文章编号: 1000-6788(2010)09-1630-06 中图分类号: C934 文献标志码: A

不确定性下非合作博弈简单 Berge 均衡的存在性

张会娟 [1,2], 张 强 [1]

(1. 北京理工大学 管理与经济学院, 北京 100081; 2. 中国民航工程咨询公司, 北京 100854)

摘 要 在已知不确定参数变化范围的假设下, 研究了非合作博弈简单 Berge 均衡的存在性问题. 基于 Zhukovskii 提出的简单 Berge 均衡及具有不确定参数的非合作博弈 NS 均衡概念, 定义了具有不确定参数的帕雷托简单 Berge 均衡 (PSBE) 及弱帕雷托简单 Berge 均衡 (WPSBE), 并借助 Ky Fan 不等式证明其存在性, 最后用算例验证其可行性.

关键词 非合作博弈; 简单 Berge 均衡; Ky Fan 不等式; 不确定性

Existence of simple Berge equilibrium for non-cooperative games under uncertainty

ZHANG Hui-juan[1,2], ZHANG Qiang[1]

(1. School of Management and Economics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;
2. Civil Aviation Engineering Consulting Company of China, Beijing 100854, China)

Abstract Under the assumption that the domain of the undetermined parameters can vary is known, the existence of simple Berge equilibrium for non-cooperative games is investigated. Based on the concept of simple Berge equilibrium and NS-equilibrium introduced by Zhukovskii for non-cooperative games, the notions of Pareto simple Berge equilibrium (PSBE) and Weak Pareto simple Berge equilibrium (WPSBE) are defined, and theorems of existence of the equilibrium are also provided by means of the Ky Fan inequality. Finally, a numeric example is raised to illustrate the proposed method's feasibility.

Keywords non-cooperative games; simple Berge equilibrium; Ky Fan inequality; uncertainty

1 引言

自从著名经济学家 Nash[1] 证明 Nash 均衡的存在性以来, 针对其缺陷, 许多学者相继提出一些不同的均衡概念. 1957 年, Berge[2] 给出了划分 K 关于联盟 S 的均衡概念, 随后 Zhukovskii[3] 定义了 Berge 均衡的一种特殊形式, 即简单 Berge 均衡. 该均衡的意义在于可以解决 Nash 均衡的多重性问题, 即如何从多个 Nash 均衡中进行选择的问题. 与 Nash 均衡相比, 简单 Berge 均衡既可求解非合作博弈也可求解联盟博弈, 而且在该均衡点, 不需任何具约束力的协议局中人也有合作的可能. 因此, 该均衡可以解决非合作博弈中的一些特殊问题, 例如囚徒困境, 全球变暖等问题. 由于 Berge 均衡的存在性比 Nash 均衡要复杂得多, 因此许多学者对 Berge 均衡的存在性进行了研究. 文献 [4–5] 纠正了文献 [6–9] 中存在的一些问题, 同时给出简单 Berge 均衡存在的充要条件以及 Abalo 和 Kostreva[7−9] 意义下 Berge 均衡和 Berge-Nash 均衡存在的充分条件.

以上研究的均是确定环境下非合作博弈均衡解的存在性问题, 即经典非合作博弈问题. 然而, 在实际问题中, 由于决策环境的不确定性, 往往会涉及一些不确定参数, 而局中人仅能预知这些参数的变化范围. 对于该类不确定博弈问题, 经典非合作博弈的局限性显而易见. 因此, 在局中人已知不确定参数变化范围的前提下, Zhukovskii[3] 结合经典 Nash 均衡及多目标问题中帕雷托有效解的概念, 介绍了不确定性下非合作博弈

收稿日期: 2009-05-31
资助项目: 国家自然科学基金 (70471063, 70771010); 985 工程二期项目 (107008200400024)
作者简介: 张会娟 (1982–), 女, 博士研究生, 研究方向: 模糊决策与对策; 张强 (1955–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向: 模糊决策与对策.

的 NS- 均衡. 在此基础上, Larbani 和 Lebbah[10] 给出不确定环境下非合作博弈的 ZS- 均衡概念, 并基于不动点定理证明了其存在性. 但是, 以上考虑的均为不确定性下 Nash 均衡的存在性问题, 对于其他非合作博弈均衡点的存在性问题, 文献中尚未涉及到. 鉴于此, 本文以经典简单 Berge 均衡的研究理论为基础, 在已知不确定参数变化范围前提下, 定义了帕雷托简单 Berge 均衡 (PSBE) 及弱帕雷托简单 Berge 均衡 (WPSBE), 同时利用 Ky Fan[11] 不等式证明其存在性.

2 预备知识

设正规型 n 人非合作博弈: $G=(I,X,f(x))$, 其中 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 表示局中人构成的集合, $n\geq 1$, $X_i\subseteq\mathbb{R}^{n_i}$, $n_i\geq 1$ 为局中人 i 的策略集, $x\in X=\prod_{i=1}^n X_i$ 为非合作博弈的局势, $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$, $f_i: X\to\mathbb{R}$ 是第 i 个人的支付函数. 本文假设局中人均是最大化局中人.

为讨论问题的方便, 给出下面的记号:

$\forall K\subset I$, 记 $I-K$ 为 $-K$, 当 $K=\{i\}$ 时, 记 $I-\{i\}$ 为 $-i$. 记 $\widehat{X}=\prod\limits_{i\in I}X_{-i}$, 其中 $X_{-i}=\prod\limits_{j\in -i}X_j$ 表示联盟 $-i$ 中局中人的策略集. 设 x 和 x' 分别是局中人 i 的两个策略, 记 $x||x'_{-i}=(x'_1,\cdots,x'_{i-1},x_i,x'_{i+1},\cdots,x'_n)$, $x'_{-i}\in X_{-i}$, 表示联盟 $-i$ 中的局中人 j 把局势 x 中的策略 x_j 换成 x'_j, 而第 i 个局中人的策略不变得到的新局势. 显然, $x||x_{-i}=x$.

Abalo 和 Kostreva 首先给出 Berge 均衡的定义.

定义 1[6] 设 $R=\{R_t\}_{t\in M}$ 为 I 的一个划分, $S=\{S_t\}_{t\in M}$, 其中 $S_t\subseteq I$, $\bar{x}\in X$ 称为 G 的 Berge 均衡, 如果 $f_{r_m}(\bar{x})\geq f_{r_m}(\bar{x}||x_{S_m})$, $\forall m\in M$, $\forall r_m\in R_m$, $\forall x_{S_m}\in X_{S_m}$.

特别地, 若 $R_i=\{i\}$, $\forall i\in I$, 则 $R=\{R_i\}_{i\in I}$ 是 I 的一个划分, 令 $S_i=-i$, $\forall i\in I$, 则定义 1 即为 Zhukovskii 定义的简单 Berge 均衡.

定义 2[3] $\bar{x}\in X$ 称为 G 的简单 Berge 均衡, 如果 $f_i(\bar{x}||x_{-i})\leq f_i(\bar{x})$, $\forall i\in I$, $\forall x_{-i}\in X_{-i}$.

该均衡的意义是说当联盟 $I-\{i\}$ 中的任何局中人单独偏离均衡点 $\bar{x}$, 第 i 个局中人的支付不会多于 $f_i(\bar{x})$, 也就是说在 $\bar{x}_i$, 每个局中人 i 都极大化其他局中人的支付. 该均衡反应了人类社会中的互惠行为, 可以解决一些全球性难题, 例如全球变暖问题.

定义 3[12] $\bar{x}\in X$ 称为 G 的 Nash 均衡, 如果 $f_i(\bar{x}||x_i)\leq f_i(\bar{x})$, $\forall i\in I$, $\forall x_i\in X_{-i}$.

注 1 由定义 2 及定义 3 可以看出简单 Berge 均衡与 Nash 均衡的区别: 前者极大化他人收益, 是利他行为, 因此最终的结果是从非合作走向合作; 而后者极大化个人收益, 是利己行为, 最终的结果只能是非合作.

Larbani 和 Nessah 通过构造以下函数证明了简单 Berge 均衡的存在性.

定义 4[4−5] 设 X_i 为 $\mathbb{R}^{n_i}$ 上的紧集, $f_i: X\to\mathbb{R}$, $\forall i\in I$ 是 X 上的连续函数, 定义函数

$$\varphi: X\times\widehat{X}\to\mathbb{R},\quad \varphi(x,\widehat{y})=\sum_{i=1}^n\left(f_i(x||\widehat{y}_{-i})-f_i(x)\right),$$

其中 $x\in X$, $\widehat{y}=(\widehat{y}_{-1},\widehat{y}_{-2},\cdots,\widehat{y}_{-n})\in\widehat{X}=\prod_{i=1}^n X_{-i}$.

引理 1[4−5] 策略 $\bar{x}\in X$ 是非合作博弈 G 的简单 Berge 均衡当且仅当 $\max\limits_{\widehat{y}\in\widehat{X}}\varphi(\bar{x},\widehat{y})=0$.

命题 1[4−5] 设 $\mu=\min\limits_{x\in X}\max\limits_{\widehat{y}\in\widehat{X}}\varphi(x,\widehat{y})$, 则 G 存在简单 Berge 均衡的充要条件是 $\mu=0$.

3 具有不确定参数的简单 Berge 均衡

下面考虑具有不确定参数的非合作博弈 $G_1=(I,X,Y,f(x,y))$, 其中 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 表示局中人构成的集合, $n\geq 1$, $X_i\subset\mathbb{R}^{n_i}$, $n_i\geq 1$ 为局中人 i 的策略集, $x\in X=\prod_{i=1}^n X_i$ 为非合作博弈的局势, Y 是未知参数集, $Y\subset\mathbb{R}^m$, $m\geq 1$; $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$, $f_i: X\times Y\to\mathbb{R}$ 是第 i 个人的支付函数.

注 2 显然, 当 $Y=\emptyset$ 或 $Y=\{y\}$ 时, G_1 是经典非合作博弈问题, 因此具有不确定参数的非合作博弈是经典博弈问题的推广.

本文记

$$\mathbb{R}^m_+=\{u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)\in\mathbb{R}^m|u_i\geq 0,\ i=1,2,\cdots,m\},$$

$$int\mathbb{R}^m_+=\{u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)\in\mathbb{R}^m|u_i>0,\ i=1,2,\cdots,m\},$$

$$\Delta=\left\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\in\mathbb{R}^m|\lambda_i\geq 0,\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,\ i=1,2,\cdots,m\right\}.$$

下面定义非合作博弈 G_1 的 PSBE 和 WPSBE.

定义 5 策略 $(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y$ 称为 G_1 的帕雷托简单 Berge 均衡 (PSBE), 若满足

1) $\forall i\in I,\forall x_{-i}\in X_{-i},f_i(\bar{x}||x_{-i},\bar{y})\leq f_i(\bar{x},\bar{y})$;

2) $\forall y\in Y,\ f(\bar{x},\bar{y})-f(\bar{x},y)\notin\mathbb{R}^n_+\backslash\{\mathbf{0}\}$.

注 3 定义 5 的 1) 是说: 当不确定性参数 $y=\bar{y}$ 时, $\bar{x}$ 是经典非合作博弈 $(I,X,f(x,\bar{y}))$ 的简单 Berge 均衡; 条件 2) 意味着 $\bar{y}$ 是多目标问题 $(Y,f(\bar{x},y))$ 的帕雷托有效解, 即所有局中人都是保守和悲观的.

定义 6 策略 $(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y$ 称为 G_1 的弱帕雷托简单 Berge 均衡 (WPSBE), 若满足

1) $\forall i\in I,\ \forall x_{-i}\in X_{-i},f_i(\bar{x}||x_{-i},\bar{y})\leq f_i(\bar{x},\bar{y})$;

2) $\forall y\in Y,\ f(\bar{x},\bar{y})-f(\bar{x},y)\notin int\mathbb{R}^n_+$.

注 4 定义 6 的 2) 是说 $\bar{y}$ 是多目标问题 $(Y,f(\bar{x},y))$ 的弱帕雷托有效解.

显然由定义 5 和定义 6 可知, PSBE 必然是 WPSBE, 反之不成立.

4 不确定性下 PSBE 和 WPSBE 的存在性

这节借助 Ky Fan 不等式来证明 PSBE 和 WPSBE 的存在性. 以下定理是著名的 Ky Fan 不等式[11].

定理 1 设 X 是 Hausdorff 线性拓扑空间 E 中的非空凸紧集, $f:X\times X\to\mathbb{R}$ 满足

1) $\forall y\in X,x\to f(x,y)$ 在 X 上是下半连续的;

2) $\forall x\in X,y\to f(x,y)$ 在 X 上是拟凹的;

3) $\forall x\in X,f(x,x)\leq 0$.

则 $\exists\bar{x}\in X$, 使 $\forall y\in X$, 有 $f(\bar{x},y)\leq 0$.

假设 1 设集合 $X_i,i\in I$ 和 Y 分别是 $\mathbb{R}^{n_i}$ 及 $\mathbb{R}^m$ 上的非空凸紧集; $(x,y)\to f_i(x,y),i\in I$ 是 $X\times Y$ 上的连续函数.

如不特别说明, 以下讨论都建立在假设 1 上.

为证明简单 Berge 均衡的存在性, 构造以下函数.

定义 7 函数 $\varphi_\lambda:Z\times\widehat{X}\times Y\to\mathbb{R}$,

$$\varphi_\lambda(z,\widehat{t},y')=\sum_{i\in I}(f_i(x||t_{-i},y)-f_i(x,y))+\sum_{i\in I}\lambda_i(f_i(x,y)-f_i(x,y')),$$

其中 $z=(x,y)\in Z=X\times Y,\widehat{t}=(t_{-1},t_{-2},\cdots,t_{-n})\in\widehat{X},\ y'\in Y,\ \lambda\in\Delta$.

注 5 $\forall z=(x,y)\in Z$, 若取 $\widehat{t}=(x_{-1},x_{-2},\cdots,x_{-n})$ 且 $y'=y$, 则 $\varphi_\lambda(z,\widehat{t},y')=0$.

因此 $\forall z\in Z,\ \sup\limits_{(\widehat{t},y')\in\widehat{X}\times Y}\varphi_\lambda(z,\widehat{t},y')\geq 0$.

定义 8 函数 $\phi_\lambda:Z\times Z\to\mathbb{R}$,

$$\phi_\lambda(z,z')=\sum_{i\in I}(f_i(x||x'_{-i},y)-f_i(x,y))+\sum_{i\in I}\lambda_i(f_i(x,y)-f_i(x,y')),$$

其中 $z=(x,y)\in Z,z'=(x',y')\in Z,\widehat{x'}=(x'_{-1},x'_{-2},\cdots,x'_{-n})\in\widehat{X}$ 且 $\lambda\in\Delta$.

注 6 显然 $\forall z\in Z,\ \phi_\lambda(z,z)=0$. 定义 8 与定义 7 的区别在于, 当取定 x' 时, $x'_{-i}=x'-\{x'_i\}$, 而定义 7 中 $\widehat{t}=(t_{-1},t_{-2},\cdots,t_{-n})$, 且 $t_{-i}\in X_{-i}$.

引理 2 设非合作博弈 G_1 满足

1) $\forall(x,y)\in Z,\forall i\in I$, 函数 $t_{-i}\to f_i(x||t_{-i},y)$ 是 X_{-i} 上的凹函数;

2) $\forall x\in X,\forall i\in I$, 函数 $y\to f_i(x,y)$ 是 Y 上的凸函数.

则存在 $\bar{z}\in Z$, 使 $\sup\limits_{z\in Z}\phi_\lambda(\bar{z},z)\leq 0$.

证明 由假设 1, 得 $Z=X\times Y$ 是非空凸紧集, 且 $z\to\phi_\lambda(z,z')$ 是 Z 上的连续函数.

下证 $\forall z=(x,y)\in Z,\ z'\to\phi_\lambda(z,z')$ 是 Z 上的凹函数.

$\forall z\in Z$, 设 $z^1,\ z^2\in Z,\ z^1=(x^1,y^1),\ z^2=(x^2,y^2),\ \beta\in(0,1)$. 由 X、Y 的凸性, 有

$$\beta x^1+(1-\beta)x^2\in X,\quad \beta y^1+(1-\beta)y^2\in Y.$$

故

$$\phi_\lambda(z,\beta z^1+(1-\beta)z^2)=\sum_{i\in I}(f_i(x||\beta x_{-i}^1+(1-\beta)x_{-i}^2,y)-f_i(x,y))+\sum_{i\in I}\lambda_i(f_i(x,y)-f_i(x,\beta y^1+(1-\beta)y^2)).$$

由条件 1) 得

$$f_i(x||\beta x_{-i}^1+(1-\beta)x_{-i}^2,y)\geq \beta f_i(x||x_{-i}^1,y)+(1-\beta)f_i(x||x_{-i}^2,y),\quad \forall i\in I \tag{1}$$

由条件 2) 得

$$f_i(x,\beta y^1+(1-\beta)y^2)\leq \beta f_i(x,y^1)+(1-\beta)f_i(x,y^2) \tag{2}$$

综合 (1) 和 (2) 得

$$\phi_\lambda(z,\beta z^1+(1-\beta)z^2)\geq \beta\phi_\lambda(z,z^1)+(1-\beta)\phi_\lambda(z,z^2).$$

故 $\forall z\in Z, z'\to\phi_\lambda(z,z')$ 是凹的.

又由注 6 得, $\forall z\in Z,\phi_\lambda(z,z)=0$.

因此, 由 Ky Fan 不等式, $\exists\bar z\in Z$, 使 $\forall z\in Z,\phi_\lambda(\bar z,z))\leq 0$, 故 $\sup\limits_{z\in Z}\phi_\lambda(\bar z,z)\leq 0$.

引理 3 若 $\exists\lambda\in\Delta$, 且 $\forall i\in I$, $\lambda_i>0$ 满足

$$\forall y\in Y,\quad \sum_{i\in I}\lambda_i(f_i(x,\bar y)-f_i(x,y))\leq 0,$$

则 $\bar y$ 是多目标问题 $(Y,f(x,y))$ 的帕雷托有效解.

证明 假设 $\bar y$ 不是多目标问题 $(Y,f(x,y))$ 的帕雷托有效解, 则 $\exists y'\in Y$, 使 $f(x,\bar y)-f(x,y')\in\mathbb{R}_+^n\backslash\{\mathbf{0}\}$. 即 $\exists i_0\in I$, 使 $\forall i\in I-\{i^0\}$, 有 $f_i(x,\bar y)\geq f_i(x,y')$ 且 $f_{i^0}(x,\bar y)>f_{i^0}(x,y')$.

由 $\forall i\in I$, $\lambda_i>0$, 得 $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i(f_i(x,\bar y)-f_i(x,y'))>0$, 矛盾.

同理可得引理 4.

引理 4 若 $\exists\lambda\in\Delta$, 满足,

$$\forall i\in I,\quad \forall y\in Y,\quad \sum_{i\in I}\lambda_i(f_i(x,\bar y)-f_i(x,y))\leq 0,$$

则 $\bar y$ 是多目标问题 $(Y,f(x,y))$ 的弱帕雷托有效解 .

证明 假设 $\bar y$ 不是多目标问题 $(Y,f(x,y))$ 的弱帕雷托有效解, 则 $\exists y'\in Y$, 使 $f(x,\bar y)-f(x,y')\in int\mathbb{R}_+^n$. 即

$$\forall i\in I, f_i(x,\bar y)>f_i(x,y').$$

由 $\lambda\in\Delta$, 得 $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i(f_i(x,\bar y)-f_i(x,y'))>0$, 矛盾.

定理 2 设非合作博弈 G_1 满足

1) $\forall(x,y)\in Z,\forall i\in I$, 函数 $t_{-i}\to f_i(x||t_{-i},y)$ 是 X_{-i} 上的凹函数;

2) $\forall x\in X,\forall i\in I$, 函数 $y\to f_i(x,y)$ 是 Y 上的凸函数;

3) $\exists\lambda\in\Delta,\forall i\in I$, $\lambda_i>0,\exists u\in X,\exists v\in Y$ 使

$$f_i(x||t_{-i},y)\leq f_i(x||u_{-i},y),\ \forall y\in Y,\ \forall x\in X,\ \forall i\in I,\ \forall t_{-i}\in X_{-i},$$

且 $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i f_i(x,y')\geq\sum\limits_{i\in I}\lambda_i f_i(x,v),\forall y'\in Y$. 则非合作博弈 G_1 存在 PSBE (WPSBE).

证明 由条件 3) 及定义 7 和定义 8 得, $\exists z'=(u,v)\in Z$, 使

$$\forall(\widehat{t},y')\in\widehat{X}\times Y,\quad \varphi_\lambda(z,\widehat{t},y')\leq\phi_\lambda(z,z').$$

又由引理 2 知 $\exists\bar z=(\bar x,\bar y)\in Z$, 使

$$\sup_{(\widehat{t},y')\in\widehat{X}\times Y}\varphi_\lambda(\bar z,\widehat{t},y')\leq\sup_{z\in Z}\phi_\lambda(\bar z,z)\leq 0.$$

故由注 5 得

$$\sup_{(\widehat{t},y')\in\widehat{X}\times Y}\varphi_\lambda(\bar z,\widehat{t},y')=0.$$

因此, $\exists \bar{z}=(\bar{x},\bar{y})\in Z$, $\forall(\widehat{t},y')\in \widehat{X}\times Y$, 使

$$\sum_{i\in I}(f_i(\bar{x}||t_{-i},\bar{y})-f_i(\bar{x},\bar{y}))+\sum_{i\in I}\lambda_i(f_i(\bar{x},\bar{y})-f_i(\bar{x},y'))\le 0 \tag{3}$$

下证 $\bar{z}$ 是非合作博弈 G_1 的 PSBE. $\forall i\in I$, 取 $t_{-i}=\bar{x}_{-i}$,, 则式 (3) 变为

$$\forall y'\in Y,\quad \sum_{i\in I}\lambda_i(f_i(\bar{x},\bar{y})-f_i(\bar{x},y'))\le 0.$$

由引理 3, $\bar{y}$ 满足定义 5 的条件 2).

取 $y'=\bar{y}$, 则 (3) 变为

$$\forall t_{-i}\in X_{-i},\quad \sum_{i\in I}(f_i(\bar{x}||t_{-i},\bar{y})-f_i(\bar{x},\bar{y}))\le 0.$$

固定 $i\in I$, 则

$$f_i(\bar{x}||t_{-i},\bar{y})-f_i(\bar{x},\bar{y})+\sum_{j\in I,j\ne i}(f_j(\bar{x}||t_{-j},\bar{y})-f_j(\bar{x},\bar{y}))\le 0. \tag{4}$$

在 X_{-i} 上任取 t_{-i}, 且设 $\forall j\ne i$, $t_{-j}=\bar{x}_{-j}$, 则

$$\sum_{j\in I,j\ne i}(f_j(\bar{x}||t_{-j},\bar{y})-f_j(\bar{x},\bar{y}))=0.$$

由 (4), $\forall t_{-i}\in X_{-i}, f_i(\bar{x}||t_{-i},\bar{y})\le f_i(\bar{x},\bar{y})$. 由 i 的任意性, 得

$$\forall i\in I,\forall t_{-i}\in X_{-i}, f_i(\bar{x}||t_{-i},\bar{y})\le f_i(\bar{x},\bar{y}),$$

故 $\bar{x}$ 满足定义 5 的条件 1).

因此, $\bar{z}$ 是非合作博弈 G_1 的 PSBE (WPSBE).

由定理 2 和引理 4 易得下面定理.

定理 3 设非合作博弈 G_1 满足

1) $\forall(x,y)\in Z,\forall i\in I$, 函数 $t_{-i}\to f_i(x||t_{-i},y)$ 是 X_{-i} 上的凹函数;

2) $\forall x\in X,\forall i\in I$, 函数 $y\to f_i(x,y)$ 是 Y 上的凸函数;

3) $\exists\lambda\in\Delta$, $\exists u\in X,\exists v\in Y$ 使

$$f_i(x||t_{-i},y)\le f_i(x||u_{-i},y),\ \forall y\in Y,\ \forall x\in X,\forall i\in I,\ \forall t_{-i}\in X_{-i},$$

且 $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i f_i(x,y')\ge\sum\limits_{i\in I}\lambda_i f_i(x,v),\forall y'\in Y$. 则非合作博弈 G_1 存在 WPSBE.

证明 与定理 2 类似, 故略.

5 算例分析

下面应用第 4 节的结论, 求解非合作博弈的 PSBE (WPSBE).

例 1 设 $I=\{1,2\}$ 表示市场上的两个企业, $X_1=X_2=[0,1]$, $x=(x_1,x_2)\in X=X_1\times X_2$ 表示两企业生产某产品的数量 (单位为万), $y=(y_1,y_2)\in Y=[-1,1]\times[-1,1]$ 表示影响企业收益的不确定参数, $f_i(x,y)$ 表示企业 $i=1,2$ 的收益,

$$f_1(x,y)=x_1^2+2x_1-2x_2+y_1,\quad f_2(x,y)=-x_1+2x_2^2+x_2+y_2,$$

即非合作博弈 $G_1=(I,X,Y,f(x,y))$.

显然, X_i, $i=1,2$ 和 Y 分别是 $\mathbb{R}$ 及 $\mathbb{R}^2$ 上的非空紧凸集, 且函数 $(x,y)\to f_i(x,y)$, $i=1,2$ 是 $Z=X\times Y$ 上的连续函数. 同时函数 $f_i(x,y)$, $i=1,2$ 满足定理 2 的条件 1)–2). 不妨取 $\lambda=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, 则 $u=(0,0)\in X, v=(-1,-1)\in Y$ 满足定理 2 的条件 (3). 因此, G_1 存在 PSBE. 又由定义 7,

$$\varphi_\lambda(z,\widehat{t},y')=2(x_2-t_2)+(x_1-t_1)+\frac{1}{3}(y_1-y_1')+\frac{2}{3}(y_2-y_2').$$

容易验证, $\bar{z}=(\bar{x},\bar{y})=((0,0),(-1,-1))$ 使 $\forall(\widehat{t},y')\in\widehat{X}\times Y$, $\varphi_\lambda(\bar{z},\widehat{t},y')\le 0$. 故由定理 2 的证明知, $\bar{z}$ 是非合作博弈 G_1 的 PSBE(WPSBE).

6 结论

本文在经典非合作博弈简单 Berge 均衡的研究基础上, 结合 Zhukovskii 的 NS 均衡概念, 定义并研究了具有不确定参数的帕雷托简单 Berge 均衡的存在性问题. 具有不确定参数的非合作博弈是经典非合作博弈的推广, 它拓展了非合作博弈的应用范围, 具有更广泛的实用性和理论价值. 然而, 本文仅研究了帕雷托简单 Berge 均衡的存在性问题, 因此研究不确定性下其它非合作博弈均衡解的存在性问题将是下一步的目标.

参考文献

[1] Nash J. Non-cooperative games[J]. Annals of Mathematics, 1951, 54 (5): 286–295.

[2] Berge C. Théorie Générale Des jeux à n-Personnes[M]. Paris: Gauthier Villars, 1957.

[3] Zhukovskii V I. Linear Quadratic Differential Games[M]. Kiew: Naoukova Doumka, 1994.

[4] Nessah R, Larbani M, Tazdait T. A note on Berge equilibrium[J]. Applied Mathematics Letters, 2007, 20: 926–932.

[5] Larbani M, Nessah R. A note on the existence of Berge and Berge-Nash equilibria[J]. Mathematical Social Sciences, 2008, 55: 258–271.

[6] Abalo K Y, Kostreva M M. Fixed points, Nash games and their organizations[J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 1996, 8: 205–215.

[7] Abalo K Y, Kostreva M M. Equi-well-posed games[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1996, 89: 89–99.

[8] Abalo K Y, Kostreva M M. Some existence theorems of Nash and Berge equilibria[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17: 569–573.

[9] Abalo K Y, Kostreva M M. Berge equilibrium: Some recent results from fixed-point theorems[J]. Applied Mathematics and Computitional, 2005, 169: 624–638.

[10] Larbani M, Lebbah H. A concept of equilibrium for a game under uncertainty[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 117: 145–156.

[11] Fan K. A Minimax Inequality and Applications[M]. Shisha O. Inequalities III, New York: Academic Press, 1972.

[12] Nash J. Nash equilibrium and the history of economic theory[J]. Journal of Economic Literature, 1950, 37: 1067–1082.