第六章　积分与微分

本章基本内容：先介绍单调函数、有界变差函数的定义、相互联系、基本性质；然后引入了绝对连续概念，讨论了绝对连续函数与单调函数、有界变差函数的关系；最后研究了牛顿莱布尼兹公式成立的充要条件是 f(x)绝对连续。◇

§６．１　单调函数与有界变差函数

教学目的 掌握和运用单调函数的性质，掌握有界变差函数定义，了解有界变差函数对加法、减法、乘法、除法运算的封闭性，有界变差函数的Jordan 分解定理，从而会通过单调函数的性质来把握有界变差函数的性质。

教学重点 有界变差函数的概念，对四则运算的封闭性及其对除法运算封闭的前提条件，有变差函数的 Jordan 分解定理.

教学难点：.证明有界变差函数的 Jordan 分解定理

定理６．１．１　设F(x)是[a,b]上定义的单调函数，则

(1) F在[a,b]上间断点至多可数，从而F在[a,b]上(R)可积，

(2) F在[a,b]上几乎处处可微.

(3) F' 在[a,b]上(L)可积，并有

$$\int_{[a,x]} F' d_t \le F(x)-F(a) \quad (\text{对}\forall \quad x\in[a,b])$$

证明 (1)不妨假定 f(x)在[a,b]上单调增，由数学分析知：F(x)只有第一类间断点。令 $S(x)=F(x^+)-F(x^-)$并称之为F在x处的跃度，则对任意$\dfrac{1}{n}>0$，满足$E_n=\{x|S(x)\ge\dfrac{1}{n}\}$为有限集。(事实上，$\overline{\overline{E_n}}\le n[F(b)-F(a)]$)，从而间断点全体$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$至多可数，由(R)可积的充分必要条件知F在[a,b]上(R)可积。

(2)关于F(x)几乎处处可微的证明，涉及维他利覆盖和导出数概念，已超出本教材范围，故此处省去其严格的证明过程，但附录予本教材末供读者自学参考。

(3)为了叙述方便，我们补充规定：当x>b时，F(x)≡F(b)。此时，F(x)在

$[a, +\infty)$几乎处处可微，所以对于任意极限为 0 的数列$\{h_n\}$，有

$$\frac{1}{h_n}[F(t+h_n)-F(t)] \longrightarrow F'(t) \quad a.e\ 于[a,b]$$

则$F'(t)$在$[a,b]$上非负可测，从而存在积分值，且

$$\int_{[a,x]} F'(t)d_t=\int_{[a,x]} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}[F(t+h_n)-F(t)]d_t$$

$$\leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\int_{[a,x]}[F(t+h_n)-F(t)]d_t \quad (\text{Fatou 引理})$$

$$=\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\left[\int_{[a+h_n,x+h_n]}F(t)d_t-\int_{[a,x]}F(t)d_t\right] \quad (\text{R 积分的变量替换})$$

$$=\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\left[\int_{[x,x+h]}F(t)d_t-\int_{[a,a+h]}F(t)d_t\right]$$

$$\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}[F(x+h_n)\times h_n-F(a)\times h_n] \quad (\text{由 }F(x)\text{ 的单调性及 R 积分的性质得，}h_n>0)$$

$=F(x^+)-F(a)<+\infty$，故F'在$[a,b]$上可积。

证毕

定义 6．1．1　f 在$[a,b]$上有定义，对任意分划 $T:a=x_0<x_1<x_2<,\ldots,x_n=b$，称 $\bigvee_a^b(f,T)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$为 f 关于分划 T 的变差，称 $\bigvee_a^b(f)=\sup\bigvee_a^b(f,T)$为 f 在$[a,b]$上的全变差，若$\bigvee_a^b(f)<+\infty$，则称 f 是$[a,b]$上的有界变差函数。

显然，有界变差函数是有界函数。事实上，$|f(x)-f(a)|\leqslant\bigvee_a^b(f)$，对任意 $x\in[a,b]$有　　$|f(x)|\leqslant\bigvee_a^b(f)+|f(a)|=M<+\infty$

根据全变差定义求全变差较麻烦，对于单调函数而言却相当简单。

例 6．1．1　$[a,b]$上定义的任一单调函数$f(x)$都是有界变差函数，且

$$\bigvee_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$$

证明　不妨假定f单调增，因为对任意的分划$T:a=x_0<x_1<x_2<,\ldots,x_n=b$有$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f,T)=\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=f(b)-f(a)$，故

$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=f(b)-f(a)<+\infty$，即$f(x)$是有界变差函数。

证毕

既然对于单调函数而言求全变差是如此简单，那么是否对于较复杂的函数可以分成若干个单调区间各个击破呢？答案是肯定的，有下述定理作为保证。

定理6．1．2　若f是$[a,b]$上的有界变差函数，则对任意$c\in(a,b)$有

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$$

证明　对任意$\varepsilon>0$，存在分划$T:a=x_0<x_1<x_2<,\ldots,x_n=b$满足

$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f,T)=\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\geqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)-\varepsilon$，如果此分划中没有分点c就添上它。因此，始终假定有分点c，从而存在n_1，n_2满足

$T_1:a=x_0<x_1<x_2<,\ldots,x_{n_1}=c$，$T_2:c=x_{n_1}<x_{n_1+1}<x_{n_1+2}<,\ldots,x_{n_2}=b$

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f,T_1)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f,T_2)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f,T)\geqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)-\varepsilon,$$

故$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)\geqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$　　(1)

反过来，对任意$\varepsilon>0$，存在分划$T_1:a=x_0<x_1<x_2<,\ldots,x_{n_1}=c$，$T_2:c=x_{n_1}<x_{n_1+1}<x_{n_1+2}<,\ldots,x_{n_2}=b$满足

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f,T_1)=\sum_{i=1}^{n_1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\geqslant\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)-\frac{\varepsilon}{2}$$

$\overset{b}{\underset{c}{V}}(f,T_2)=\sum\limits_{i=1}^{n_2}|f(y_i)-f(y_{i-1})|\geqslant V(f)-\dfrac{\varepsilon}{2}$，取$T_1$与$T_2$的“合并”

T：$a=x_0<x_1<x_2<,\ldots,x_{n_1}=c<x_{n_1+1}<x_{n_1+2}<,\ldots,x_{n_2}=b$则

$$\bigvee_a^b (f,T)=\bigvee_a^c (f,T_1)+\bigvee_c^b (f,T_2)\geqslant\bigvee_a^c (f)+\bigvee_c^b (f)-\varepsilon,$$

故 $\bigvee_a^b (f)\geq\bigvee_a^c (f)+\bigvee_c^b (f)$ (2)

综合(1)、(2)即得

$$\bigvee_a^b (f)=\bigvee_a^c (f)+\bigvee_c^b (f)$$

证毕

例6．1．2

$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\in(0,1] \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 不是[0, 1]上的有界变差函数，但

$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\in(0,1] \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 是[0, 1]上的有界变差函数。

事实上，f(x)、g(x)的局部极大值、极小值点交替为 $\frac{1}{\pi+\frac{\pi}{2}}$，

$\frac{1}{2\pi+\frac{\pi}{2}}$, $\frac{1}{3\pi+\frac{\pi}{2}}$，…，$\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$，…，…

$$\bigvee_0^1 (f)\geqslant\bigvee_{\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}}^1 (f)=\left|\sin 1-\frac{\pi}{2}\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{i\pi+\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{(i-1)\pi+\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$$

故 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\in(0,1] \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 不是[0, 1]上的有界变差函数。

$$\bigvee_0^1 (g)=\left|\sin 1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right|+\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left[\frac{1}{i\pi+\frac{\pi}{2}}\right]^2-\left[\frac{1}{(i-1)\pi+\frac{\pi}{2}}\right]^2\right|$$

$<+\infty$,

故 $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\in(0,1] \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 是[0,1]上的有界变差函数。

证毕

注：将g(x)中 x^2 处换为 x^α （$\alpha>1$）同样可证是[0,1]上的有界变差函数。

定理6.1.3 设f(x)，g(x)是[a,b]上的有界变差函数，则f(x)±g(x)、f(x)g(x)是[a,b]上的有界变差函数；如果存在δ>0满足|g(x)|≥δ，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也是[a,b]上的有界变差函数。

证明 对任意的分划T: $a=x_0<x_1<x_2<,\ldots,x_n=b, x_n=b$ 有

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}[(f\pm g),T]=\sum_{i=1}^{n}|[f(x_i)\pm g(x_i)]-[f(x_{i-1})\pm g(x_{i-1})]|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|[f(x_i)-[f(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|$$

$$=\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f,T)+\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g,T)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)，故\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f\pm g)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)<+\infty$$

即f(x)±g(x)是[a,b]上的有界变差函数。

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}[(fg),T]=\sum_{i=1}^{n}|[f(x_i)g(x_i)]-[f(x_{i-1})g(x_{i-1})]|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|[f(x_i)-f(x_{i-1})]g(x_i)|+\sum_{i=1}^{n}|[g(x_i)-g(x_{i-1})]f(x_{i-1})|$$

$$\leqslant M_f\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f,T)+M_g\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g,T)\leqslant M_f\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+M_g\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g),$$

故 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(fg)\leqslant M_f\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+M_g\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)<+\infty$，其中 M_f，M_g 分别为函数f,g在[a,b]上的界，即f(x)g(x)是[a,b]上的有界变差函数。

如果存在δ>0满足|g(x)|≥δ，

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\left(\frac{1}{g}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{g(x_i)}-\frac{1}{g(x_{i-1})}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{|g(x_i)-g(x_{i-1})|}{\delta^2}$$

即 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\left(\frac{1}{g}\right)\leqslant\dfrac{\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)}{\delta^2}<+\infty$，即 $\dfrac{1}{g(x)}$ 也是[a,b]上的有界变差函数，从而

$\frac{f(x)}{g(x)}$ 也是[a,b]上的有界变差函数。

证毕

定理6．1．4　f(x)是[a,b]上的有界变差函数的充分必要条件是 f 可以表成两个单调函数之差。

证明

"=>" 事实上，$f(x)=\bigvee_a^x(f)-[\bigvee_a^x(f)-f(x)]$，其中 $\bigvee_a^x(f)$ 显然是单调增函数，$g(x)=[\bigvee_a^x(f)-f(x)]$ 也可以证明是单调增函数。事实上，当 $x_1<x_2$ 时，

$$g(x_2)-g(x_1)=\left|\bigvee_a^{x_2}(f)-f(x_2)\right|-\left|\bigvee_a^{x_1}(f)-f(x_1)\right|$$

$$=\bigvee_{x_1}^{x_2}(f)-[f(x_2)-f(x_1)]\geqslant 0,$$ 故 g(x) 是单调增函数。

"<=" 设 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 都是单调增函数。从而 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 都是有界变差函数，故 f(x) 是有界变差函数。

证毕

§6．2　绝对连续函数

教学目的 掌握绝对连续函数定义，讨论绝对连续函数与单调函数，有界变差函数的关系，并利用此关系讨论绝对连续函数的简单性质，据绝对连续函数定义讨论对加法、减法、乘法、运算的封闭性。证明两类重要函数：Lipschtz函数和可积函数的不定积分是绝对连续函数。

教学重点　绝对连续函数在一定条件下对除法运算的封闭性。可积函数的不定积分是绝对连续函数。

.教学难点　一定条件下绝对连续函数之商仍为绝对连续函数，可积函数的不定积分是绝对连续函数的证明。

定义6．2．1　f 在[a,b]上有定义，对任意 $\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，对任意有限数 n，当互不相交区间 (α_i,β_i) 满足：

$\sum_{i=1}^{n}|\beta_i-\alpha_i|<\delta$ 时，有 $\sum_{i=1}^{n}|f(\beta_i)-f(\alpha_i)|<\varepsilon$，则称 f(x) 为 E 上的绝对连续函数。

定理６．２．１　若 f 是在[a, b]上定义的绝对连续函数，则 f 在[a, b]上连续，且变差有界。

证明　对任意 $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 对 n=1，当 $|\beta-\alpha|<\delta$ 时，$|f(\beta)-f(\alpha)|<\varepsilon$，即 f 在[a, b]上一致连续。

对任意 $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$，取 $a=x_0<x_1<x_2<,\ldots,x_n=b$ 满足

$x_i-x_{i-1}<\delta$，对任意有限数 n_i，当互不相交区间 $(\alpha_j^i,\beta_j^i)\subset(x_{i-1},x_i)$ 时有

$\sum_{j=1}^{n_i}|\beta_j^i-\alpha_j^i|<\delta$，从而有 $\sum_{j=1}^{n_i}|f(\beta_j^i)-f(\alpha_j^i)|<\varepsilon$，$\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\le\varepsilon<+\infty$，

$\bigvee_a^b(f)=\sum_{i=1}^{n}\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\le n\varepsilon<+\infty$　即 f 是有界变差函数。

证毕

推论　若 f(x) 是[a, b]上的绝对连续函数，则 f 可以表成两个单调函数之差。

定理６．２．２　设 f(x)，g(x) 是[a, b]上的绝对连续函数，则 f(x)±g(x)、f(x)g(x) 是[a, b]上的绝对连续函数；如果 g(x)≠0 于[a, b]，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也是[a, b]上的绝对连续函数。

证明　f 在[a, b]上有定义，对任意 $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$，对任意有限数 n，当互不相交区间 (α_i,β_i) 满足：$\sum_{i=1}^{n}|\beta_i-\alpha_i|<\delta$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}|f(\beta_i)-f(\alpha_i)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \sum_{i=1}^{n}|g(\beta_i)-g(\alpha_i)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n}|[f(\beta_i)\pm g(\beta_i)]-[f(\alpha_i)\pm g(\alpha_i)]|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}|[f(\beta_i)-f(\alpha_i)|+\sum_{i=1}^{n}|[g(\beta_i)-g(\alpha_i)|<\varepsilon,$$

故 f(x)±g(x) 是[a, b] 上的绝对连续函数。

其余证明留给读者。

(思考为什么此处未明文要求“存在$\delta>0$满足$|g(x)|\geq\delta$”呢？)

定理6．2．3　设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的Lipschtz函数，则f是绝对连续函数。

证明　因为$f(x)$是定义在$[a,b]$上的Lipschtz函数，所以，存在$M>0$，对任意x_1，$x_2\in[a,b]$有$|f(x_1)-f(x_2)|\leq M|x_1-x_2|$，故对任意$\varepsilon>0$，$\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$，对任意有限数$n$，当互不相交区间$(\alpha_i,\beta_i)$满足：$\sum\limits_{i=1}^{n}|\beta_i-\alpha_i|<\delta$时，

$$\sum_{i=1}^{n}|f(\beta_i)-f(\alpha_i)|\leq\sum_{i=1}^{n}M|\beta_i-\alpha_i|<M\times\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

即f是绝对连续函数。

定理6．2．4　设$f(x)$是定义在$[a,b]$上Lebesgue可积函数，则$f(x)$的不定积分$F(x)=\int_{[a,x]}fd_t+C$(其中C是任意常数)是绝对连续函数。

证明　由积分绝对连续性知：对任意$\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$A\subset[a,b]$，$mA<\delta$时$\left|\int_A fd_t\right|\leq\int_A|f|d_t<\varepsilon$，于是对任意有限数$n$，当互不相交区间$(\alpha_i,\beta_i)$满足：令$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i]$，则当$mA=\sum\limits_{i=1}^{n}|\beta_i-\alpha_i|<\delta$时，有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(\beta_i)-F(\alpha_i)|=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{[\alpha_i,\beta_i]}fd_t\right|$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}\int_{[\alpha_i,\beta_i]}|f|d_t=\int_A|f|d_t<\varepsilon,$$

故$F(x)=\int_{[a,x]}fd_t$是绝对连续函数。

证毕

§6．3　微分与积分

教学目的　在上节已经知道不定积分绝对连续基础上进一步证明，所有的绝对连续函数都是其导函数的积分。即证明了联系微分与积分的牛顿-莱布尼兹公式.

教学重点　绝对连续函数，不定积分，牛顿-莱布尼兹公式.

教学难点　不定函数的导函数与被积函数几乎处处相等的证明。

引理６．３．１　若 f(x)是定义在[a,b]上 Lebesgue 可积函数，且 $F(x)=\int_{[a,x]} fd_t=0$，则 f(x)=0 a.e 于[a,b]。

证明　1)对任意开区间(α，β)⊂[a,b]有

$$\int_{(\alpha,\beta)} fd_t=\int_{[a,\beta)} fd_t-\int_{[a,\alpha]} fd_t=0$$

2) 对任意开集 $G=\bigcup_i(\alpha_i,\beta_i)\subset[a,b]$有

$$\int_G fd_t=\sum_i\int_{(\alpha_i,\beta_i)} fd_t=0$$

3) 对任意闭集 F⊂[a,b]，则 G=[a,b]－F 开，故

$$\int_F fd_t=\int_{[a,b]} fd_t-\int_G fd_t=0$$

4) 若 f(x)=0 a.e 于[a,b]不真，不妨假定 mE[f>0]>0，则存在 n 满足 $mE[f>\frac{1}{n}]=\delta>0$，由可测集的性质知，存在闭集 $F_0\subset E[f>\frac{1}{n}]$满足 $mF_0>\delta/2$，故 $\int_{F_0} fd_t\geq\frac{1}{n}mF_0>0$，矛盾。

定理６．３．１　若 f(x)是定义在[a,b]上的 Lebesgue 可积函数，且 $F(x)=\int_{[a,x]} fd_t$，则 F'(x)=f(x) a.e 于[a,b]。

证明　(分三步证明之)

(1)　设 f 是有界函数，即|f(x)|≤K，x∈[a,b]，令 $F(x)=\int_{[a,x]} fd_t$，若 h>0，则有

$$\left|\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)]\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{[x,x+h]} fdt\right|\leq K$$

因为 G(x)绝对连续，几乎处处可微，所以对于任意极限为 0 的数列$\{h_n\}$，有

$$\frac{1}{h_n}[F(x+h_n)-F(x)]\longrightarrow F'(x)\ \text{a.e 于}[a,b]$$

则

$\int_{[a,x]} F'(t) f d_t = \lim_{n\to 0} \frac{1}{h_n} \int_{[a,x]} [F(t+h_n) - F(t)] d_t$ （有界控制收敛定理）

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{[a,x]} [F(t+h) - F(t)] dt$ （海涅极限定理）

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{[a+h,x+h]} F(t) d_t - \int_{[a,x]} F(t) d_t \right]$ （R积分的变量替换）

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{[x,x+h]} F(t) d_t - \int_{[a,a+h]} F(t) d_t \right]$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \{F[x+\theta_1(h)h]\times h - F[a+\theta_2(h)h]\times h\}$ $(0<\theta_1(h)<1,\ 0<\theta_2(h)<1)$

$=F(x)-F(a)=F(x)$ （因为F连续，且F（a）=0）

即$\int_{[a,x]} (F'-f) d_t = 0$，由引理6.3.1知$F'=f$ a.e于[a,b]

(2)　设f是非负可积函数，则存在有界非负简单函数列满足

$f_n(t) \leqslant f_{n+1}(t) \leqslant f(t)$，$f_n(t) \to f(t)$ $(n\to +\infty)$，于是

$F_n(x) = \int_{[a,x]} f_n d_t$，则$F'_n(x) = f_n(x)$ a.e于[a,b]。

$F(x) = \int_{[a,x]} f_n d_t + \int_{[a,x]} [f(t) - f_n(t)] d_t$，其中$\int_{[a,x]} [f(t) - f_n(t)] d_t$

关于x单调增，几乎处处存在非负导数，所以$F'(x) \geqslant f_n(x)$，令$n\to+\infty$得

$F'(x) \geqslant f(x)$，从而$\int_{[a,x]} F'(t) d_t \geqslant \int_{[a,x]} f(t) d_t$。另一方面，

$$\int_{[a,x]} F'(t) d_t \leqslant F(x) - F(a) = \int_{[a,x]} f(t) d_t,$$

即$\int_{[a,x]} F'(t) d_t = \int_{[a,x]} f(t) d_t$，由引理6.3.1知：$F'(x)=f(x)$ a.e于[a,b]。

(3)　设f是一般可积函数，则$F(x) = \int_{[a,x]} f^+ d_t - \int_{[a,x]} f^- d_t$

由(2)知：$F'(x) = f^+(x) - f^-(x)$ a.e于[a,b]。

证毕

引理6．3．2　设F(x)是[a,b]上的绝对连续函数，且$F'(x)=0$ a.e于[a,b]，

则F(x)为常值函数。

证明　我们把证明分成两步：

1^0　先证F(b)＝F(a)，对任意$\varepsilon>0$，由假设：F(x)是[a,b] 上的绝对连续函数，所以$\exists\ \delta>0$，对任意有限数n，当互不相交区间(α_i,β_i)满足：

$$\sum_{i=1}^{n}|\beta_i-\alpha_i|<\delta \text{时，有} \sum_{i=1}^{n}|F(\beta_i)-f(\alpha_i)|<\varepsilon \qquad (1)$$

记$E_0=\{x\,|\,F'(x)=0\ ,\ x\in[a,b]\}$，从而$m([a,b]-E_0)=0$，所以对上述$\delta>0$，

存在开集$G_0\supset[a,b]-E_0$且$mG_0<\delta$. 设$\{(\alpha_i,\beta_i)\}$为G_0的构成区间族，则

$$m\bigcup_i(\alpha_i,\beta_i)=\sum_i(\beta_i-\alpha_i)=mG_0<\delta$$

对任意$\varepsilon>0$，$y_0\in[a,b]-G_0$存在$h=h(\varepsilon,y_0)>0$，使得$y\in(y_0-h,\ y_0+h)$

时 $$\left|\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0}\right|<\varepsilon \qquad (2)，$$

这时开区间族$\{(\alpha_i,\beta_i)\}\cup\{(y_0-\frac{h}{2},\ y_0+\frac{h}{2})\,|\,y_0\in[a,b]-G_0\}$是

$[a,b]-G_0$的一个开覆盖，根据有限覆盖定理存在有限个开区间覆盖有界闭集

$[a,b]-G_0$，设它们是

$$\{(\alpha_i,\beta_i)\,|\,i=1,2,...,n\}\cup\{(y_j-\frac{h_j}{2},\ y_j+\frac{h_j}{2})\,|\,j=1,2,...,m\}$$

对有限点集$\{\alpha_i,\beta_i,y_j\,|\,i=1,2,...,n, j=1,2,...,m\}$作适当的增删处理，然后

按大小顺序排列，使之成为[a,b]的一个分划 $T: a=x_0<x_1<x_2<,...,x_n=b$

并且使得任何$(x_{k-1}\ ,\ x_k)$必属于以下两种情形之一：

(i)包含在某个(α_i，β_i)之中

(ii)包含在某个($y_j-\frac{h_j}{2}$，$y_j+\frac{h_j}{2}$)之中，且有一端点刚好是y_j

由此，　$|F(b)-F(a)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|F(x_k)-F(x_{k-1})|$

$=\Sigma'|F(x_k)-F(x_{k-1})|+\Sigma''|F(x_k)-F(x_{k-1})|$

其中$\Sigma'|F(x_k)-F(x_{k-1})|$和$\Sigma''|F(x_k)-F(x_{k-1})|$分别表示具有形式(i)和(ii)的

(x_{k-1}，x_k)求和，根据(1)有　$\Sigma'|F(x_k)-F(x_{k-1})|<\varepsilon$

根据(2)有　$\Sigma''|F(x_k)-F(x_{k-1})|<\varepsilon\Sigma''|x_k-x_{k-1}|\leqslant\varepsilon(b-a)$由ε的任意性,

即得F(b)=F(a).

2^0 对任意的$x\in[a,b]$,用[a,x]代替[a,b]重复1^0的讨论,便得到F(x)＝F(b).

证毕

定理6．3．2　$F(x)-F(a)=\int_{[a,x]}F'(t)d_t$ ＜=＞ F(x)为绝对连续函数

证明　“=＞”由定理6.2.4即得。

“＜=”因为F(x)为绝对连续函数，所以F'(x) Lebesgues 可积，

令$\phi(x)=\int_{[a,x]}F'(t)d_t$，则$\phi(x)$为绝对连续函数，再令$\psi(x)=F(x)-\phi(x)$

则$\psi(x)$也是绝对连续函数，且$\psi'(x)=F'(x)-\phi'(x)=F'(x)-F'(x)=0$　a.e于[a,b]，由引理6.3.2知，$\psi(x)$为常值函数。而$\psi(a)=F(a)-\phi(a)=F(a)$，即

$F(x)-\phi(x)\equiv F(a)$，故$F(x)-F(a)=\int_{[a,x]}F'(t)d_t$。

证毕

定理6．3．3　(分部积分公式)设f(x)、g(x)为[a,b]上的绝对连续函数，则

$$\int_{[a,b]}f(t)g'(t)d_t=f(t)g(t)\,\Big|_a^b-\int_{[a,b]}g(t)f'(t)d_t$$

证明　因为$(f(t)g(t))'=f'(t)g(t)+f(t)g'(t)$

所以$f(t)g'(t)=(f(t)g(t))'-f'(t)g(t)$

于是$\int_{[a,b]} f(t)g'(t)dt=\int_{[a,b]} (f(t)g(t))'d_t-\int_{[a,b]} f'(t)g(t)d_t$

由定理6.3.2知：$\int_{[a,b]} (f(t)g(t))'d_t=f(b)g(b)-f(a)g(a)$

即$\int_{[a,b]} f(t)g'(t)d_t=(f(t)g(t))|_a^b-\int_{[a,b]} f'(t)g(t)d_t$

证毕◇

第六章　　习　题

1. 区间(a,b)上两个单调函数，若在一稠密子集上相等，则他们有相同的连续点，从而几乎处处相等。

2. 设f(x)、$f_n(x)$为[a,b]上的有界变差函数列，$f_n(x)\longrightarrow f(x)$ a.e于E，且 $|f(x)|<+\infty$，如果$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n)<K$ (n=1,2,...)，则f(x)为有界变差函数。

3. 讨论函数$f(x)=x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}$ (0≤x≤1，α，β>0)在何种情况为有界变差函数，何种情况为绝对连续函数。

4. 设f(x)为[a,b]上的绝对连续函数，且f'(x)≥0，则f(x)为[a,b]上的单调递增函数。