

УДК 517.9

О вычислении топологической степени оператора Пуанкаре в сингулярных случаях¹

Ключевые слова: периодические колебания, топологическая степень, математическая модель лагуны

И. С. Мартынова

Воронежский Государственный Университет

Аннотация: В статье развивается метод оценки топологической степени отображения Пуанкаре математической модели мелкой лагуны, находящейся под T-периодическим воздействием. С помощью этого метода мы получаем условия для параметров модели, гарантирующие существование T-периодического решения в определенной области. Сложность задачи связана с тем, что непосредственное применение принципа невозвращаемости М.А. Красносельского-А.И. Перова приводит к сингулярному векторному полю.

UDC 517.9

A geometrical method to study plankton oscillations in the mathematical model of a shallow lagoon under periodic climate change

Key words: periodical oscillations, topological degree, mathematical model of lagoon

S. Martynova

Voronezh State University

Annotation: This paper develops a technique to evaluate the topological degree of the Poincare map associated to the mathematical model of a shallow lagoon subjected to a T-periodic forcing. By means of this technique we derive conditions for the parameters of the model guaranteeing the existence of a T-periodic solution in a certain region.

1. Введение.

В статье изучается существование 12-периодических решений системы, описывающей математическую модель мелкой лагуны при периодическом изменении климата:

¹Работа поддержана грантом МК-1530.2010.1 Президента РФ для молодых кандидатов наук.

$$x'_1 = \lambda_1 s(t)x_1 - \lambda_2 x_1^2 - \lambda_3 x_2 \left(\frac{x_1}{k_p + x_1} \right), \quad (1)$$

$$x'_2 = \lambda_4 x_2 \left(\frac{x_1}{k_p + x_1} \right) - \lambda_5 x_2, \quad (2)$$

где дополнительное внешнее воздействие имеет вид:

$$s(t) = M + N \sin \left(\frac{2\pi}{12} t + 1 \right). \quad (3)$$

Рассматриваемая задача обусловлена рядом численных экспериментов на тему периодических решений системы (1)-(2), опубликованных в статье [1]. Целью данной статьи является дать некоторое теоретическое обоснование полученных в [1] численных результатов. Статья организована следующим образом. В следующей части приводится основной результат о топологической степени оператора Пуанкаре системы (1)-(2). В заключительной части основной результат применяется для доказательства существования 12-периодического решения этой системы с некоторыми параметрами, обусловленными динамикой модели мелкой лагуны.

Для дальнейшего рассмотрения введем следующие константы:

$$\begin{aligned} u_{N,1} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (M - N), \\ p_{N,1} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (M + N), \\ r_1 &= \frac{\lambda_5 k}{\lambda_4 - \lambda_5}, \\ r_{N,2} &= (k + r_1)(\lambda_1 (M + N) - \lambda_2 r_1). \end{aligned}$$

2. Геометрический метод для получения результатов о динамике модели лагуны.

Следующая теорема дает достаточные условия существования в системе 12-периодических решений, лежащих строго в первой четверти.

Теорема. Предположим, что $\lambda_i > 0$, $i \in \overline{1,5}$, $k > 0$, $M > 0$, $\lambda_4 > \lambda_5$ и зафиксируем такое $N_0 \geq 0$, что

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} (M - N_0) > \Gamma_1. \quad (4)$$

Тогда существует $\eta > 0$ такое, что при каждом $N \in [0, N_0]$ система (1)-(3) имеет 12-периодическое решение x_N , удовлетворяющее соотношениям

¹Работа поддержана грантом МК-1530.2010.1 Президента РФ для молодых кандидатов наук.

$$\eta \leq x_{N,1} \leq p_1 + \eta,$$

$$\eta \leq x_{N,2} \leq \max\{1, \Gamma_{N,2}\} e^{12\lambda_4 \frac{p_{N,1}}{k+p_{N,1}} + 12\lambda_5} + \eta.$$

Доказательство. Рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda_1 \left(M + N \sin\left(\frac{2\pi}{12}t + 1\right) \right) x_1 - \lambda_2 x_1^2 - \\ - \lambda_3 x_2 \frac{x_1}{k + x_1} + \varepsilon := P_{\varepsilon, N}(t, x_1, x_2), \\ x'_2 = \lambda_4 x_2 \frac{x_1}{k + x_1} - \lambda_5 x_2 x_2^\varepsilon := Q_{\varepsilon, N}(x_1, x_2), \end{cases} \quad (5)$$

где $\varepsilon > 0$ и обозначим через $\Omega_{\varepsilon, N}(T)$ оператор Пуанкаре-Андрона системы (5). Положим

$$f_{\varepsilon, N, 1}(x_1) = \left((\lambda_1(M - N) - \lambda_2 x_1)(k + x_1) + \varepsilon + \frac{\varepsilon k}{x_1} \right),$$

$$i \in \overline{1, 2}, N \in [0, N_0],$$

$$f_{\varepsilon, N, 2}(x_1) = \left((\lambda_1(M - N) - \lambda_2 x_1)(k + x_1) + \varepsilon + \frac{\varepsilon k}{x_1} \right),$$

$$i \in \overline{1, 2}, N \in [0, N_0],$$

$$g_\varepsilon(x_1) = \left(\frac{\lambda_4}{\lambda_5} \cdot \frac{x_1}{k + x_1} \right)^\frac{1}{\varepsilon}.$$

Можно проверить, что для $x \in \mathbb{R}_+^2$ и $t \in [0, T]$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon, N}(t, x_1, x_2) &\leq 0 \\ \text{для любого } x_2 &\geq f_{\varepsilon, N, 2}, N \in [0, N_0], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon, N}(t, x_1, x_2) &\geq 0 \\ \text{для любого } x_2 &\leq f_{\varepsilon, N, 1}, N \in [0, N_0], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(x_1, x_2) &\leq 0 \\ \text{для любого } x_2 &\geq g_\varepsilon(x_1), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(x_1, x_2) &\geq 0 \\ \text{для любого } x_2 &\leq g_\varepsilon(x_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $\eta > 0$ произвольная фиксированная константа, рассмотрим $\varepsilon \in (0, \eta)$. Заметим, что существует единственное положительное число $p_{\varepsilon, N, 1}$ такое, что $f_{\varepsilon, N, 2}(p_{\varepsilon, N, 1}) = 0$. Следовательно, мы имеем

$$p_{\varepsilon, N, 1} \rightarrow p_{N, 1} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (10)$$

равномерно по $N \in [0, N_0]$.

Пусть $p_{\varepsilon, N, 2} \in (g_\varepsilon(p_{\varepsilon, N, 1}), \infty)$ и обозначим через $e_{\varepsilon, N, 1}$ такую точку, что $f_{\varepsilon, N, 1}(e_{\varepsilon, N, 1}) > p_{\varepsilon, N, 2}$ и $e_{\varepsilon, N, 1} \in (0, \varepsilon)$. Пусть $e_{\varepsilon, N, 1} \in (0, g(e_{\varepsilon, N, 1}))$. Заметим, что $e_{\varepsilon, N, 1} < p_{\varepsilon, N, 1}$, $e_{\varepsilon, N, 2} < p_{\varepsilon, N, 2}$ и

$$e_{\varepsilon, N, 1} \rightarrow 0, e_{\varepsilon, N, 2} \rightarrow 0 \text{ как } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (11)$$

равномерно по $N \in [0, N_0]$.

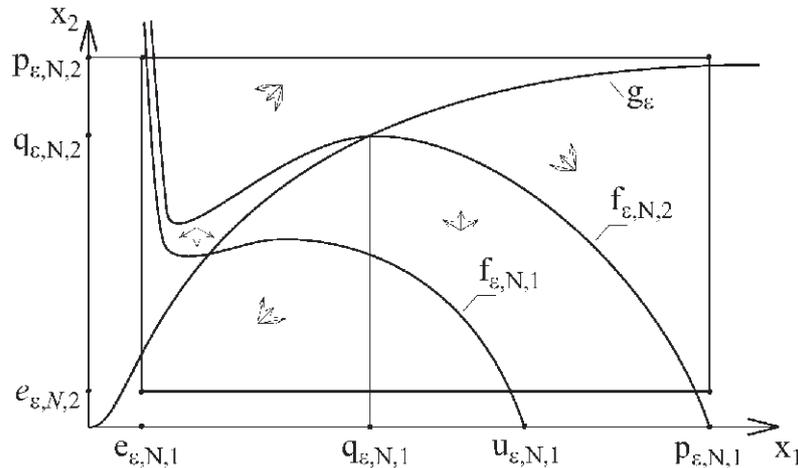


Рис. 1: Схематичный график векторного поля $(P_\varepsilon(t, x_1, x_2), Q_\varepsilon(x_1, x_2))$ при $t \in [0, T]$, где различные направления вектора в фиксированной точке соответствуют различным значениям $t \in [0, T]$.

По построению (см. рис. 1) граница прямоугольного множества $R_{\varepsilon, N} = (e_{\varepsilon, N, 1}, e_{\varepsilon, N, 2}, p_{\varepsilon, N, 1}, p_{\varepsilon, N, 2})$ содержит точки T - невозвращаемых решений системы (5) и, следовательно (см. [2], лемма 6.1),

$$d(I - \Omega_{\varepsilon, N}, R_{\varepsilon, N}) = d\left(-\begin{pmatrix} P_{\varepsilon, N}(0, \cdot) \\ G_{\varepsilon, N} \end{pmatrix}, R_{\varepsilon, N}\right).$$

С другой стороны, из соотношений (6)-(9) следует, что поле

$$-\begin{pmatrix} P_{\varepsilon, N}(0, \cdot) \\ G_{\varepsilon, N} \end{pmatrix}, (R_{\varepsilon, N})$$

на границе множества $R_{\varepsilon, N}$ направлено во внутрь (см. рис. 2) и, таким образом,

$$d(I - \Omega_{\varepsilon, N}, R_{\varepsilon, N}) = d\left(-\begin{pmatrix} P_{\varepsilon, N}(0, \cdot) \\ G_{\varepsilon, N} \end{pmatrix}, R_{\varepsilon, N}\right) = 1 \quad (12)$$

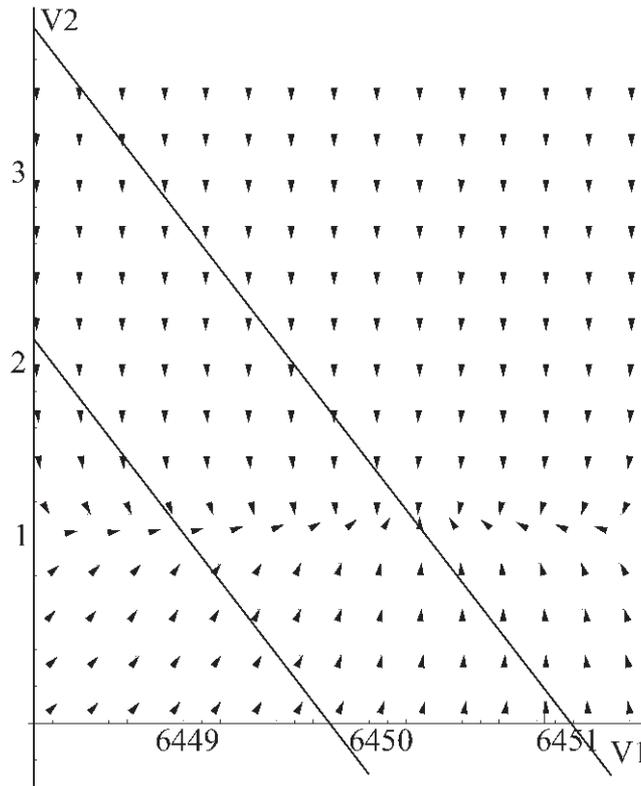


Рис. 2: Схематичный график векторного поля $(P_{\varepsilon,N}(0,\cdot), G_{\varepsilon,N})$ при $\varepsilon=0,3$, значениях $\lambda_1 = 1.29, \lambda_2 = 0.0002, \lambda_3 = 0.93, \lambda_4 = 6.9, \lambda_5 = 5.8, k = 100$.

Заметим, что мы можем выбрать достаточно малое $\varepsilon_0 \in (0, \eta)$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ будет существовать единственная константа $q_{\varepsilon,N,1} > 0$ такая, что $f_{\varepsilon,N,2}(q_{\varepsilon,N,1}) = g_{\varepsilon}(q_{\varepsilon,N,1})$. Пусть $q_{\varepsilon,N,2} = f_{\varepsilon,N,2}^{-1}(q_{\varepsilon,N,1})$. Так как

$$f_{\varepsilon,N,2}(x_1) \rightarrow f_{0,N,2}(x_1) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, x_1 > 0, \quad (13)$$

$$g_{\varepsilon}(x_1) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, x_1 \in (0, r_1), \quad (14)$$

$$g_{\varepsilon}(x_1) \rightarrow \infty \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, x_1 > r_1, \quad (15)$$

и $f_{0,N,2}(r_1) = r_{N,2} > 0$, то

$$q_{\varepsilon,N,1} \rightarrow r_1 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$q_{\varepsilon,N,2} \rightarrow r_2 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (16)$$

Обозначим через $x_{\varepsilon,N}$ 12-периодическое решение системы (5) такое, что $x_{\varepsilon,N}(0) \in R_{\varepsilon,N}$. Покажем, что

$$x_{\varepsilon,N,2}(0) \leq \max\{1, q_{\varepsilon,N,2}\} e^{12\lambda_4 \frac{P_{\varepsilon,N,1}}{k+P_{\varepsilon,N,1}} + 12\lambda_5} \quad (17)$$

для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $N \in [0, N_0]$.

Предположим противное, что существует $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $N \in [0, N_0]$ такие, что

¹Работа поддержана грантом МК-1530.2010.1 Президента РФ для молодых кандидатов наук.

$$x_{\varepsilon,N,2}(0) > \max\{1, q_{\varepsilon,N,2}\} e^{\frac{12\lambda_4 p_{\varepsilon,N,1}}{k+p_{\varepsilon,N,1}} + 12\lambda_5}. \quad (18)$$

Продолжим функцию $x_{\varepsilon,N}$ на интервал $[-12,0]$, периодически. Из геометрических соображений существует $s \in [-12,0)$ такое, что

$$\begin{cases} x_{\varepsilon,N,2}(s) = q_{\varepsilon,N,2}, \\ x_{\varepsilon,N,2}(t) > q_{\varepsilon,N,2}, t \in (s,0]. \end{cases} \quad (19)$$

Действительно, если $x_{\varepsilon,N,2}(t) = g_{\varepsilon,N,2}$ для всех $t \in [0,12]$, то условия (6)-(9) означают, что неравенства $x'_{\varepsilon,N,1} > 0$ и $x'_{\varepsilon,N,2} > 0$ не могут быть выполнены одновременно при $t \in [0,12]$. Но это противоречит тому, что система (5) не имеет постоянных решений и производная $x'_{\varepsilon,N}$ непрерывно-дифференцируемой 12-периодической непостоянной функции $x_{\varepsilon,N}$, действующей в \mathbb{R}^2 , должна пройти все направления при t меняющемся от 0 до 12. Из (18) имеем, что $x_{\varepsilon,N,2}(0) > 1$ и, учитывая (19), выводим (см. [2], § 1.4) существование $\tau \in (s,0)$ такого, что

$$\begin{cases} x_{\varepsilon,N,2}(\tau) = \max\{1, q_{\varepsilon,N,2}\}, \\ x_{\varepsilon,N,2}(t) > \max\{1, q_{\varepsilon,N,2}\}, t \in (\tau,0]. \end{cases} \quad (20)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_4 x_2 \frac{x_1}{k+x_1} - \lambda_5 x_2 \right) - \\ & - \left(\lambda_4 x_2 \frac{x_1}{k+x_1} - \lambda_5 x_2 x_2^\varepsilon \right) = \\ & = \lambda_5 x_2 x_2^\varepsilon - \lambda_5 x_2 = \\ & = \lambda_5 x_2 (x_2^\varepsilon - 1) > 0, x_2 > 1 \end{aligned} \quad (21)$$

тогда, используя (20) для решения $y_{\varepsilon,N,\delta}$ задачи Коши

$$\begin{cases} y' = \left(\lambda_4 \frac{x_{\varepsilon,N,1}(t)}{k+x_{\varepsilon,N,1}(t)} - \lambda_5 \right) y, \\ y(\tau) = x_{\varepsilon,N,2}(\tau) + \delta, \end{cases} \quad (22)$$

где $\delta > 0$, имеем неравенство

$$x_{\varepsilon,N,2} < y_{\varepsilon,N,\delta}, t \in [\tau,0].$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем

$$x_{\varepsilon,N,2} < y_{\varepsilon,N,0}, t \in [\tau,0],$$

где $y_{\varepsilon,N,0}$ есть решение (22) с $\delta = 0$. Таким образом, имеем оценку

$$\begin{aligned}
x_{\varepsilon, N, 2}(0) &\leq y_{\varepsilon, N}(0) = \\
&= x_{\varepsilon, N, 2}(\tau) e^{\int_0^\tau \left(\lambda_4 \frac{x_{\varepsilon, N, 1}(t)}{k + x_{\varepsilon, N, 1}} - \lambda_5 \right) dt} \leq \\
&\leq \max\{1, q_{\varepsilon, N, 2}\} e^{12\lambda_4 \frac{p_{\varepsilon, N, 1}}{k + p_{\varepsilon, N, 1}} + 12\lambda_5},
\end{aligned}$$

которая удовлетворяет (18) и, следовательно, (17) выполнено. Используя отношения (10) и (16), из (17) получаем, что

$$\begin{aligned}
x_{\varepsilon, N, 2}(0) &< \max\{1, r_{N, 2}\} e^{12\lambda_4 \frac{p_{\varepsilon, N, 1}}{k + p_{\varepsilon, N, 1}} + 12\lambda_5} + \eta \quad (23) \\
\varepsilon &\in (0, \varepsilon_0), N \in [0, N_0].
\end{aligned}$$

Покажем, что $\eta > 0$ может быть уменьшено настолько, что

$$x_{\varepsilon, N, 1}(0) \geq \eta \text{ для всех } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), N \in [0, N_0]$$

и

$$x_{\varepsilon, N, 2}(0) \geq \eta \text{ для всех } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), N \in [0, N_0].$$

Предположим противное, то есть, что существуют последовательности

$$\varepsilon_k \rightarrow 0, N_k \rightarrow N_* \in [0, N_0] \text{ при } k \rightarrow \infty$$

такие, что

$$x_{\varepsilon, N_k, 1}(0) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty \quad (24)$$

или

$$x_{\varepsilon, N_k, 2}(0) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Так как x_{ε_k, N_k} удовлетворяет (5), последовательность $\{x_{\varepsilon_k, N_k}\}_{k=1}^\infty$ - компактна и без ограничения общности можем рассматривать $x_{\varepsilon_k, N_k} \rightarrow x_{0, N_*}$ при $k \rightarrow \infty$.

Из (6) и (7) (см. рис. 1) имеем существование некоторого $t_n \in [0, 12]$, такого, что

$$\begin{aligned}
x_{\varepsilon_k, N_k, 2}(t_n) &\in \\
&\in [f'_{\varepsilon_k, N_k, 1}(x_{\varepsilon_k, N_k, 1}(t_k)), f'_{\varepsilon_k, N_k, 2}(x_{\varepsilon_k, N_k, 1}(t_k))].
\end{aligned}$$

На самом деле, одно из следующих отношений выполнено

$$x'_{\varepsilon_k, N_k, 1}(t) > 0, t \in [0, 12]$$

или

$$x'_{\varepsilon_k, N_k, 1}(t) < 0, t \in [0, 12].$$

Но, как уже было замечено, вектор $x'_{\varepsilon, N}(t)$ должен пройти все направления при t меняющемся от 0 до 12. Аналогично, существует $s_n \in [0, 12]$ такое, что

$$x_{\varepsilon_k, N_k, 2}(s_n) = g_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_k, N_k, 1}(s_n)).$$

Следовательно, по условиям (13), (15) существуют $t_0, s_0 \in [0, 12]$ такие, что

$$x_{0,N^*,2}(t_0) \in [f_{0,N^*,1}(x_{0,N^*,1}(t_0)), f_{0,N^*,2}(x_{0,N^*,1}(t_0))], \quad (26)$$

$$x_{0,N^*,1}(s_0) \leq r_1. \quad (27)$$

Из соотношений (24)-(25) следует, что либо

$$x_{0,N^*,1}(0) = 0, \quad (28)$$

либо

$$x_{0,N^*,2}(0) = 0, \quad (29)$$

Покажем, что оба этих равенства не верны.

Во-первых, равенство (28) влечет

$$x_{0,N^*,1}(t) = 0, t \in [0,12]$$

и из (26) имеем, что $x_{0,N^*,2}(t) \neq 0$. Но можно заметить, что система (1) не имеет ненулевых 12-периодических решений вида $x_0(t) = (0, x_{02}(t))$.

Аналогично, если имеет место равенство (29), то

$$x_{0,N^*,2}(t) = 0, t \in [0,12]. \quad (30)$$

Обозначим через $u_{\varepsilon,N^*,1}$ такую точку, при которой $f_{\varepsilon,N^*,1}(u_{\varepsilon,N^*,1}) = 0$.

Заметим, что

$$u_{\varepsilon_k,N^*,2} \rightarrow u_{1,N^*} \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (31)$$

из (30) и (26) получаем

$$x_{0,N^*,1}(t_0) \geq u_{1,N^*}. \quad (32)$$

Также из (31) и (7) имеем, что

$$P_{0,N^*}(t, x_1, 0) \geq 0, x_1 \in [0, u_{1,N^*}], \quad (33)$$

$$t \in [0,12].$$

Из периодичности функции $x_{0,N^*,1}$, соотношений (32) и (33) заключаем

$$x_{0,N^*,1}(t) \geq u_{1,N^*}, t \in [0,12]. \quad (34)$$

Оценки (27) и (34) противоречат условию (4) и, таким образом, (29) не имеет места.

Доказательство завершено.

3. Приложение полученного результата.

Используя следующие значения параметров системы (1)-(2), (см. [1], таблицы 3, 4):

$$\lambda_1 = 1.29, \lambda_2 = 0.0002, \lambda_3 = 0.93,$$

$$\lambda_4 = 6.9, \lambda_5 = 5.8, k = 100,$$

получаем следующее следствие доказанной теоремы.

Следствие. Пусть параметры системы (1)-(2) заданы значениями

¹Работа поддержана грантом МК-1530.2010.1 Президента РФ для молодых кандидатов наук.

$$\lambda_1 = 1.29, \lambda_2 = 0.0002, \lambda_3 = 0.93,$$

$$\lambda_4 = 6.9, \lambda_5 = 5.8, k = 100,$$

и

$$M > \frac{0,116}{1,419}.$$

Выберем какое-нибудь $0 < N_0 < M - \frac{0,116}{1,419}$. Тогда существует $\eta > 0$ такое, что при любом $0 \leq N \leq N_0$ система (1)-(2) допускает по крайней мере одно 12-периодическое решение x_N с начальным условием, удовлетворяющим соотношениям

$$\eta \leq x_{N,1} \leq \frac{1,29}{0,0002}(M + N) + \eta,$$

$$\eta \leq x_{N,2} \leq$$

$$\leq \max \left\{ 1, \left(100 + \frac{580}{1,1} \right) \cdot \left(1,29(M + N) - \frac{0,116}{1,1} \right) \right\} \cdot$$

$$\cdot e^{\frac{534060(M+N)}{100+6450(M+N)} + 69,6} + \eta.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что условие (4) в случае указанных значениях параметров принимает вид

$$M - N_0 > \frac{0,116}{1,419}.$$

Литература

[1] A. Garulli, C. Mocenni, A. Tesi, A. Vicino. Integrating identification and qualitative analysis for the dynamic model of a lagoon, Int. J. Bif. Chaos, Vol.13, No.2 (2003) 357-374.

[2] М. А. Красносельский, Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, 1968.