文章编号: 1000-6788(2010)09-1650-08 中图分类号: N941 文献标志码: A

线性时变参数离散灰色预测模型

张 可, 刘思峰

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

摘 要 分析离散灰色模型模拟值增长率恒定的原因, 通过引入线性时间项, 构造时变参数离散灰色模型 (称 TDGM(1,1) 模型). 进而研究该模型性质, 结果表明: TDGM(1,1) 模型具有白指数规律重合性、线性规律重合性、伸缩变换一致性, 克服了原离散模型模拟值为等比序列的问题. 应用最优化方法研究 TDGM(1,1) 模型迭代基值问题, 建立优化模型并提出求解算法. 最后说明应用 TDGM(1,1) 模型进行建模和预测的步骤, 通过实例比较该模型与原离散灰色模型及非其次离散模型的预测能力, 结果显示 TDGM(1,1) 具有更高的模拟和预测精度.

关键词 灰色系统; 离散模型; 时变参数; 预测

Linear time-varying parameters discrete grey forecasting model

ZHANG Ke, LIU Si-feng

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract This paper analyzed the reason for invariable growth rates of the DGM(1,1) model's simulated values. In order to overcome that shortcoming, a new time-varying parameters discrete grey model (which is called TDGM(1,1)) was constructed by introducing linear time-varying terms. Then, this paper researched properties of the new model, and reached the conclusion that TDGM(1,1) not only possessed white exponential law coincidence, linear law coincidence and consistency of stretching transformation, but also solved the problem that simulated values of original DGM(1,1) were geometric sequences. Furthermore, the paper applied optimization method to optimizing the iterative starting value of the new model, and introduced the steps of using TDGM(1,1) to predict. Finally, the new model was compared with another two discrete grey models through an instance. The results prove the new model greatly improves the simulation and prediction precision.

Keywords grey system; discrete model; time-varying parameter; forecast

1 引言

自邓聚龙教授提出灰色系统理论以来, 灰色预测模型已广泛应用于工业、农业、水利、地质、科教、军事等众多领域 [1]. 在灰色系统理论发展过程中, 很多学者通过理论分析和实践检验对其基础模型 —— GM(1,1) 模型进行了深入研究, 提出不少有益的改进方法, 主要包括: 残差修正法 [2−3], 优化灰导数法 [4−5], 中心逼近法 [6], 背景值构造法 [7], 时间响应函数优化法 [8−9] 等. 这些方法虽然能够在一定程度上降低模拟误差, 提高预测精度, 但是无法避免 GM(1,1) 模型利用离散方程估计参数, 而采用连续时间响应式进行预测造成的跳跃性误差. 谢乃明等提出的离散灰色模型将参数估计和预测模型统一为离散形式, 有效地避免了离散到连续模型转换带来的误差, 从而使模型具有白指数规律重合性, 伸缩变换一致性, 适合高增长序列的模拟和预测等特点 [10]. 但是离散灰色模型并非最优灰色系统模型, 姚天祥通过理论分析得出离散灰色模型模拟值增长率恒

收稿日期: 2009-01-04
资助项目: 国家自然科学基金 (70473037, 70701017)
作者简介: 张可 (1983–), 男, 河南信阳人, 博士研究生, 研究方向: 灰色系统理论; 刘思峰 (1955–), 男, 河南平舆人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 数量经济学, 灰色系统理论.

定的结论, 并提出拓展的离散灰色模型 [11]. 谢乃明构造非齐次离散灰色模型并对模型迭代基值进行优化 [12]. 目前离散灰色模型的改进方法主要集中在模型非其次参数优化方面, 虽然模拟精度有一定提高, 但预测能力并未得到较大改善.

本文从离散灰色模型参数特性角度, 分析其模拟值增长率恒定的原因. 通过引入线性时间项, 构造时变参数离散灰色模型. 进而研究模型性质, 证明该模型具有白指数规律重合性、线性规律重合性、伸缩变换一致性等结论. 然后对模型迭代基值进行优化, 并说明应用该模型进行建模和预测的步骤. 最后通过实例比较该模型与原离散模型和非齐次离散模型的预测精度, 结果显示, 本文模型克服了原离散灰色模型模拟值增长率恒定的问题, 并且具有更高的模拟和预测精度.

2 线性时变参数离散灰色模型

设系统某行为特征序列的观测值为:

$$X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots x^{(0)}(n)\},$$

其一次累加序列

$$X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots x^{(1)}(n)\},$$

其中, $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),\ k=1,2,\cdots,n$.

定义 1[10] 称

$$x^{(1)}(k+1)=\beta_1x^{(1)}(k)+\beta_2$$

为离散灰色模型 (Discrete grey model, DGM), 或称为 GM(1,1) 模型的离散形式.

定理 1[11] 设 DGM(1,1) 模型的模拟和预测值序列 $\hat{X}=\{\hat{x}(1),\hat{x}(2),\cdots,\hat{x}(n)\}$, $\hat{u}(k)$ 是 $\hat{X}$ 的增长率, 令 $\hat{u}(k)=\frac{\hat{x}(k+1)-\hat{x}(k)}{\hat{x}(k)}$, 其中 $k=2,3,\cdots,n$, 则 $\hat{u}(k)=\beta_1-1$.

定理 1 说明 DGM(1,1) 模型的模拟和预测值始终保持同一增长率, 因此对近似指数规律的序列具有较好的模拟和预测效果. 但实际应用中序列往往不具有指数规律, 因此易造成较大误差. 同时不难发现造成这种误差的原因是模型中的参数 β 为恒定值, 即 DGM(1,1) 为线性时不变系统模型. 而经济社会和工程技术领域中, 系统行为序列自身以及不同行为序列间的相互作用表现为复杂非线性关系, 且系统随时间推移其参数和结构也不断发生演化, 因此难以应用恒定参数模型进行模拟和预测. 本文考虑用线性时间项代替原离散灰色模型中的恒定参数, 构造线性时变参数的 DGM(1,1) 模型.

定义 2 称

$$x^{(1)}(k+1)=(\beta_1+\beta_2k)x^{(1)}(k)+\beta_3k+\beta_4 \tag{1}$$

为线性时变参数离散灰色模型 (Linear time-varying parameters discrete grey model, TDGM), 其中 $x^{(1)}(k)$ 为原始序列的一次累加生成序列.

定理 2 设非负序列

$$X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$$

的一次累加序列为

$$X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\},$$

则 TDGM(1,1) 模型 $x^{(1)}(k+1)=(\beta_1+\beta_2k)x^{(1)}(k)+\beta_3k+\beta_4$ 的最小二乘参数估计值分别为:

$$\hat{\beta}_1=\frac{B_1}{A},\quad \hat{\beta}_2=\frac{B_2}{A},\quad \hat{\beta}_3=\frac{B_3}{A},\quad \hat{\beta}_4=\frac{B_4}{A},$$

其中,

$$A=\begin{vmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k & n-1\end{vmatrix},$$

$$B_1=\begin{vmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k & n-1\end{vmatrix},$$

$$B_2=\begin{vmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k & n-1\end{vmatrix},$$

$$B_3=\begin{vmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1) & n-1\end{vmatrix},$$

$$B_4=\begin{vmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k)\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k)\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1)\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1)\end{vmatrix}.$$

证明 设序列 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$, $(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3,\hat{\beta}_4)$ 为 TDGM(1,1) 模型的参数估计值, 以模拟值 $\hat{x}^{(1)}(k+1)=(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2k)x^{(1)}(k)+\hat{\beta}_3k+\hat{\beta}_4$ 代替 $x^{(1)}(k+1)$, $k=1,2,\cdots,n-1$, 得到误差值平方和 $S=\sum_{k=1}^{n-1}[x^{(1)}(k+1)-\hat{\beta}_1x^{(1)}(k)-\hat{\beta}_2kx^{(1)}(k)-\hat{\beta}_3k-\hat{\beta}_4]^2$. 根据最小二乘法, 使 S 最小的 $(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3,\hat{\beta}_4)$ 应该满足:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s}{\partial\hat{\beta}_1}=-2\sum\limits_{k=1}^{n-1}[x^{(1)}(k+1)-\hat{\beta}_1x^{(1)}(k)-\hat{\beta}_2kx^{(1)}(k)-\hat{\beta}_3k-\hat{\beta}_4]x^{(1)}(k)=0,\\ \dfrac{\partial s}{\partial\hat{\beta}_2}=-2\sum\limits_{k=1}^{n-1}[x^{(1)}(k+1)-\hat{\beta}_1x^{(1)}(k)-\hat{\beta}_2kx^{(1)}(k)-\hat{\beta}_3k-\hat{\beta}_4]kx^{(1)}(k)=0,\\ \dfrac{\partial s}{\partial\hat{\beta}_3}=-2\sum\limits_{k=1}^{n-1}[x^{(1)}(k+1)-\hat{\beta}_1x^{(1)}(k)-\hat{\beta}_2kx^{(1)}(k)-\hat{\beta}_3k-\hat{\beta}_4]k=0,\\ \dfrac{\partial s}{\partial\hat{\beta}_4}=-2\sum\limits_{k=1}^{n-1}[x^{(1)}(k+1)-\hat{\beta}_1x^{(1)}(k)-\hat{\beta}_2kx^{(1)}(k)-\hat{\beta}_3k-\hat{\beta}_4]=0.\end{cases}$$

所以得到:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)^2+\hat{\beta}_2\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2+\hat{\beta}_3\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)+\hat{\beta}_4\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k), \\ \hat{\beta}_1\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2+\hat{\beta}_2\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2+\hat{\beta}_3\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)+\hat{\beta}_4\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k), \\ \hat{\beta}_1\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)+\hat{\beta}_2\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)+\hat{\beta}_3\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2+\hat{\beta}_4\sum\limits_{k=1}^{n-1}k=\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1), \\ \hat{\beta}_1\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)+\hat{\beta}_2\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)+\hat{\beta}_3\sum\limits_{k=1}^{n-1}k+\hat{\beta}_4(n-1)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1). \end{cases}$$

根据克莱姆法则解上述非齐次线性方程组, 即得到定理 2 所示参数估计值.

定义 3 序列 $X^{(0)}$、$X^{(1)}$ 以及 TGDM(1,1) 模型参数估计值如定理 2 所述, 取 $\hat{x}^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$, 则序列 $X^{(0)}$ 的一次累加模拟值递推公式为:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2k)\hat{x}^{(1)}(k)+\hat{\beta}_3k+\hat{\beta}_4,\quad k=1,2,\cdots,n-1 \tag{2}$$

还原的模拟值:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\alpha^{(1)}\hat{x}^{(1)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k),\quad k=1,2,\cdots,n-1 \tag{3}$$

3 模型性质

定理 3 设 $X^{(0)}$ 为非负序列, 其中 $x^{(0)}(k)=\mathrm{e}^{ak}, k=1,2,\cdots,n$, $\hat{x}^{(0)}(k)$ 为其 TDGM(1,1) 模型的模拟值, 则 $\hat{x}^{(0)}(k)=\mathrm{e}^{ak}=1,2,\cdots,n$.

证明 设 A,B_1,B_2,B_3,B_4 为 TDGM(1,1) 模型参数估计值的中间参数. 因为 $x^{(0)}(k)=\mathrm{e}^{ak}, k=1,2,\cdots,n$, 则 $x^{(1)}(k+1)=\mathrm{e}^{a}x^{(1)}(k)+\mathrm{e}^{a}$, 根据定理 2 得到:

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)x^{(1)}(k+1) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k) \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)x^{(1)}(k+1) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k & n-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)(\mathrm{e}^{a}x^{(1)}(k)+\mathrm{e}^{a}) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k) \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)(\mathrm{e}^{a}x^{(1)}(k)+\mathrm{e}^{a}) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}k(\mathrm{e}^{a}x^{(1)}(k)+\mathrm{e}^{a}) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}(\mathrm{e}^{a}x^{(1)}(k)+\mathrm{e}^{a}) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k & n-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{a}\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k) \\ \mathrm{e}^{a}\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) \\ \mathrm{e}^{a}\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k \\ \mathrm{e}^{a}\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k & n-1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
+\begin{vmatrix}
e^a\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)\\
e^a\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)\\
e^a\sum\limits_{k=1}^{n-1}k & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k\\
e^a(n-1) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k & n-1
\end{vmatrix}
$$

$$
=e^aA.
$$

同理可以得到 $B_2=0,B_3=0,B_4=e^aA$, 因此 $\hat{\beta}_1=e^a,\hat{\beta}_2=0,\hat{\beta}_3=0,\hat{\beta}_4=e^a$. 以原始序列 $X^{(0)}$ 建立的 TDGM(1,1) 预测模型为 $\hat{x}^{(1)}(k+1)=e^a\hat{x}^{(1)}(k)+e^a,k=1,2,\cdots,n-1$. 因此 $\hat{x}^{(1)}(k+1)=e^a+e^{2a}+\cdots+e^{a(k+1)}$. 根据定义 3, $\hat{x}^{(0)}(k+1)=e^{a(k+1)}$, $k=1,2,\cdots,n-1$.

定理 3 说明 TDGM(1,1) 模型具有白指数规律重合性, 因此对于高增长序列有较好的模拟和预测效果. 同时从证明过程可以看出: 当原始序列增长率恒定时, 参数 β_2,β_3 为零, 模型退化为普通 DGM(1,1) 模型. 因此可以将 DGM(1,1) 模型作为 TDGM(1,1) 模型的特殊形式, 当原始数据增长率近似恒定时两者可以相互替换.

定理 4 设 $X^{(0)}$ 为非负序列, 其中 $x^{(0)}(k)=a+kb,\ k=1,2,\cdots,n,\ \hat{x}^{(0)}(k)$ 为 TDGM(1,1) 模型的模拟值, 则 $\hat{x}^{(0)}(k)=a+kb,\ k=1,2,\cdots,n.$

证明 设 A,B_1,B_2,B_3,B_4 为 TDGM(1,1) 参数估计值的中间参数. 因为 $x^{(0)}(k)=a+kb,k=1,2,\cdots,n$, 则 $x^{(1)}(k+1)=x^{(1)}(k)+a+kb+b$, 所以

$$
B_1=\begin{vmatrix}
\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)(x^{(1)}(k)+a+kb+b) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)\\
\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)(x^{(1)}(k)+a+kb+b) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)\\
\sum\limits_{k=1}^{n-1}k(x^{(1)}(k)+a+kb+b) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k\\
\sum\limits_{k=1}^{n-1}(x^{(1)}(k)+a+kb+b) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k & n-1
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)\\
\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)\\
\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k\\
\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k & n-1
\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}
(a+b)\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)\\
(a+b)\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)\\
(a+b)\sum\limits_{k=1}^{n-1}k & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k\\
(a+b)(n-1) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k & n-1
\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}
b\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)\\
b\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)\\
b\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2 & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k\\
b\sum\limits_{k=1}^{n-1}k & \sum\limits_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=1}^{n-1}k & n-1
\end{vmatrix}
$$

$$
=A.
$$

同理可以得到 $B_2=0, B_3=bA, B_4=(a+b)A$, 因此 $\hat{x}^{(1)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k)+(k+1)b+a, k=1,2,\cdots,n-1$. 根据定义 3 得到 $\hat{x}^{(0)}(k+1)=a+(k+1)b, k=1,2,\cdots,n-1$.

定理 4 反映 TDGM(1,1) 模型能够完全模拟线性序列, 而 DGM(1,1) 模型不具有该性质. 从增长率角度分析, 线性序列的增长率 $\hat{u}(k)=b/(a+kb)$ 呈单调变化趋势, 因此定理 4 也反映出 TDGM(1,1) 模型对增长率单调变化的序列具有较好的模拟能力, 克服了 DGM(1,1) 模型模拟值为等比序列的问题.

定理 5 设非负序列 $Y^{(0)}$ 为 $X^{(0)}$ 的数乘变换序列, 其中 $y^{(0)}(k)=\rho x^{(0)}(k)$($\rho$ 为非负常数). 对 $X^{(0)}$ 和 $Y^{(0)}$ 分别建立 TDGM(1,1) 模型, 记 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ 为原始序列 $X^{(0)}$ 的模型参数估计值,$(\bar{\beta}_1,\bar{\beta}_2,\bar{\beta}_3,\bar{\beta}_4)$ 为变换序列 $Y^{(0)}$ 的模型参数估计值, 则:

$$\beta_1=\bar{\beta}_1, \quad \beta_2=\bar{\beta}_2, \quad \beta_3=\rho\bar{\beta}_3, \quad \beta_4=\rho\bar{\beta}_4.$$

证明 根据定理 2, 结论显然成立.

定理 6 设非负序列 $Y^{(0)}$ 为 $X^{(0)}$ 的数乘变换序列, 其中 $y^{(0)}(k)=\rho x^{(0)}(k)$ (ρ 为非负常数). 记 $\hat{x}^{(0)}(k),\hat{y}^{(0)}(k)$ 分别为 $X^{(0)}$ 和 $Y^{(0)}$ 的 TDGM(1,1) 模型模拟值 (预测值). 则:

$$\hat{y}^{(1)}(k)=\rho\hat{x}^{(1)}(k),$$
$$\hat{y}^{(0)}(k)=\rho\hat{x}^{(0)}(k).$$

证明 根据定理 5, 结论显然成立.

定理 5 和 6 描述了数乘变换对 TDGM(1,1) 模型参数和模拟值的影响, 说明序列经过数乘变换后的 TDGM(1,1) 模型模拟值等于原序列的模拟值也进行相应的数乘变换. 因此 TDGM(1,1) 模型具有伸缩变换一致性, 对原始序列进行数乘变换不影响模型模拟和预测值的相对误差. 在原始序列数量级较大时可以预先进行必要的处理, 避免模型病态问题.

4 模型迭代基值优化

为便于分析, 上文讨论中 TDGM(1,1) 模型均选取迭代基值 $\hat{x}^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$, 即假设最小二乘拟合的模型在平面坐标系中经过 $(1,\ x^{(0)}(1))$ 点. 当建模数据 $X^{(0)}$ 为指数线性等特殊序列时, 该假设成立; 但根据最小二乘原理, 拟合曲线并非一定经过 $(1,\ x^{(0)}(1))$ 点, 因此需要对模型迭代基值进行优化, 避免误差累积和传递. 考虑在定义 3 模型基础上加入基值修正项, 得到 (4) 式所示修正模型.

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1)=(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2 k)\hat{x}^{(1)}(k)+\hat{\beta}_3 k+\hat{\beta}_4, \quad k=1,2,\cdots,n-1 \\ \hat{x}^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)+\varepsilon \end{cases} \tag{4}$$

式 (4) 中参数 $(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3,\hat{\beta}_4)$ 由定理 2 得到. 通过迭代可得 (5) 式.

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)+\varepsilon \\ \hat{x}^{(1)}(2)=(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)\hat{x}^{(1)}(1)+\hat{\beta}_3+\hat{\beta}_4 \\ \qquad\vdots \\ \hat{x}^{(1)}(n)=(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2(n-1))\hat{x}^{(1)}(n-1)+\hat{\beta}_3(n-1)+\hat{\beta}_4 \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\hat{x}^{(1)}(k)(k=1,2,\cdots,n)$ 为关于 ε 的一次多项式, 为使模拟误差最小, 建立 (6) 式所示无约束优化模型.

$$\min\sum_{k=1}^{n}[x^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k)]^2 \tag{6}$$

令 $Q=\sum_{k=1}^{n}[x^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k)]^2$, 则 Q 为关于 ε 的二次多项式, 且 ε^2 项系数为正实数. 因此令 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\varepsilon}=0$, 可以求得 ε. 由于 $\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varepsilon^2}>0$, 所以 ε 为 Q 的极小值点.

综上所述, TDGM(1,1) 模型建模优化和预测过程可分为如下步骤:

Step 1 根据定理 2 得到模型参数值 $(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3,\hat{\beta}_4)$;

Step 2 通过 (5) 式计算含有 ε 的 $\hat{x}^{(1)}(k), k=2,3,\cdots,n$ 和 $Q=\sum_{k=1}^{n}[x^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k)]^2$, 由于迭代过程比较繁琐, 在数据较多时可以通过 Matlab 多项式算法求解;

Step 3 求解 (6) 式优化问题, 得到迭代基值修正项 ε;

Step 4 用修正的迭代基值, 根据 (3)(4) 式进行模拟和预测;

Step 5 计算模拟误差, 进行模型精度检验.

5 实例分析

本文以我国城镇居民家庭人均可支配收入的预测为例, 比较本文模型 (TDGM) 离散灰色模型 (DGM) 以及非其次离散模型 (NDGM) 的模拟与预测精度. 原始数据见表 1, 数据来源《中国统计年鉴》.

表 1 1997–2006 年我国城镇居民家庭人均可支配收入 (元)

年份	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
收入	5160.3	5425.1	5854.0	6280.0	6859.6	7702.8	8472.2	9421.6	10493.0	11760.0

取 1997–2003 年数据为原始序列, 分别建立 DGMNDGM 和 TDGM 模型, 如式 (7)–(9) 所示, 并通过式 (10) 计算还原模拟值. 三种模型 1997–2003 年模拟值与 2004–2006 年预测值见表 2. 模拟值平均相对误差以及三步预测误差见表 3.

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = 1.0959\hat{x}^{(1)}(k) + 4819.5 \\ \hat{x}^{(1)}(1) = 5160.3 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = 1.2151\hat{x}^{(1)}(k) - 759.18k + 5077.5 \\ \hat{x}^{(1)}(1) = 5160.7 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = 0.2924\hat{x}^{(1)}(k) + 0.0345k\hat{x}^{(1)}(k) + 3644.4k + 5277.9 \\ \hat{x}^{(1)}(1) = 5164.1 \end{cases} \tag{9}$$

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), \quad k = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{10}$$

通过表 2 可以观察到原离散灰色模型的模拟和预测值增长率始终为 9.5%, 而 TDGM(1,1) 和 NDGM(1,1) 模型不存在该问题. 根据表 3 中模拟误差比较不难发现, 本文模型的模拟值平均相对误差为 0.52%, 显著低于 DGM(1,1) 模型, 略低于 NDGM(1,1) 模型. 虽然 NDGM(1,1) 模型通过优化 DGM(1,1) 模型的非齐次项和迭代基值降低了模拟误差, 但是预测精度反而有所下降. 从预测误差角度分析, TDGM(1,1) 模型的预测误差始终低于 DGM(1,1) 和 NDGM(1,1), 并且在三步范围内均低于 1.5%, 具有良好的中长期预测效果, 而 DGM(1,1) 和 NDGM(1,1) 的第三步误差达到 6%, 预测能力略显不足. 根据以上实例, 本文模型在模拟和预测精度方面较原离散模型均有大幅提高.

表 2 三种模型模拟预测值与残差比较 (元)

年份	实际值	DGM 模拟预测值	NDGM 模拟预测值	TDGM 模拟预测值	DGM 残差	NDGM 残差	TDGM 残差
1997	5160.3	5160.3	5160.7	5164.1	0.0	–0.4	–3.8
1998	5425.1	5314.4	5427.9	5446.3	110.7	–2.8	–21.2
1999	5854.0	5824.1	5835.7	5790.6	29.9	18.3	63.4
2000	6280.0	6382.5	6331.2	6302.4	–102.5	–51.2	–22.4
2001	6859.6	6994.5	6933.2	6922.2	–134.9	–73.6	–62.6
2002	7702.8	7665.2	7664.7	7644.6	37.6	38.1	58.2
2003	8472.2	8400.3	8553.4	8482.7	71.9	–81.2	–10.5
2004	9421.6	9205.8	9633.2	9457.2	215.8	–211.6	–35.6
2005	10493.0	10089.0	10945.5	10596.3	404.0	–452.5	–103.3
2006	11760.0	11056.3	12539.1	11933.7	703.7	–779.1	–173.7

表 3 三种模型的模拟与预测误差 (%)

模型	平均相对误差	一步预测误差	两步预测误差	三步预测误差
DGM	1.96	2.29	3.85	5.99
NDGM	0.53	2.25	4.32	6.61
TDGM	0.52	0.37	0.98	1.47

6 结论

1) 本文针对离散灰色模型参数恒定的缺陷, 通过引入线性时间项, 构造时变参数离散灰色模型, 克服了原离散模型模拟值增长率恒定的问题. 同时 TDGM(1,1) 模型是原 DGM(1,1) 模型的一般形式, 在建模数据近似符合指数规律时, 两者可以相互替换.

2) 通过 TDGM(1,1) 模型研究, 给出模型参数估计值的计算公式, 并证明该模型具有白指数规律重合性线性规律重合性以及伸缩变换一致性, 对增长率单调变化的序列具有较好的模拟和预测能力.

3) 应用最优化方法研究 TDGM(1,1) 模型迭代基值问题, 建立了优化模型并提出求解算法. 说明应用该模型建模优化和预测的步骤, 并通过实例对模型有效性进行验证, 结果表明本文模型较现有离散灰色模型具有更高的模拟和预测精度.

参考文献

[1] Deng J L. Introduction to grey system theory[J]. The Journal of Grey System (UK), 1989, 1(1): 1–24.

[2] Deng J L. Grey Prediction and Grey Decision[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science & Technology, 2002: 43–51.

[3] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国, 等. 灰色系统理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1999: 26–29.
Liu S F, Guo T B, Dang Y G, et al. Grey System Theory and Its Application[M]. Beijing: Science Press, 1999: 26–29.

[4] 穆勇. 优化灰导数白化值的无偏灰色 GM(1,1) 模型 [J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(3): 13–16.
Mu Y. An unbiased GM(1,1) model with optimum grey derivative whitening values[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2003, 33(3): 13–16.

[5] 王义闹, 刘开第. 优化灰导数白化值的 GM(1,1) 建模法 [J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5): 124–128.
Wang Y N, Liu K D. GM(1,1) modeling method of optimum the whiting values of grey derivative[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2001, 21(5): 124–128.

[6] 宋中民, 同小军, 肖新平. 中心逼近式灰色 GM(1,1) 模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5): 110–l13.
Song Z M, Tong X J, Xiao X P. Center approach grey GM(1,1) model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2001, 21(5): 110–113.

[7] 谭冠军. GM(1,1) 模型的背景值构造方法和应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 99–103.
Tan G J. The structure method and application of background value in grey system GM(1,1) model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2000, 20(4): 99–103.

[8] 刘斌, 刘思峰, 翟振杰, 等. GM(1,1) 模型时间响应函数的最优化 [J]. 中国管理科学, 2003, l1(4): 54–57.
Liu B, Liu S F, Zhai Z J, et al. Optimum time response sequence for GM(1,1)[J]. Chinese Journal of Management Science, 2003, 11(4): 54–57.

[9] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型 GM(1,1) 优化 [J]. 中国工程科学, 2003, 5(8): 50–53.
Luo D, Liu S F, Dang Y G. Optimization of grey model GM(1,1)[J]. Chinese Engineering Science, 2003, 5(8): 50–53.

[10] 谢乃明, 刘思峰. 离散 GM(1,1) 模型与灰色预测模型建模机理 [J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93–98.
Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2005, 25(1): 93–98.

[11] 姚天祥, 刘思峰. 改进的离散灰色预测模型 [J]. 系统工程, 2007, 25(6): 103–106.
Yao T X, Liu S F. Improvement of a forecasting discrete GM(1,1)[J]. Systems Engineering, 2007, 25(6): 103–106.

[12] 谢乃明, 刘思峰. 离散灰色模型的拓展极其最优化求解 [J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(6): 108–112.
Xie N M, Liu S F. Research on extension of discrete grey model and its optimize formula[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2006, 26(6): 108–112.