. Si A, B et $\bar{c}$ témoignent que la théorie T n'est pas monobasée au dessus de T_0 et $D \supseteq A$ est un modèle indépendant de $B\bar{c}$ sur A, alors la preuve de la proposition 4.5 montre que D, $\mathrm{acl}(BD)$ et $\bar{c}$ le témoignent aussi. Quant à B, soit $\mathfrak{M} \supseteq B$ un modèle indépendant de $\bar{c}$ sur B. Comme $\langle A\bar{c} \rangle \subseteq \mathrm{acl}(B\bar{c})$ le lemme 2.1 implique $\mathfrak{M} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{B} \langle A\bar{c} \rangle$ pour tout $i < n$, d'où $\mathfrak{M} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{A} \langle A\bar{c} \rangle$ par transitivité. Alors $\mathrm{Cb}(\bar{c}/\mathfrak{M}) = \mathrm{Cb}(\bar{c}/B) \notin \mathrm{acl}(A)$. $\square$

Example 4.7.
- La théorie DCF_0 [30, 17] d'un corps différentiellement clos de caractéristique 0 est monobasée sur la théorie ACF_0 d'un corps algébriquement clos pour la clôture différentielle acl_δ qui satisfait (†) et (‡).
- La théorie $ACFA$ [9] d'un corps de différence existentiellement clos est monobasée sur la théorie ACF d'un corps algébriquement clos (de même caractéristique) pour la σ-clôture acl_σ qui satisfait (†) et (‡).

L'hypothèse que la théorie T est relativement monobasée sur ses réduits permet de montrer que le noyau de l'homomorphisme du théorème 3.3 est fini.

Théorème 4.8. *Soit T une théorie stable avec des réduits $(T_i : i < n)$ qui ont éliminations géométriques des imaginaires. Si T est relativement monobasée au dessus de ses réduits pour un opérateur de clôture $\langle . \rangle$ satisfaisant (†) et (‡), alors tout groupe connexe type-définissable dans T se plonge définissablement modulo un noyau fini dans un produit fini de groupes type-interprétables dans les T_i.*

Démonstration. Soit G un groupe connexe type-définissable, et ϕ l'homomorphisme de G dans $H = \prod_{i<n} H_i$ donné par le théorème 3.3. Soient g et g' deux génériques indépendants de G et $\phi(gg') = \bar{h} = (h_i : i < n) \in H$. Alors pour tout $i < n$,

$$\operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g') \mathop{\downarrow}^{i}_{\bar{h}} \operatorname{acl}(gg')$$

et h_i est i-interalgébrique avec $\operatorname{acl}_i(\operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g')) \cap \operatorname{acl}(gg')$. Rappelons que H est $*$-interprétable et en fait une limite projective de produits finis de groupes interprétables dans les réduits.

Par élimination géométrique des imaginaires dans les théories T_i, on peut voir $\bar{h}$ comme un uple (éventuellement infini) de réels. L'hypothèse (†) entraîne

$$\langle \operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g') \rangle \subseteq \bigcap_{i<n} \operatorname{acl}_i(\operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g')).$$

Or, $\bar{h} \in \bigcup_{i<n} \operatorname{acl}_i(\operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g'))$, et donc par l'hypothèse (‡)

$$\langle \operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g'), \operatorname{acl}(\bar{h}) \rangle \subseteq \bigcap_{i<n} \operatorname{acl}_i(\operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g'), \operatorname{acl}(\bar{h})).$$

Ainsi, comme $\operatorname{acl}(\bar{h}) \subseteq \operatorname{acl}(gg')$, pour tout $i < n$

$$\langle \operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g'), \operatorname{acl}(\bar{h}) \rangle \mathop{\downarrow}^{i}_{\operatorname{acl}(\bar{h})} \operatorname{acl}(gg').$$

Puisque T est relativement monobasée,

$$\operatorname{acl}(g), \operatorname{acl}(g') \mathop{\downarrow}_{\operatorname{acl}(\bar{h})} \operatorname{acl}(gg').$$

Comme $gg' \in \operatorname{acl}(g, g')$, cela entraîne que $gg' \in \operatorname{acl}(\bar{h})$. Le noyau de ϕ est donc fini. Comme gg' est un uple fini, il y a une partie finie $\tilde{h} \subseteq \bar{h}$ avec $gg' \in \operatorname{acl}(\tilde{h})$. Mais alors $\tilde{h}$ est le generique d'un groupe d'arité finie $\tilde{H} = \prod_{i<n} \tilde{H}_i$, produit de groupes $\tilde{H}_i$ type-interprétable dans T_i. □

5. CM-trivialité relative

Les théories monobasées rentrent dans un cadre plus large, les théories *CM*-triviales dont on donne une définition relative qui nous permet d'étudier les groupes définissables à centre près.

Définition 5.1. La théorie T est *CM-triviale au dessus de* T_0 pour $\langle . \rangle$ si pour tous ensembles réels $A \subseteq B$ algébriquement clos et tout uple réel $\bar{c}$, si

$$\langle A\bar{c} \rangle \mathop{\downarrow}^{0}_{A} B,$$

alors la base canonique $\operatorname{Cb}(\bar{c}/A)$ est algébrique sur $\operatorname{Cb}(\bar{c}/B)$. (Notons que ces bases canoniques sont des imaginaires de T).

Plus généralement, T est CM-*triviale au dessus de* $(T_i : i < n)$ pour $\langle . \rangle$ si pour tout $A \subseteq B$ algébriquement clos et tout uple $\bar{c}$, si

$$\langle A\bar{c} \rangle \mathop{\downarrow}^{i}_{A} B \text{ pour tout } i < n,$$

alors la base canonique $\operatorname{Cb}(\bar{c}/A)$ est algébrique sur $\operatorname{Cb}(\bar{c}/B)$.

Remarque 5.2. Toute théorie est CM-triviale au dessus d'elle même pour l'opérateur acl. Pour le même opérateur de clôture, si une théorie T est CM-triviale au-dessus de son réduit au langage de l'égalité, alors elle est CM-triviale au sens classique ; la réciproque est vraie si T élimine géométriquement les imaginaires.

Toute théorie relativement monobasée est relativement CM-triviale.

Définition 5.3. La théorie T est 2-*ample* au dessus de T_0 pour $\langle . \rangle$ s'il existe des uples réels $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{c}$ tels que :
– $\mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{\mathrm{acl}(\bar{a})} \langle \mathrm{acl}(\bar{a}), \bar{c} \rangle$.
– $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{b}} \bar{a}\bar{b}$.
– $\bar{c} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{acl}^{eq}(\bar{a}) \cap \mathrm{acl}^{eq}(\bar{b})} \bar{a}$.

Plus généralement, T est 2-*ample* au dessus de $(T_i : i < n)$ pour $\langle . \rangle$ s'il existe des uples $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{c}$ tels que :
– $\mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{\mathrm{acl}(\bar{a})} \langle \mathrm{acl}(\bar{a}), \bar{c} \rangle$ pour tout $i < n$.
– $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{b}} \bar{a}\bar{b}$.
– $\bar{c} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{acl}^{eq}(\bar{a}) \cap \mathrm{acl}^{eq}(\bar{b})} \bar{a}$.

Proposition 5.4. *Une théorie T est CM-triviale au-dessus de $(T_i : i < n)$ si et seulement si elle n'est pas 2-ample au dessus de $(T_i : i < n)$.*

Démonstration. Supposons que T soit 2-ample pour $\langle . \rangle$, propriété temoignée par des uples $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{c}$. Posons $A = \mathrm{acl}(\bar{a})$ et $B = \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b})$. Par définition $\langle A\bar{c} \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{A} B$ pour tout $i < n$. Puisque $\bar{c} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{acl}^{eq}(\bar{a}) \cap \mathrm{acl}^{eq}(\bar{b})} \bar{a}$, la base canonique $\mathrm{Cb}(\bar{c}/A)$ n'est pas algébrique sur $\bar{b}$. D'autre part, $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{b}} B$ implique $\mathrm{Cb}(\bar{c}/B) \in \mathrm{acl}^{eq}(\bar{b})$, d'où $\mathrm{Cb}(\bar{c}/A)$ n'est pas algébrique sur $\mathrm{Cb}(\bar{c}/B)$. Donc T n'est pas CM-triviale au-dessus de $(T_i : i < n)$.

Réciproquement, supposons que T ne soit pas CM-triviale au-dessus de $(T_i : i < n)$ pour $\langle . \rangle$, propriété temoignée par des ensembles A, B et un uple $\bar{c}$. On pose $\bar{a} = \langle \bar{a} \rangle = A$ et $\beta = \mathrm{Cb}(\bar{c}/B)$. Prenons un modèle M tel que $M \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\beta} B\bar{c}$ et $\beta \in M^{eq}$. Considérons alors un uple réel $\bar{b}$ dans M qui algébrise β. Par définition de la base canonique, $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\beta} B$ donc $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\beta} MB$. Alors $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{b}} \bar{a}\bar{b}$. De plus, $\beta \in \mathrm{acl}^{eq}(B)$ implique $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B} M$, ce qui entraîne $\mathrm{acl}(\bar{a}\bar{b}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B} \langle \bar{a}\bar{c} \rangle$ car $\bar{a} \in B$ et $\langle \bar{a}\bar{c} \rangle \subset \mathrm{acl}(\bar{a}\bar{c})$. Alors $\mathrm{acl}(\bar{a}\bar{b}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{B} \langle \bar{a}\bar{c} \rangle$. Par hypothèse $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{\bar{a}} \langle \bar{a}\bar{c} \rangle$; donc par transitivité, on conclut $\mathrm{acl}(\bar{a}\bar{b}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{A} \langle A\bar{c} \rangle$ pour tout $i < n$. Enfin, $\mathrm{Cb}(\bar{c}/A) \notin \mathrm{acl}^{eq}(\bar{b})$, car $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\beta} \bar{a}$. Donc, $\bar{c} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{acl}^{eq}(\bar{a}) \cap \mathrm{acl}^{eq}(\bar{b})} \bar{a}$. □

Proposition 5.5. *Supposons que $\langle . \rangle$ satisfasse $(\dagger)$. Alors la CM-trivialité relative est conservée par l'adjonction ou la suppression de paramètres.*

Démonstration. La conservation par adjonction de paramètres est évidente. Pour la suppression, supposons que D soit un ensemble de paramètres tel que $T(D)$ soit CM-triviale au dessus de $(T_i : i < n)$, et considérons $A \subseteq B$ algébriquement clos, ainsi qu'un uple $\bar{c}$, avec $\langle A\bar{c} \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{A} B$ pour tout $i < n$. On peut toujours supposer $AB\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} D$. Soit $A' = \mathrm{acl}(AD)$ et $B' = \mathrm{acl}(BD)$. Alors $B\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} D$, et comme dans la preuve de la proposition 4.5 on obtient $\langle A'\bar{c} \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{A'} B'$.

Par hypothèse, $\mathrm{Cb}(\bar{c}/A') \in \mathrm{acl}^{eq}(\mathrm{Cb}(\bar{c}/B'), D)$. Or, $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} D$, d'où $\mathrm{Cb}(\bar{c}/A') = \mathrm{Cb}(\bar{c}/A) \in \mathrm{acl}^{eq}(A)$; de même $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B} D$ donne $\mathrm{Cb}(\bar{c}/B') = \mathrm{Cb}(\bar{c}/B) \in \mathrm{acl}^{eq}(B)$.

Alors $AB \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, D$ implique $\mathrm{Cb}(\bar{c}/A) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{Cb}(\bar{c}/B)} D$, et donc $\mathrm{Cb}(\bar{c}/A) \in \mathrm{acl}^{eq}(\mathrm{Cb}(\bar{c}/B))$. □

Remarque 5.6. Comme dans le cas classique [18, Corollary 2.5], sous l'hypothèse (†) on peut toujours se ramener au cas où A et B sont des modèles dans la définition de CM-trivialité relative.

Démonstration. Soit $D \supseteq A$ un modèle indépendant de $B\bar{c}$ sur A, et $B' = \mathrm{acl}(BD)$. Alors comme dans la preuve de la proposition 4.5 on a $\langle D\bar{c}\rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{D} B'$ pour tout $i < n$. De plus, $\mathrm{Cb}(\bar{c}/D) = \mathrm{Cb}(\bar{c}/A)$ et $\mathrm{Cb}(\bar{c}/B') = \mathrm{Cb}(\bar{c}(B)$. On peut donc remplacer A par D.

Quant à B, soit $\mathfrak{M} \supseteq B$ un modèle indépendant de $\bar{c}$ sur B. Alors $\langle A\bar{c}\rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{A} \mathfrak{M}$ pour $i < n$ comme dans la preuve de la remarque 4.6, et $\mathrm{Cb}(\bar{c}/\mathfrak{M}) = \mathrm{Cb}(\bar{c}/B)$. On peut donc remplacer B par $\mathfrak{M}$. □

Rappelons que les groupes définissables dans une structure CM-triviale de rang de Morley fini sont nilpotent-par-finis car une telle structure n'interprète ni de corps infini, ni de mauvais groupes [18]. Pour le cas relativement CM-trivial, on obtient le théorème suivant.

Théorème 5.7. *Soit T une théorie stable avec des réduits $(T_i : i < n)$ qui ont élimination géométrique des imaginaires. Si T est relativement CM-triviale au dessus de ces réduits pour un opérateur de clôture $\langle . \rangle$ satisfaisant (†) et (‡), alors tout groupe G connexe type-définissable dans T s'envoie définissablement dans un produit de groupes type-interprétables dans T_i de noyau contenu (à indice fini près) dans le centre $Z(G)$ de G.*

Démonstration. Soit ϕ l'homomorphisme de G dans $H = \prod_{i<n} H_i$ donnée par le théorème 3.3. Rappelons que les H_i sont $*$-interpretables, donnés par des limites projectives des groupes type-interprétables dans T_i. On pose $N = \ker(\phi)^0$, un sous-groupe de G type-définissable, et on suppose que $N \not\leq Z(G)$ afin d'obtenir une contradiction. Le sous-groupe $Z = C_G(N)$ est alors un sous-groupe propre relativement définissable de G, et donc par connexité est d'indice infini.

Lemme 5.8. *Soient a, b, g, g' des éléments génériques de G, tous indépendants. On considère la configuration suivante de plan-droite-point dans G^4 :*

- *P est l'hyperplan des $(x, y, z, u) \in G^4$ avec $z = axybu$ et $xy \in gg'N$.*
- *ℓ est la droite définie par $xy = gg'$ et $z = agg'bu$.*
- *p est un point $(g, g', agg'bu, u)$ pour un u générique de G.*

Soient $\ulcorner P \urcorner$ le paramètre canonique de P et $\ulcorner \ell \urcorner$ celui de ℓ. Soit c le paramètre canonique de $gg'N$, et $[a, b]$ la classe de (a, b) sous la relation d'équivalence c-définissable $(x, y)E(x', y')$ si $\forall\, v \in gg'N$, $xvy = x'vy'$. Alors,

- *$\ulcorner P \urcorner = ([a, b], c)$ et $\ulcorner aZ \urcorner \in \mathrm{dcl}^{eq}(\ulcorner P \urcorner)$.*
- *$\ulcorner \ell \urcorner = (gg', agg'b)$ et $\ulcorner aZ \urcorner \notin \mathrm{acl}^{eq}(\ulcorner \ell \urcorner)$.*

De plus, $\mathrm{Cb}(p/\ulcorner P \urcorner) = \ulcorner P \urcorner$ *et* $\mathrm{Cb}(p/\ulcorner \ell \urcorner) = \ulcorner \ell \urcorner$. *Enfin $p \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\ulcorner \ell \urcorner} \ulcorner P \urcorner$.*

Démonstration. L'ensemble des produits des deux premières coordonnées de P est $gg'N$, donc $c \in \ulcorner P \urcorner$. De plus, $axybu = z = a'xyb'u$ pour tout $x, y, u \in G$ avec $xy \in gg'N$ si et seulement si $avb = a'vb'$ pour tout $v \in gg'N$. Cela entraîne que $[a, b] = [a', b']$. On conclut que $\ulcorner P \urcorner = ([a, b], c)$. Soit $[a, b] = [a', b']$, c'est-à-dire $a'^{-1}agg'n = gg'nb'b^{-1}$ pour tout $n \in N$. En posant $n = 1$, on obtient $(a'^{-1}a)^{gg'} = b'b^{-1}$. Alors $b'b^{-1}n = (a'^{-1}a)^{gg'}n = nb'b^{-1}$ pour tout $n \in N$, donc

$b'b^{-1} \in C_G(N) = Z$. De plus $a'^{-1}a \in Z$ car N est normal. Donc $a'Z = aZ$ et par conséquent $\ulcorner aZ \urcorner \in \mathrm{dcl}^{eq}(\ulcorner P \urcorner)$.

Le point (x, y, z, u) est dans ℓ si $xy = gg'$ et $zu^{-1} = agg'b$. Alors $\ulcorner \ell \urcorner = (gg', agg'b)$. Le sous-groupe Z est d'indice infini dans G et $gg', agg'b \perp a$ donc $\ulcorner aZ \urcorner \notin \mathrm{acl}^{eq}(\ulcorner \ell \urcorner)$.

Notons que $g, u \perp a, b, gg'$ et que $c \in \mathrm{dcl}^{eq}(gg')$, ce qui implique que

$$p \mathop{\perp}_{\ulcorner \ell \urcorner} \ulcorner P \urcorner.$$

Comme (g, u) est générique dans G^2 sur $\ulcorner \ell \urcorner$ et est interdéfinissable avec p sur $\ulcorner \ell \urcorner$, cela entraîne que p est point générique de la droite ℓ sur $\ulcorner \ell \urcorner$. Le paramètre canonique $\ulcorner \ell \urcorner$ est alors la base canonique $\mathrm{Cb}(p/\ulcorner \ell \urcorner)$ car ℓ est une cossette du sous-groupe

$$\{(x, y, z, u) \in G^4 \mid xy = 1 \text{ et } z = u\}.$$

Enfin, pour montrer que $\mathrm{Cb}(p/\ulcorner P \urcorner) = \ulcorner P \urcorner = ([a, b], c)$, on remarque en premier lieu que $c \in \mathrm{Cb}(p/\ulcorner P \urcorner)$ car $c \in \mathrm{dcl}^{eq}(gg') \subseteq \mathrm{dcl}^{eq}(p)$. De plus gg' est générique de la cossette $gg'N$ sur c et donc sur $\ulcorner P \urcorner$. Il suit que gg' est générique sur $\mathrm{Cb}(p/\ulcorner P \urcorner)$. Considérons a', b' du même type que a, b sur $\mathrm{Cb}(p/\ulcorner P \urcorner)$ (en particulier $agg'bu = a'gg'b'u$). On peut supposer que $p \perp_{\mathrm{Cb}(p/\ulcorner P \urcorner)} a, b, a', b'$, donc que gg' est générique sur a, b, a', b'. L'équation $avb = a'vb'$ est vérifiée par gg' donc pour tout point générique de la cossette $gg'N$ sur a, b, a', b'. Comme auparavant $(a'^{-1}a)^{gg'} = b'b^{-1}$ centralise tout $n \in N$ générique sur a, b, a', b', et donc N entier car tout élément de N est le produit de deux éléments génériques. On conclut que $[a, b] = [a', b']$. □

Afin d'utiliser la propriété de CM-trivialité relative, on doit se ramener à des ensembles de réels. Pour cela soit $\bar{h} = \phi(gg')$. Alors $\bar{h}$ est interdéfinissable avec gg' modulo $\ker \phi$, donc interalgébrique avec le paramètre c. Par élimination géométrique des imaginaires dans les théories T_i, on peut supposer que c est un uple (éventuellement infini) réel.

On pose $A = \mathrm{acl}(a, b, c)$, $B = \mathrm{acl}(A, \ulcorner \ell \urcorner) = \mathrm{acl}(a, b, gg')$. Alors $\ulcorner P \urcorner \subseteq \mathrm{acl}^{eq}(A)$ et on déduit facilement de $g, g', u \perp a, b$ que

$$p \mathop{\perp}_{\ulcorner P \urcorner} A \text{ et } p \mathop{\perp}_{\ulcorner \ell \urcorner} B.$$

Ceci implique

$$\mathrm{Cb}(p/A) = \ulcorner P \urcorner \notin \mathrm{acl}^{eq}(\ulcorner \ell \urcorner) = \mathrm{acl}^{eq}(\mathrm{Cb}(p/B))$$

car

$$\ulcorner aZ \urcorner \in \mathrm{dcl}^{eq}(\ulcorner P \urcorner) \setminus \mathrm{acl}^{eq}(\ulcorner \ell \urcorner).$$

Par CM-trivialité relative, il y a un $i < n$ tel que

$$\langle p, A \rangle \mathop{\not\perp}^{i}_{A} B.$$

Autrement dit,

$$\langle g, g', agg'bu, u, \mathrm{acl}(a, b, c) \rangle \mathop{\not\perp}^{i}_{\mathrm{acl}(a,b,c)} \mathrm{acl}(a, b, gg').$$

Puisque $gg' \perp_{\mathrm{acl}(a,b,c)} g'bu$, on a par le lemme 2.1

$$\mathrm{acl}(a, b, gg') \mathop{\perp}^{i}_{\mathrm{acl}(a,b,c)} \mathrm{acl}(a, b, c, g'bu)$$

et donc par transitivité

$$\langle g, g', agg'bu, u, \mathrm{acl}(a,b,c)\rangle \underset{\mathrm{acl}(a,b,c,g'bu)}{\not\downarrow^i} \mathrm{acl}(a,b,gg').$$

Posons $D = \mathrm{acl}(a,b,g'bu)$. Alors $u \in \mathrm{acl}(D,g')$ et $agg'bu \in \mathrm{acl}(D,g)$. Donc

$$\langle \mathrm{acl}(D,g), \mathrm{acl}(D,g'), \mathrm{acl}(D,c)\rangle \underset{\mathrm{acl}(D,c)}{\not\downarrow^i} \mathrm{acl}(D,gg').$$

Or, $g, g' \downarrow D$; le théorème 3.3 au dessus de D implique

$$\mathrm{acl}(D,g), \mathrm{acl}(D,g') \underset{D,c}{\downarrow^i} \mathrm{acl}(D,gg').$$

Puisque $\langle . \rangle$ satisfait (†) et $g \downarrow_D g'$, on a

$$\langle \mathrm{acl}(D,g), \mathrm{acl}(D,g')\rangle \underset{\mathrm{acl}(D,c)}{\downarrow^i} \mathrm{acl}(D,gg'). \tag{1}$$

De plus on peut supposer que $c \in \bigcup_{j<n} \mathrm{acl}_j(\mathrm{acl}(g), \mathrm{acl}(g'))$ car chaque h_i est i-interalgébrique avec $\mathrm{acl}_i(\mathrm{acl}(g), \mathrm{acl}(g')) \cap \mathrm{acl}(gg')$. Par (‡),

$$\langle \mathrm{acl}(D,g), \mathrm{acl}(D,g'), \mathrm{acl}(D,c)\rangle \subseteq \mathrm{acl}_i(\langle \mathrm{acl}(D,g), \mathrm{acl}(D,g')\rangle, \mathrm{acl}(D,c)).$$

D'où

$$\langle \mathrm{acl}(D,g), \mathrm{acl}(D,g'), \mathrm{acl}(D,c)\rangle \underset{\mathrm{acl}(D,c)}{\downarrow^i} \mathrm{acl}(D,gg'), \tag{2}$$

ce qui donne la contradiction souhaitée.

Donc $\ker \phi^0 \leq Z(G)$. La condition de chaîne sur les centralisateurs entraîne que $Z(G)$ est relativement définissable dans G. Ainsi, l'élément $gg'Z(G)$ du quotient $G/Z(G)$ est un imaginaire fini algébrique sur $\phi(gg') = \bar{h}$. Comme dans la preuve du théorème 4.8 on peut se ramener au cas où h est le générique d'un groupe d'arité finie qui est produit de groupes type-interprétables dans les réduits. □

Corollaire 5.9. *Avec les hypothèses du théorème précédent, tout groupe simple type-définissable G dans T se plonge définissablement dans un groupe type-interprétable dans un des réduits.*

Démonstration. Par le théorème 5.7 il y a un homomorphisme non-triviale ϕ de G dans un produit $H = \prod_{i<n} H_i$ de groupes type-interprétables dans les réduits. Puisque G est simple, il y a un $i < n$ tel que $\pi_i \circ \phi$ plonge G dans H_i, où π_i est la projection sur la i-ème coordonnée. □

Corollaire 5.10. *Avec les hypothèses du théorème précédent, tout corps type-définissable K dans T est définissablement isomorphe à un sous-corps d'un corps interprétable dans une des théories T_i. Si T est de rang de Lascar fini, K est définissablement isomorphe à un corps type-interprétable dans un des réduits.*

Démonstration. Considérons le groupe algébrique simple $PSL_2(K)$. Par le corollaire précédent, il se plonge définissablement dans un groupe type-interprétable H dans un des réduits T_i. Ce plongement nous permet de supposer que $K^+ \rtimes K^\times$ est un sous-groupe de H, sachant que l'action par translation de $K^\times$ sur K^+ se traduit dans H par l'action par conjugaison. Soient $\bar{K}^+$ l'enveloppe interprétable de K^+ dans T_i et $\bar{K}^\times$ l'enveloppe interprétable de $K^\times$. Notons que $K^\times$ normalise aussi $\bar{K}^+$, d'où $\bar{K}^\times \leq N_H(\bar{K}^+)$. Donc $\bar{K}^\times$ agit par conjugaison sur $\bar{K}^+$. Rappelons de plus que les enveloppes satisfont les mêmes propriétés génériques [27]. Donc pour tout $a \in \bar{K}^+$ générique il y a $b \in \bar{K}^\times$ avec $b \cdot 1_{K^+} = a$. Comme $\bar{K}^\times$ est abélien, tout élément générique $a \in \bar{K}^+$ a le même fixateur $F = C_{\bar{K}^\times}(a)$. Tout élément de $\bar{K}^+$ étant la somme de deux génériques, F est aussi le fixateur de $\bar{K}^+$ entier, $F = C_{\bar{K}^\times}(\bar{K}^+)$. Comme $F \cap K^\times = \{1\}$ on peut quotienter par F et supposer que $\bar{K}^\times$ ne fixe aucun élément générique de $\bar{K}^+$.

On peut identifier génériquement $\bar{K}^+$ et $\bar{K}^\times$ en associant à $a \in \bar{K}^+$ générique l'unique $b \in \bar{K}^\times$ avec $a = b \cdot 1_{K^+}$. Ainsi on définit génériquement un produit distributif sur $\bar{K}^+$, qu'on étend à $\bar{K}^+$ entier : Donnés $a, b \in \bar{K}^+$ on trouve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \bar{K}^+$ génériques tels que $a = a_1 + a_2$ et $b = b_1 + b_2$, et chaque a_i est indépendant de chaque b_j. On pose alors

$$a \cdot b = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 \ .$$

On vérifie que la définition ne dépend pas du choix des décompositions : en effet si b est générique et si a_1, a_2, a_1' et a_2' sont génériques sur b tels que $a_1 + a_2 = a_1' + a_2'$ et a_2 est générique sur a_1', a_2' et b alors la distributivité générique entraîne

$$a_1 b = (a_1' + (a_2' - a_2))b = a_1' b + (a_2' - a_2)b = a_1' b + a_2' b - a_2 b.$$

Ainsi on obtient une structure de corps T_i-définissable sur $\bar{K}^+$ qui étend celle de K.

Le dernier énoncé suit du fait que dans une théorie superstable la base canonique est déterminée par une suite de Morley finie, et qu'une paire propre de corps infinis n'est pas de rang fini. □

Remarque 5.11. Sans la condition (‡) on peut montrer que l'homomorphisme du théorème 5.7 n'est pas trivial si G est non-abélien : si N était d'indice fini dans G, le paramètre canonique c de la classe $gg'N$ dans la preuve serait algébrique. L'indépendance (1)

$$\langle \mathrm{acl}(D,g), \mathrm{acl}(D,g') \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;\;|}^{i}_{\mathrm{acl}(D,c)} \mathrm{acl}(D, gg')$$

donnerait trivialement l'indépendance (2)

$$\langle \mathrm{acl}(D,g), \mathrm{acl}(D,g'), \mathrm{acl}(D,c) \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;\;|}^{i}_{\mathrm{acl}(D,c)} \mathrm{acl}(D, gg')$$

et ainsi la contradiction souhaitée. Par conséquent les deux corollaires du théorème restent vrais sans l'hypothèse (‡).

6. Amalgames

Dans cette partie on montre que les corps colorés et les fusions de deux théories fortement minimales (ou bien sur l'égalité ou sur un espace vectoriel) obtenues par amalgamation à la Hrushovski-Fraïssé (libres ou collapsées) sont relativement CM-triviales au-dessus des théories de bases par rapport à la clôture autosuffisante. Notre approche consiste à isoler des caractéristiques communes de ces exemples pour montrer la CM-trivialité relative de façon uniforme. Même si Hrushovski a déjà énoncé une caractérisation des groupes définissables pour la fusion sur l'égalité, le théorème 5.7 et ses corollaires nous permettent en particulier d'obtenir de nouveaux résultats sur la définissabilité de corps et de mauvais groupes pour les corps colorés et les fusions sur un espace vectoriel. Cette méthode marche également pour les constructions *ab initio* (dans un langage relationnel) ; dans ce cas le réduit T_0 est l'égalité et les prédicats constituent la couleur. Vu que la CM-trivialité absolue de ces structures était déjà connue, notre approche n'apporte rien de nouveau. Si on voit le groupe de Baudisch à partir de la classe de structures de la forme (V, N) avec V un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$ et N un sous-espace du produit extérieur $\bigwedge^2 V$, avec prédimension

$$\delta(V, N) = \mathrm{dimlin}_{\mathbb{F}_p} V - \mathrm{dimlin}_{\mathbb{F}_p} N,$$

on conjecture que sa théorie est CM-triviale au dessus de la théorie de V. Ceci montrerait en particulier que la classe de nilpotence de tout groupe définissable connexe est au plus 2, une amélioration du résultat de Baudisch [2].

Nous revenons maintenant à une description succinte des constructions par amalgamation des corps colorés et des fusions, afin de mettre en évidence les caractéristiques qui nous sont utiles pour vérifier la propriété de CM-trivialité relative.

Coloré On se donne une théorie de base T_0 et un nouveau prédicat P, dont les points sont dits *colorés*, et on considère la classe $\mathcal{F}$ des modèles colorés de $T_0^{\forall}$;

Fusion On considère plusieurs théories T_i avec un réduit commun T_{com}, et $\mathcal{F}$ dénote la classe des modèles de chaque $T_i^{\forall}$.

L'objectif est alors de construire une structure avec une géométrie prédéterminée. Pour cela, on introduit une prédimension δ sur les modèles de $\mathcal{F}$ finiment engendrés. Par exemple, l'ensemble fortement minimal *ab initio* de Hrushovski [15] utilise la prédimension

$$\delta(A) = |A| - |R(A)|$$

où R est une nouvelle relation ternaire. La fusion [14, 6] de deux théories fortement minimales T_1 et T_2 avec réduit commun $\aleph_0$-catégorique T_{com} utilise la prédimension

$$\delta(A) = \mathrm{RM}_1(A) + \mathrm{RM}_2(A) - \mathrm{RM}_{com}(A)\,;$$

si T_{com} est l'égalité, $\mathrm{RM}_{com}(A) = |A|$; si T_{com} est la théorie d'un espace vectoriel infini sur $\mathbb{F}_p$, alors $\mathrm{RM}_{com}(A) = \mathrm{dimlin}_{\mathbb{F}_p}(A)$.

Les corps colorés [23, 24, 1, 4, 5, 3] sont des corps algébriquement clos avec un predicat P pour un sous-ensemble, avec prédimension

$$\delta(k) = 2\,\mathrm{degtr}(k) - \dim_P(P(k)).$$

Dans le corps *noir*, le predicat P dénote un sous-ensemble N et $\dim_P(N) = |N|$. Le corps *rouge* est de caractéristique positif p, dont P dénote un sous-groupe additif propre R et $\dim_P(R) = \mathrm{dimlin}_{\mathbb{F}_p}(R)$. Enfin, le corps *vert* est de caractéristique 0 et P dénote un sous-groupe multiplicatif divisible sans torsion $\ddot{U}$ (vu comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel), et $\dim_P(\ddot{U}) = \mathrm{dimlin}_{\mathbb{Q}}(\ddot{U})$.

Selon la partie négative de la prédimension on distingue les deux comportements suivants :

Trivial La partie négative de la prédimension correspond à la cardinalité d'un certain prédicat (ou, plus généralement, à la dimension d'une prégéométrie dégénérée). Par exemple, la fusion de deux théories sur l'égalité ou le corps noir.

Modulaire Il y a un groupe abélien $\emptyset$-définissable dans le langage commun à toutes les théories, et toute structure est munie de cette loi de groupe. La partie négative de la prédimension correspond à la dimension linéaire. C'est le cas de la fusion de deux théories sur un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel et des corps rouges et verts.

Grâce à une Morleysation, on suppose pour la suite que le langage est relationnel sauf pour la loi de groupe dans le cas modulaire.

On se restreint à la sous-classe $\mathcal{K}$ des modèles dans $\mathcal{F}$ tels que toute sous-structure finiment engendrée a une prédimension positive ou nulle. Pour tout M dans $\mathcal{K}$, on définit une dimension d_M relative à M de la façon suivante :

$$d_M(A) = \min\{\delta(B) \mid A \subseteq B \subset M\}.$$

L'ensemble A est *autosuffisant* dans M si $d_M(A) = \delta(A)$. On demande que la prédimension satisfasse la propriété de sous-modularité

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) - \delta(A \cap B),$$

ce qui entraîne que l'intersection de deux structures autosuffisantes l'est aussi, et ainsi pour tout $A \subseteq M$ l'existence d'une plus petite structure autosuffisante contenant A. On l'appelle la *clôture autosuffisante* de A et on la dénote $\langle A \rangle_M$; comme elle est unique, elle est contenue dans $\mathrm{acl}_{\mathrm{Th}(M)}(A)$.

En travaillant sur des paramètres A, on peut aussi définir une version relative $\delta(./A)$ de la prédimension ; par sous-modularité on aura alors

$$\delta(\bar{a}/A) = \inf\{\delta(\bar{a}/A_0)\} = \inf\{\delta(\bar{a}A_0) - \delta(A_0) : A_0 \subseteq A \text{ finiment engendré}\}.$$

Grâce à la Morleysation, la prédimension $\delta(A)$ est déterminée par

$$\bigcup_i \mathrm{diag}_i(A) \text{ plus la coloration de } A \text{ (s'il y en a).}$$

À partir d'une sous-classe $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$ de structures finiment engendrées avec la propriété d'amalgamation pour les plongements autosuffisants, on construit par la méthode de Fraïssé un amalgame dénombrable $\mathfrak{M}$ universel et fortement homogène pour les sous-structures autosuffisantes. Le modèle générique $\mathfrak{M}$ s'avère être un modèle de $\bigcup_{i<n} T_i$; il est stable, superstable si δ ne prend que des valeurs entières et ω-stable si on peut borner les multiplicités des formules [29]. Il est de rang fini dans le cas collapsé (obtenu par le choix d'un sous-classe de $\mathcal{K}$ suffisamment restreint).

L'indépendance au sens de T est caractérisée de la manière suivante :

($\star$) Pour deux uples a, b et un ensemble C algébriquement clos,

$$a \underset{C}{\perp} b$$

si et seulement si

$$\begin{array}{l} \langle aC \rangle \underset{C}{\perp}^{i} \langle bC \rangle \\ \text{pour tout } i \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \textbf{Trivial } \langle abC \rangle = \langle aC \rangle \cup \langle bC \rangle. \\ \textbf{Modulaire } \langle abC \rangle \text{ est le sous-groupe engendré par} \\ \quad \langle aC \rangle \text{ et } \langle bC \rangle \text{, et ses points colorés (s'il y en a)} \\ \quad \text{sont les produits de ceux de } \langle aC \rangle \text{ et de } \langle bC \rangle. \end{cases}$$

Remarquons que les prédimensions considérées impliquent

$\binom{\star}{\star}_1$ $\delta(\bar{a}/A) \leq 0$ pour tout $\bar{a} \in \bigcup_i \mathrm{acl}_i(A)$

Pour la fusion, cela vient du fait que $\mathrm{RM}_{com}(a/A) \geq \mathrm{RM}_i(a/A)$ pour $i = 1, 2$. De plus, pour les classes d'amalgamation $\mathcal{K}_0$ considérées, on peut toujours amalgamer librement avec une extension de dimension relative strictement positive. Ceci donne

$\binom{\star}{\star}_2$ $\mathrm{acl}(A) \subseteq \{a : d_{\mathfrak{M}}(a/\langle A \rangle) = 0\}$.

Le collapse consiste à rendre algébriques (certains) éléments de dimension 0 en restreignant la classe $\mathcal{K}_0$.

Lemme 6.1. *La propriété* $(\star)$ *implique* $(\dagger)$ *et* $\binom{\star}{\star}_1 + \binom{\star}{\star}_2$ *implique* $(\ddagger)$ *pour la clôture autosuffisante.*

Démonstration. La première implication est évidente dans le cas trivial et elle suit dans le cas modulaire du fait que la loi du groupe est définie dans le langage commun.

Pour la seconde implication, on considère un ensemble A autosuffisant et un uple $\bar{a} \in \bigcup_i \mathrm{acl}_i(A)$. Soit $B = \mathrm{acl}(\bar{a})$. Alors $B = \langle B \rangle = \mathrm{acl}(\langle \bar{a} \rangle)$. Soient $A_0 \subseteq A$ et $B_0 \subseteq B$ finiment engendrés autosuffisants avec $\bar{a} \in \bigcup_i \mathrm{acl}_i(A_0)$ et $\langle \bar{a} \rangle \subseteq B_0$. Comme $B_0 \subseteq \mathrm{acl}(\bar{a})$ est autosuffisant, condition $\binom{\star}{\star}_2$ implique $\delta(B_0) = \delta(\langle \bar{a} \rangle)$. De plus, $\binom{\star}{\star}_1$ et l'autosuffisance de A_0 impliquent $\delta(A_0\bar{a}) = \delta(A_0)$, et $A_0\bar{a}$ est autosuffisant. Donc $\langle \bar{a} \rangle \subseteq A_0\bar{a} \cap B_0$. Ainsi

$$\delta(A_0\bar{a} \cap B_0) \geq \delta(\langle \bar{a} \rangle) = \delta(B_0).$$

Par sous-modularité

$$\delta(A_0B_0) \leq \delta(A_0\bar{a}) + \delta(B_0) - \delta(A_0\bar{a} \cap B_0) \leq \delta(A_0\bar{a}) = \delta(A_0)\ ;$$

puisque A_0 est autosuffisant, A_0B_0 l'est aussi. Donc AB est autosuffisant comme réunion de sous-structures autosuffisantes finiment engendrés. $\square$

Nous pouvons maintenant montrer

Théorème 6.2. *La théorie T de l'amalgame $\mathfrak{M}$ est CM-triviale au-dessus des théories $(T_i : i < n)$ pour l'opérateur de clôture autosuffisante $\langle . \rangle$.*

Démonstration. D'après le lemme 5.4, il suffit de montrer que T n'est pas 2-ample au-dessus des $(T_i : i < n)$. Soient donc $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{c}$ des uples tels que :

(1) $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont algébriquement clos ;
(2) $\mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^i_{\bar{a}} \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle$ pour tout $i < n$;
(3) $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{\bar{b}} \bar{a}\bar{b}$.

En rajoutant aux paramètres un modèle contenant $\mathrm{acl}^{eq}(\bar{a}) \cap \mathrm{acl}^{eq}(\bar{b})$ et indépendant sur ces paramètres de $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, on peut supposer que $\mathrm{acl}^{eq}(\bar{a}) \cap \mathrm{acl}^{eq}(\bar{b}) = \mathrm{acl}^{eq}(\emptyset)$. Il suffira donc de montrer que $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} \bar{a}$. On supposera, grâce à la Remarque 5.6, que $\bar{a}$ est un modèle.

Par $(\star)$, la condition (3) entraîne que

$$\mathrm{acl}(\bar{c}, \bar{b}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^i_{\bar{b}} \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \quad \text{pour tout } i < n,$$

et que la sous-structure engendrée par $\mathrm{acl}(\bar{c}, \bar{b}) \cup \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b})$ est autosuffisante. De plus, dans le cas modulaire, les (éventuels) points colorés de cette dernière sont les produits des points colorés de $\mathrm{acl}(\bar{c}, \bar{b})$ et de $\mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b})$. On l'intersecte avec $\langle \bar{c}, \bar{a} \rangle$. Rappelons que l'intersection de deux ensembles autosuffisants l'est aussi.

La condition (2) implique $\langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \subseteq \bar{a}$, donc

$$\langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \bar{b} \subseteq \bar{a} \cap \bar{b} \subseteq \mathrm{acl}(\emptyset).$$

Soit $D = \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \mathrm{acl}(\bar{c}, \bar{b})$. Alors

$$\mathrm{Cb}_i(D/\mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b})) \subseteq \bar{a} \cap \bar{b} = \mathrm{acl}(\emptyset) \quad \text{pour tout } i < n.$$

Donc $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^i \bar{a}$ pour tout $i < n$. Comme $\langle \bar{c} \rangle \subset D$, il reste à montrer que la sous-structure engendrée par $D \cup \bar{a}$ est autosuffisante, et dans le cas modulaire que ses points colorés sont les produits de ceux de D et de $\bar{a}$.

Dans le cas dégénéré, le langage est relationnel et $D \cup \bar{a}$ est bien une sous-structure. Or,

$$\begin{array}{rcl} \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \langle \mathrm{acl}(\bar{c}, \bar{b}), \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \rangle & = & \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap (\mathrm{acl}(\bar{c}, \bar{b}) \cup \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b})) \\ & = & (\langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \mathrm{acl}(\bar{c}, \bar{b})) \cup (\langle \bar{c}, \bar{a} \rangle \cap \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b})) \\ & = & D \cup \bar{a}, \end{array}$$

ce qui est autosuffisant.

Considérons maintenant le cas modulaire, avec groupe associé Γ. Montrons d'abord que le groupe $D \cdot \bar{a}$ engendré par D et $\bar{a}$ est autosuffisant. Sinon, prenons $\bar{\gamma} \in \langle D, \bar{a} \rangle \setminus D \cdot \bar{a}$ de longueur minimale avec $\delta(\bar{\gamma}/D \cdot \bar{a}) < 0$. Par $(\star)$, l'indépendance $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{b}} \bar{a}$ entraîne que la clôture autosuffisante

$$\langle \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}), \mathrm{acl}(\bar{c}, \bar{b}) \rangle$$

est égale au produit $\mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \cdot \mathrm{acl}(\bar{c}, \bar{b})$, et sa couleur est le produit des couleurs de chaque côté. Donc $\langle D, \bar{a} \rangle \subseteq \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \cdot \mathrm{acl}(\bar{c}, \bar{b})$ et $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}_2$ avec $\bar{\gamma}_1 \in \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b})$ et $\bar{\gamma}_2 \in \mathrm{acl}(\bar{c}, \bar{b})$. Dans le cas coloré on peut supposer $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\gamma}_2$ colorés.

Puisque $D \cup \bar{\gamma}$ est contenu dans $\langle D, \bar{a} \rangle \subseteq \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle$, on a

$$D, \bar{\gamma} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{\bar{a}} \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b})$$

pour tout $i < n$ par la deuxième hypothèse. Également, $D \cup \bar{\gamma}_2$ est contenu dans $\mathrm{acl}(\bar{c}, \bar{b})$ qui est i-indépendant de $\mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b})$ sur $\bar{b}$ pour tout $i < n$. Donc on a

$$D, \bar{\gamma}_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{\bar{b}} \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}).$$

Pour un type p stationnaire sur A et $B \supseteq A$ on notera $p|_B$ l'unique extension non-deviante de p sur B. Rappelons que deux types stationnaires p et q (éventuellement sur des domaines différents) sont *parallèles* (ce que l'on dénote $p \parallel q$) s'ils ont même extension non-deviante sur la réunion de leurs domaines. Le parallélisme est une relation d'équivalence.

Pour chaque $i < n$ notons $p_i(X, \bar{x}, \bar{a}) = \mathrm{tp}_i(D, \bar{\gamma}/\bar{a})$. Ces types sont stationnaires puisque $\bar{a}$ est un modèle. Soit E la relation sur $\mathrm{tp}(\bar{a})$ donnée par

$$\bar{a}' E \bar{a}'' \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \bar{\gamma}' \in \Gamma^{|\bar{\gamma}|} \bigwedge_{i<n} \bar{\gamma}' \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')|_{\bar{a}', \bar{\gamma}'} \parallel p_i(X, \bar{x}, \bar{a}''),$$

où la multiplication par $\bar{\gamma}'$ agit à gauche sur $\bar{x}$. De plus, dans le cas coloré, on demande que $\bar{\gamma}'$ soit coloré.

Cette relation est type-définissable en utilisant les rangs locaux ; voyons que c'est une relation d'équivalence. Soit donc $\bar{a}' E \bar{a}''$ et $\bar{a}'' E \bar{a}'''$, témoigné par des uples $\bar{\gamma}'$ et $\bar{\gamma}''$. Donc

$$\bigwedge_{i<n} \bar{\gamma}' \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')|_{\bar{a}', \bar{\gamma}'} \parallel p_i(X, \bar{x}, \bar{a}'') \quad \text{et} \quad \bigwedge_{i<n} \bar{\gamma}'' \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a}'')|_{\bar{a}'', \bar{\gamma}''} \parallel p_i(X, \bar{x}, \bar{a}''').$$

Ceci signifie que pour tout $i < n$

$$\begin{array}{rcl} \bar{\gamma}' \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''} & = & p_i(X, \bar{x}, \bar{a}'')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''} \\ \bar{\gamma}'' \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a}'')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''} & = & p_i(X, \bar{x}, \bar{a}''')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''}. \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \bar{\gamma}'' \bar{\gamma}' \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''} & = & \bar{\gamma}'' \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a}'')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''} \\ & = & p_i(X, \bar{x}, \bar{a}''')|_{\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}''', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}''} \end{array}$$

et $\bar{a}'E\bar{a}'''$. La symétrie se montre de la même manière, et la réflexivité est évidente. Par stabilité, E est équivalente à une intersection de relations d'équivalence définissables ; ses classes sont donc des $*$-uples imaginaires.

On considère maintenant $\bar{a}' \models \mathrm{stp}(\bar{a}/\bar{b})$. Puisque $\bar{\gamma}_1 \in \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b})$ et

$$\bar{\gamma}_1^{-1} \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a})|_{\mathrm{acl}(\bar{a},\bar{b})} = \mathrm{tp}_i(D, \bar{\gamma}_2/\mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b})),$$

et que ce dernier ne i-dévie pas sur $\bar{b}$ pour $i < n$, il y a $\bar{\gamma}' \in \mathrm{acl}(\bar{a}', \bar{b})$ (coloré) tel que

$$\bar{\gamma}'^{-1} \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')|_{\mathrm{acl}(\bar{a}',\bar{b})}$$

est aussi une extension non-déviante de $\mathrm{stp}_i(D, \bar{\gamma}_2/\bar{b})$ pour tout $i < n$. Donc

$$\bar{\gamma}_1^{-1} \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a})|_{\mathrm{acl}(\bar{a},\bar{b}),\mathrm{acl}(\bar{a}',\bar{b})} = \bar{\gamma}'^{-1} \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a}')|_{\mathrm{acl}(\bar{a},\bar{b}),\mathrm{acl}(\bar{a}',\bar{b})}$$

est l'unique extension non-déviante de $\mathrm{stp}_i(D, \bar{\gamma}_2/\bar{b})$ à $\mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}) \cup \mathrm{acl}(\bar{a}', \bar{b})$ pour tout $i < n$. On en conclut que $\bar{a}E\bar{a}'$, et la classe de $\bar{a}$ modulo E est $\mathrm{acl}^{eq}(\bar{b})$-définissable. Elle est donc dans $\mathrm{acl}^{eq}(\bar{a}) \cap \mathrm{acl}^{eq}(\bar{b}) = \mathrm{acl}^{eq}(\emptyset)$. Soit N un modèle ω-saturé indépendant de $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$. Alors on trouve un représentant $\bar{a}_0$ de la classe $\bar{a}E$ dans N. Il existe donc un uple (éventuellement coloré) $\bar{\gamma}_0$ dans Γ tel que pour tout $i < n$

$$\bar{\gamma}_0 \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a}_0)|_{\bar{a}_0,\bar{\gamma}_0} \parallel p_i(X, \bar{x}, \bar{a}).$$

En particulier, pour une réalisation $D', \bar{\gamma}'$ de $\mathrm{tp}(D, \bar{\gamma}/\bar{a})|_{\bar{a},\bar{a}_0,\bar{\gamma}_0}$, on a que $D', \bar{\gamma}_0\bar{\gamma}'$ réalise $p_i(X, \bar{x}, \bar{a}_0)|_{\bar{a},\bar{a}_0,\bar{\gamma}_0}$. Ainsi

$$\delta(\bar{\gamma}_0\bar{\gamma}'/D'\bar{a}_0) = \delta(\bar{\gamma}/D\bar{a}) < 0$$

car δ est déterminé par les i-diagrammes et la couleur. On a donc

$$\bar{\gamma}_0\bar{\gamma}' \in \langle D'\bar{a}_0\rangle \subseteq \mathrm{acl}(D', \bar{a}_0),$$

par minimalité de la longueur de $\bar{\gamma}$. L'indépendance

$$\bar{a}_0, \bar{\gamma}_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{a}} D', \bar{\gamma}'$$

implique $\bar{\gamma}_0 \in \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{a}_0)$.

De même, on trouve un uple $\bar{\gamma}_3 \in \mathrm{acl}(\bar{b}, \bar{a}_0)$ tel que pour tout $i < n$

$$\bar{\gamma}_3 \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a}_0)|_{\bar{a}_0,\bar{\gamma}_3} \parallel \mathrm{stp}_i(D, \bar{\gamma}_2/\bar{b}).$$

Comme $\bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_3 \in \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}_0)$, on a

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_1^{-1} \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a})|_{\mathrm{acl}(\bar{a},\bar{b},\bar{a}_0)} &= \mathrm{tp}_i(D, \bar{\gamma}_2/\mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}_0)) = \bar{\gamma}_3 \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a}_0)|_{\mathrm{acl}(\bar{a},\bar{b},\bar{a}_0)}\\ &= \bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_0^{-1} \cdot p_i(X, \bar{x}, \bar{a})|_{\mathrm{acl}(\bar{a},\bar{b},\bar{a}_0)}.\end{aligned}$$

Puisque $D, \bar{\gamma}$ réalise $p_i(X, \bar{x}, \bar{a})|_{\mathrm{acl}(\bar{a},\bar{b},\bar{a}_0)}$ pour $i < n$, l'uple $D, \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_0^{-1}\bar{\gamma}$ le réalise aussi. Comme δ est déterminé par les i-diagrammes et la couleur,

$$\delta(\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_0^{-1}\bar{\gamma}/D\bar{a}) = \delta(\bar{\gamma}/D\bar{a}) < 0 \;;$$

la minimalité de la longueur de $\bar{\gamma}$ implique alors

$$\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_0^{-1}\bar{\gamma} \in \langle D\bar{a}\rangle \subseteq \langle \bar{c}, \bar{a}\rangle.$$

Comme $\bar{\gamma} \in \langle D, \bar{a}\rangle \subseteq \langle \bar{c}, \bar{a}\rangle$, on a

$$\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_0^{-1} \in \langle \bar{c}, \bar{a}\rangle \cap \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}_0) = \langle \bar{c}, \bar{a}\rangle \cap \mathrm{acl}(\bar{a}, \bar{b}) = \mathrm{acl}(\bar{a}) = \bar{a},$$

où la première égalite suit de $\bar{a}_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\ \bar{a}\bar{b}\bar{c}$, la deuxième de $\mathrm{acl}(\bar{a},\bar{b}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{\bar{a}} \langle \bar{c}, \bar{a}\rangle$. En modifiant $\bar{\gamma}_0$ on peut supposer que $\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_0^{-1} = \bar{1}$. Mais

$$\bar{\gamma}_1 \in \mathrm{acl}(\bar{a},\bar{b}), \quad \bar{\gamma}_0 \in \mathrm{acl}(\bar{a},\bar{a}_0), \quad \bar{\gamma}_3 \in \mathrm{acl}(\bar{b},\bar{a}_0), \quad \bar{a}_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\ \bar{a}\bar{b}.$$

Comme $\mathrm{tp}(\bar{a}_0/\bar{a},\bar{b})$ est le cohéritier de sa restriction à $\mathrm{acl}(\emptyset)$ (qui est un modèle), on peut supposer $\bar{\gamma}_0 \in \mathrm{acl}(\bar{a}) = \bar{a}$ et $\bar{\gamma}_3 \in \mathrm{acl}(\bar{b}) = \bar{b}$. Alors

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_0\bar{\gamma}_3^{-1}\bar{\gamma}_2$$

et donc

$$\bar{\gamma}_3^{-1}\bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_0^{-1}\bar{\gamma} \in \mathrm{acl}(\bar{b},\bar{c}) \cap \langle D, \bar{a}\rangle \subseteq \mathrm{acl}(\bar{b},\bar{c}) \cap \langle \bar{c}, \bar{a}\rangle = D.$$

Il suit que $\bar{\gamma}$ est dans $D \cdot \bar{a}$, ce qui montre l'autosuffisance de $D \cdot \bar{a}$.

Enfin, dans le cas coloré modulaire, montrons qu'un point coloré $\bar{\gamma}$ de $D \cdot \bar{a}$ est un produit de points colorés de D et de $\bar{a}$. Pour cela, on choisit $\bar{\gamma}_1 \in \mathrm{acl}(\bar{a},\bar{b})$ et $\bar{\gamma}_2 \in \mathrm{acl}(\bar{c},\bar{b})$ colorés avec $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}_2$, ce qui est possible grâce à $(\star)$ puisque $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{b}} \bar{c}$. On procède de la même façon qu'auparavant afin de trouver $\bar{a}_0 \in N$, $\gamma_0 \in \mathrm{acl}(\bar{a},\bar{a}_0)$ et $\gamma_3 \in \mathrm{acl}(\bar{b},\bar{a}_0)$ avec $\gamma_1\gamma_3\gamma_0^{-1} = 1$, mais cette fois le calcul de prédimensions n'est pas nécessaire : le type $p_i(X,x,\bar{a})$ entraîne directement que $x \in X \cdot \bar{a}$.

Enfin, la caractérisation de l'indépendance donnée par $(\star)$ implique que $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\ \bar{a}$, et donc $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\ \bar{a}$. □

Corollaire 6.3. *Dans les corps colorés de rang de Morley fini tout groupe infini simple interprétable est linéaire. Aucun corps rouge n'admet de mauvais groupe interprétable. Si un mauvais groupe était interprétable dans un corps vert, il ne serait constitué que d'éléments semi-simples.*

Démonstration. Par le théorème précédent les corps colorés sont CM-triviaux audessus de la théorie des purs corps algébriquement clos. Considérons un groupe G infini simple définissable dans une de ces théories. Par le théorème 5.7, il se plonge définissablement dans un groupe connexe algébrique H. Par le théoréme de Chevalley [26], H est une extension d'une variété abélienne (qui est commutative) par un groupe linéaire. Comme G est simple, il doit se plonger dans la partie linéaire de H. En particulier, tout mauvais groupe interprétable est linéaire. Dans [25] il est montré qu'un tel mauvais groupe ne peut exister qu'en caractéristique nulle et qu'il n'est constitué alors que d'éléments semi-simples (c.à.d. *diagonalisables* en tant que matrices). □

Références

[1] J. T. Baldwin, K. Holland, *Constructing ω-stable structures : rank 2 fields*, J. Symb. Logic **65**, 371–391 (2000).

[2] A. Baudisch, *A new uncountably categorical group*, Trans. Amer. Math. Soc. **348**, 3889–3940 (1996).

[3] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Die böse Farbe*, J. Inst. Math. Jussieu, **8**, 415-443 (2009).

[4] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *On fields and Colours*, Algebra i Logika, **45**, 92–105 (2006).

[5] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *Red fields*, J. Symbolic Logic, **72**, 207–225 (2007).

[6] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *Fusion over a vector space*, J. Math. Logic **6**, 141–162 (2006).

[7] I. Ben Yaacov, I. Tomašić, F. Wagner, *Constructing an almost hyperdefinable group*, J. Math. Logic **4**(2), 181-212 (2005).

[8] E. Bouscaren, *The Group Configuration–after E. Hrushovski*. Dans : *The Model Theory of Groups*, 199–209, Notre Dame Math. Lectures, 11, University of Notre Dame Press (1989).

[9] Z. Chatzidakis, E. Hrushovski, *Model theory of difference fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **351**, 2997–3071 (1999).

[10] D. Evans, *Ample dividing*, J. Symb. Logic **68**, 1385–1402 (2003).

[11] E. Hrushovski,*Contributions to stable model theory*, Ph.D. Thesis, Berkely (1986).

[12] P. Kowalski, A. Pillay, *A note on groups definable in difference fields*, Proc. Amer. Math. Soc., **130**, 205–212, (2002).

[13] E. Hrushovski, A. Pillay, *Weakly normal groups*. Dans : *Logic colloquium '85 (Orsay, 1985)*, 233–244, Stud. Logic Found. Math., 122, North-Holland (1987).

[14] E. Hrushovski, *Strongly minimal expansions of algebraically closed fields*, Israel J. Math, **79**, 129–151 (1992).

[15] E. Hrushovski, *A new strongly minimal set*, Annals of Pure and Applied Logic, **62**, 147–166 (1993).

[16] E. Hrushovski, *The Mordell-Lang conjecture for function fields*, J. Amer. Math. Soc., **9**, 667–690 (1996).

[17] D. Marker, M. Messmer, A. Pillay, *Model theory of fields*, Second edition, Lecture Notes in Logic 5, Ass. Symb. Logic, A K Peters (2006).

[18] A. Pillay, *The geometry of forking and groupe of finite Morley rank*, J. Symb. Logic **60**, 1251–1259 (1995).

[19] A. Pillay, Geometric Stability Theory, Oxford Logic Guides, 33. *Oxford University Press* (1996).

[20] A. Pillay, *Some foundational questions concerning differential algebraic groups*, Pacific J. Math., **179**, 179–200 (1997).

[21] A. Pillay, T. Scanlon, F. O. Wagner, *Supersimple fields and division rings*, Math. Res. Lett., **5**, 473–483 (1998).

[22] B. Poizat, Cours de théorie des modèles. Une introduction à la logique mathématique contemporaine, *Nur al-Mantiq wal-Ma´rifah* (1985). Traduction anglaise : A course in model theory. An introduction to contemporary mathematical logic, *Springer-Verlag* (2000).

[23] B. Poizat, *Le carré de l'égalité*, J. Symb. Logic **64**, 1339–1355 (1999).

[24] B. Poizat, *L'égalité au cube*, J. Symb. Logic, **66**, 1647–1676 (2001).

[25] B. Poizat, *Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner*, J. Symb. Logic, **66**, n^o 4,1637–1646 (2001).

[26] M. Rosenlicht, *Some basic theorems on algebraic groups*, Amer. J. Math., **78**, 401–443 (1956).

[27] F. O. Wagner, *Subgroups of stable groups*, J. Symb. Logic, **55**, 151–156 (1990).

[28] F. O. Wagner, *CM-triviality and stable groups*, J. Symb. Logic **63**, 1473–1495 (1998).

[29] F. O. Wagner, *Fields and fusion : Hrushovski constructions and their definable groups*, preprint, http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00511388/fr/

[30] C. Wood, *Differentially closed fields*. Dans : *Model theory and algebraic geometry*, 129–141, Lecture Notes in Math 1696, Springer-Verlag (1998).

Université de Lyon ; CNRS ; Université Lyon 1 ; INSA de Lyon F-69621 ; Ecole Centrale de Lyon ; Institut Camille Jordan UMR5208, 43 boulevard du 11 novembre 1918, F–69622 Villeurbanne Cedex, France

E-mail address: blossier@math.univ-lyon1.fr

E-mail address: pizarro@math.univ-lyon1.fr

E-mail address: wagner@math.univ-lyon1.fr