第三章　测度论

本章基本内容：先介绍集合的外测度定义与性质，然后引入可测集的定义、讨论可测集的性质，最后研究了可测集的构造。其目的在于为改造积分定义时对分割、求和所涉及的不太规则集合求相应的“长度”、“面积”、“体积”。

§3．1　Lebesgue 外测度定义及其性质

教学目的　让学生理解掌握R^n空间中.Lebesgue 测度外测度的定义,并能通过Lebesgue外测度定义推导Lebesgue 外测度的基本性质。

本节重点　次可列可加性，区间外测度刚好是区间的“体积”。

本节难点　在距离为正条件下的外测度之可加性证明。

我们在微积分中碰到的函数，都是定义在区间上的，那里的积分，需涉及区间及其子区间的长度，如

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k|$$

其中$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$，$\lambda = \max|\Delta_k|$需涉及$[a, b]$与$[x_{k-1}, x_k]$的长度。

因更多的函数往往只定义在一个 R^n 中的一般集合上，研究 f 在 E 上的积分，必然涉及一般集合 E 及其子集的“长度”或“体积”。再说，即使是定义在区间上的函数，如果作分划是将函数值接近的分在一起，就必然遇到求不太规则集合的“长度”或“体积”问题。然而，到目前为止，我们只有开集的“长度”或“体积”概念。因此，需要将现有的区间“长度”或“体积”概念推广到较为一般的集合上去，这就产生了 Lebesgue 测度理论。

如何规定一般集合的“体积”呢先回忆圆面积的推导过程：　外切正 n 边形的面积（外包）

$$S_{外} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2Rtg\frac{2\pi}{2n} \cdot R = \pi \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} \cdot R^2 \to \pi R^2 (n \to \infty)$$

内接正 n 边形的面积（内填）

$$S_{内}=n\cdot\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{2\pi}{2n}\cdot R\cos\frac{2\pi}{2n}=\pi\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\cdot R^2\to\pi R^2(n\to\infty)$$，于

是我们自然想到:由有限个区间外包，内填得 Jordan 外测度 $m^*E=\inf\{\sum_{i=1}^{n}|I_i|\mid I_i$ 为开区间，且 $\bigcup_{i=1}^{n}I_i\supseteq E\}$, Jordan 内测度 $m_*E=\sup\{\sum_{i=1}^{n}|I_i|\mid I_i$ 为开区间，且 $\bigcup_{i=1}^{n}I_i\subseteq E\}$,这无一将测度概念拓广到了一个区间全体更宽的范围，遗憾的是对有理数集和无理数积而言内测度是 0，外外测度为 0，它们不相等，从而有理集、无理数集是 Jordan 不可测。因此，我们对推广范围不满意。

为了克服此弊病，人们将有限个区间外包，内填改为可数个区间外包后得 Lebesgue 外测度 $m^*E=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\mid I_i$ 为开区间，且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\supseteq E\}$，内测度 $m_*E=\sup\{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\mid I_i$ 为开区间，且 $\bigcup_{i=1}^{n}I_i\subseteq E\}$，按此思路有理数集外测度内测度均为 0，即解决了有理数集可测的问题，但对无理数而言仍然外测度是 1，外测度仍然是 0，内、外测度仍然不相等，即问题并未得到彻底解决！

虽然这两次尝试均以失败而告终,但她确孕育了成功的希望:

将区间内填改为可数个区间外包 $I-E$ 后按 $m_*E=|I|-m^*(I-E)$ 规定 Lebesgue 内测度，解决了无理数集可测的问题，不仅如此，还通过理论证明了所有有区间出发经至多可数次交、并、余、差运算的结果都可测。

当然由于研究的不断深入，我们没有必要重复上述步骤，而是采用形式更为简洁，效果又完全等价的条件作为定义。

定义 3．1．1　对任意集合 E，称 $m^*E=\inf\{|G|\mid G$ 开，且 $G\supseteq E\}$ 为 E 的 Lebesgue 外测度。

此定义的基本思想是：对较为规则的集合如区间、开集就规定其“体积”为外测度(此事实将在定理 3．1．1 的(4)和推论 3．2．3 中得到严格论

证)，对于不规则的集合 E，试图用盖住 E 的开集 G 的“体积”取而代之。然而盖住 E 的开集 G 多种多样，其体积也大小不一，但不应比 E 的“体积”小。取哪一个最好呢？ 当然是最小者较为合理。由于对无限个数而言，可能只有更小没有最小，于是取下确界最安全。

定理３．１．１　任意集合的外测度均满足：

1)**非负性**　$m^*E\geqslant 0$

2)**单调性**　若 $A\supset B$，则 $m^*A\geqslant m^*B$

3)**次可列可加性**　$m^*\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\leqslant\sum_{i=1}^{\infty} m^*E_i$

4)若 $d(A,B)>0$，则 $m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B$

5)区间 I 的外测度满足 $m^*I=|I|$

证明:1)非负性、2)单调性显然。

3)证次可加性，对任意 $\varepsilon>0$ 及 i 存在开集 $G_i\supset E_i$

$$|G_i|\leqslant m^*E_i+\frac{\varepsilon}{2^i}$$

而显然 $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\supset\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

$$m^*\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|G_i|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty} m^*E_i+\varepsilon$$，由 ε 的任意性。

知结论成立。

4)只须证当 $d(A,B)>0$ 时，$m^*A+m^*B\leqslant m^*(A\cup B)$。事实上，ヨ开集 $G\supset(A\cup B)$ 满足 $|G|\leqslant m^*(A\cup B)+\varepsilon$，由推论２．３．３知：ヨ开集 U_1，U_2 满足 $U_1\cap U_2=\Phi$，且 $A\subset U_1$，$B\subset U_2$，令 $G_1=G\cap U_1$，$G_2=G\cap U_2$，则 $G_1\cap G_2=\Phi$。又因为 $m^*A+m^*B\leqslant|G_1|+|G_2|\leqslant|G|\leqslant m^*(A\cup B)+\varepsilon$，由 ε 的任意性知：

$m^*A+m^*B\leq m^*(A\cup B)$

5)证 $m^*I=|I|$

无论 I 是开区间、闭区间，任意开集 $G\supset I$，定有 $|I|\leq|G|$，故 $|I|\leq m^*I$。另一方面，对任意 $\varepsilon>0$ 存在开区间 $G=I_\varepsilon\supset I$，满足 $|I_\varepsilon|\leq|I|+\varepsilon$，故 $m^*I\leq|I|$，从而 $m^*I=|I|$。

§3．2　可测集的定义及其性质

教学目的　让学生理解和掌握 R^n 空间中可测集和测度的定义,并能通过Lebesgue可测集和测度的定义推出Lebesgue可测集和测度的基本性质。

本节重点　①一座空中楼阁："如果"有一些集合可测，那么这些集合的至多可数次交、并、余差运算结果也仍然可测。②两个具体集合：零测度集、区间是可测集合。

本节难点　测度的可列可加性的证明。

由定理3．1．1的4)可知：外测度确为"体积"概念的推广。非常令人遗憾的是：外测度对一些集合而言无法满足可加性，即人们可构造这样一族互不相交的集合 S_i $(i=1,2,\ldots,N)$ 满足

$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{N}S_i\right)<\sum_{i=1}^{N}m^*S_i$，于是我们只有退而求其次，探索可以限制在什么范围内满足可加性。

定义3．2．1　若对任意 T 有 $m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE)$，则称 E 为 Lebesgue 可测集。简称 E 可测。并称 m^*E 为 E 的测度，简记为 mE。

直观地讲：可测集 E 是具有良好分割性能的集合，　它将任意一个集合分成两部分，一部分在 E 内即 $T\cap E$，另一部分在 E 外即 $T\cap E^c$，两部分外测度之和恒等于总体 T 的外测度。显然，这是为了满足测度可加性而作出的重要限制。

定理３．２．１　E 可测<=>对任意 $A\subset E$，$B\subset E^c$ 有 $m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B$

证明　“=>”因为 E 可测，所以对任意 $A\subset E$，$B\subset E^c$ 令 $T=A\cup B$，则 $T\cap E=A$，$T\cap CE=B$，故 $m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE)$，即

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B$$

“<=”因为对任意 $A\subset E$，$B\subset E^c$ 有 $m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B$，所以对任意 T，令 $A=T\cap E\subset E$，$B=T\cap CE\subset E^c$，则由已知得 $m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B$

即 $m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE)$。

定理３．２．２　E 可测<=>CE 可测。

证明　　因为 $C(CE)=E$，于是

E 可测 $\Leftrightarrow m^*T=m^*[T\cap E]+m^*[T\cap(CE)]$

$\Leftrightarrow m^*T=m^*[T\cap C(CE)]+m^*[T\cap(CE)]$

$\Leftrightarrow m^*T=m^*[T\cap(CE)]+m^*[T\cap C(CE)]$

$\Leftrightarrow$ CE 可测。

证毕

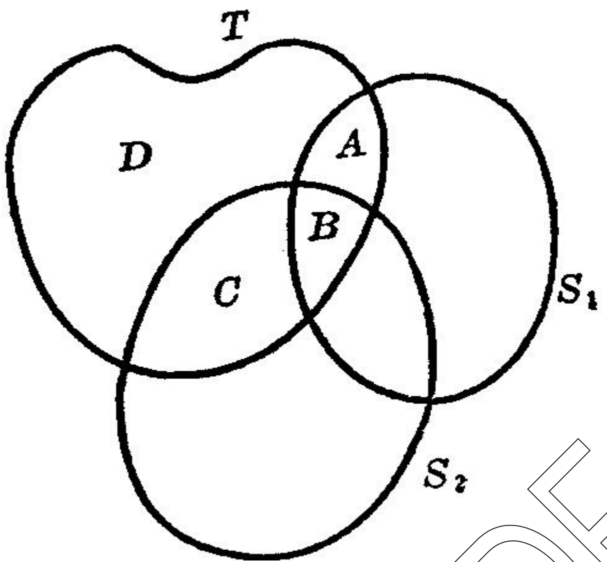
定理３．２．３　设 S_1、S_2 均可测，则 $S_1\cup S_2$ 也可测。如果 $S_1\cap S_2=\phi$，

则　　$m^*[T\cap(S_1\cup S_2)]=m^*(T\cap S_1)+m^*(T\cap S_2)$

特别地 $m(S_1\cup S_2)=mS_1+mS_2$

证明　　如图３．２．１所示，对任意的集合 T，

令 $A=T\cap[S_1-S_2]$，$B=T\cap[S_2\cap S_1]$，



（图３．２．１）

$C=T\cap[S_2-S_1]$，$D=T-S_1-S_2$，则

$$m^*T=m^*[A\cup B\cup C\cup D]$$

$$=m^*[A\cup B]+m^*[C\cup D]\quad（因为 S_1 可测）$$

$$=m^*[A\cup B]+m^*C+m^*D\quad（因为 S_2 可测）$$

$$=m^*[A\cup B\cup C]+m^*D\quad（因为 S_1 可测）$$

$$=m^*\{T\cap[S_1\cup S_2]\}+m^*\{T\cap C[S_1\cup S_2]\}$$

故 $S_1\cup S_2$ 可测。如果 $S_1\cap S_2=\phi$，则 $T\cap S_1\subseteq S_1$，$T\cap S_2\subseteq CS_1$，由 S_1 可测知：　$m^*[T\cap(S_1\cup S_2)]=m^*(T\cap S_1)+m^*(T\cap S_2)$

令 $T=R^n$，则 $m(S_1\cup S_2)=mS_1+mS_2$

推论３．２．１　设 S_i $(i=1,2,...,n)$ 均可测，则 $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ 也可测。如果

$S_i\cap S_j=\phi\,(i，j=1,2,...,n；i\neq j)$，则

$$m^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{n} S_i)]=\sum_{i=1}^{n} m^*(T\cap S_i)$$

正是此定理及其推论说明了：可测集的测度是真正“体积”概念的推广。

定理 3．2．4　若 S_1，S_2 均为可测集，则交集 $S_1\cap S_2$ 也是可测集。

证明　只须证 $[S_1\cap S_2]^c$ 是可测集，而 $[S_1\cap S_2]^c = S_1{}^c\cup S_2{}^c$

由定理 3．2．2 知：$S_1{}^c$ 和 $S_2{}^c$ 均为可测集，由定理 3．1．3 知：$S_1{}^c\cup S_2{}^c$ 可测。

证毕

推论 3．2．2　若 S_i (i=1,2,..,n) 均为可测集，则交集 $\bigcap_{j=1}^{n} S_2$ 也是可测集。

推论 3．2．3　若 S_1，S_2 均为可测集，则差集 S_1-S_2 也是可测集；如果 $S_1\supseteq S_2$，且 $mS_2<+\infty$，则 $m^*[T\cap(S_1-S_2)]=m^*(T\cap S_1)-m^*(T\cap S_2)$。

证明　因为 $S_1-S_2=S_1\cap CS_2$，由定理 3．2．2 和定理 3．2．4 得 S_1-S_2 可测，且 $m^*[T\cap S_1]=m^*[T\cap(S_1-S_2)]+m^*[T\cap S_2]$，移项即得

$$m^*[T\cap(S_1-S_2)]=m^*(T\cap S_1)-m^*(T\cap S_2)$$

证毕

注 3．2．1　**其条件** $mS_2<+\infty$ 在于保证 $m^*[T\cap S_2]<+\infty$，从而确保移项可实施。

定理 3．2．5　（可列可加性）若 S_1，S_2，...，S_n，...是一列可测集，则 $S=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_n$ 也是可测集，若 S_1，S_2，...，S_n，...是一列互不相交的可测集，则对任意的 T 有

$$m^*[T\cap\bigcup_{i=1}^{\infty} S_n]=\sum_{i=1}^{\infty} m^*(T\cap S_n)$$

特别地

$$m[\bigcup_{i=1}^{\infty} S_n]=\sum_{i=1}^{\infty} mS_n$$

证明　1)假定 S_1， S_2，...，S_n，...互不相交，

要证 S 可测，只须证对任意的 T 有

$$m^*T\geqslant m^*[T\cap\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i]+m^*\{T\cap[\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i]^c\}$$

因为对任意有限数 n 有 $m^*T=m^*[T\cap\bigcup_{i=1}^{n} S_i]+m^*\{T\cap[\bigcup_{i=1}^{n} S_i]^c\}$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n} m^*[T\cap S_i]+m^*\{T\cap[\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i]^c\}$$

令 n→∞得 $m^*T\geqslant\sum_{i=1}^{\infty} m^*[T\cap S_i]+m^*\{T\cap[\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i]^c\}$

由次可加性得 $m^*T\geqslant m^*[T\cap\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i]+m^*\{T\cap[\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i]^c\}$，即 $s=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 可测， $m^*[T\cap\bigcup_{n=1}^{\infty} S_i]\geqslant m^*[T\cap\bigcup_{i=1}^{m} S_i]=\sum_{i=1}^{m} m^*(T\cap S_i)$，

令 m→∞，得 $m*[T\cap\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i]\geqslant\sum_{i=1}^{\infty} m^*(T\cap S_i)$，

结合次可加性得 $m^*[T\cap\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i]=\sum_{i=1}^{\infty} m^*(T\cap S_i)$，

特别地令 T=S 时得 $m[\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i]=\sum_{i=1}^{\infty} mS_i$

2)若 S_1，S_2，...，S_n，...可能相交时，考虑

$$S=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_n=\bigcup_{i=1}^{\infty}[S_i-S_{i-1}-\dots-S_1]$$，而 $[S_i-S_{i-1}-\dots-S_1]$ 互不相交，

由 1)知 S 可测。

证毕

注 3．2．2　由本定理可以看出，　区别可数无限与不可数无限是一件相当重要的事情。测度的可加性只对至多可数个集合而言成立，否则会导致"任意集合皆可测且测度均为 0"的荒谬结果。

事实上，如果对任意多个集合而言都具有可加性，则对任意集合 E 有:

$$E=\bigcup_{x\in E}\{x\}\ \text{可测，且}\ mE=\sum_{x\in E} m\{x\}=0。$$

定理 3．2．6　若 E_1，E_2，...，E_n，...是一列可测集，则交集

$E=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 是可测集.

证明　与定理 3．2．4 证明理由相同。

定理 3．2．7　(外极限定理)设$\{E_n\}$是一列可测集，且 $E_1\subseteq E_2\subseteq\dots\subseteq E_n\subseteq,\dots$ 令 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i=\lim_{n\to\infty} E_n$，则对任意 T 有

$$m^*(T\cap E)=\lim_{n\to\infty} m^*(T\cap E_n)$$

证明　令 $S_n=E_n-E_{n-1}$(这里 $E_0=\phi$)，则 S_n 可测且互不相交，由定理 3．2．5 得

$$m^*\left[T\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}(S_n)\right]=\sum_{n=1}^{\infty} m^*(T\cap S_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m^*[T\cap(E_i-E_{i-1})]$$

$$=\lim_{n\to\infty} m^*\bigcup_{n=1}^{n}[T\cap(E_i-E_{i-1})]$$

$$=\lim_{n\to\infty} m^*(T\cap E_n),$$

显然

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n=E，即\ m^*(T\cap E)=\lim_{n\to\infty} m^*(T\cap E_n)$$

证毕

定理 3．2．8　(内极限定理)设$\{E_n\}$是一列可测集，且$E_1\supseteq E_2\supseteq,\ldots,\supseteq E_n\supseteq,\ldots$ 令

$E=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n=\lim_{n\to\infty} E_n$，则对任意$m^*T<+\infty$有 $m^*(T\cap E)=\lim_{n\to\infty} m^*(T\cap E_n)$

证明　因$E_1\supseteq E_2\supseteq,\ldots,\supseteq E_n\supseteq,\ldots$ 所以$E_1-E_1\subseteq E_1-E_2\subseteq,\ldots,\subseteq E_1-E_n,\ldots$，则由外极限定理得$m^*[T\cap(E_1-E)]=\lim_{n\to\infty} m^*[T\cap(E_1-E_n)]$，即$m^*(T\cap E_1)-m^*(T\cap E)=m^*(T\cap E_1)-\lim_{n\to\infty} m^*(T\cap E_n)$，

故$m^*(T\cap E)=\lim_{n\to\infty} m^*(T\cap E_n)$

证毕

注 3．2．3　条件$m^*T<+\infty$在于保证$m^*(T\cap E_n)<+\infty$(其实只须将条件削弱为$\exists\ m^*(T\cap E_{n_0})<+\infty$就足以保证结论成立)，从而可用推论3．1．3，故此条件不能随意去掉，见反例如下：

例3．2．1　$E_n=[n,+\infty]$，$T=(-\infty,+\infty)$，$m^*(T\cap E_n)=+\infty$，但$E=\phi$，故$m^*(T\cap E)=0\neq\lim_{n\to\infty} m^*(T\cap E_n)=+\infty$。

定理 3．2．9　若$m^*E=0$，则E可测。

证明　对任意T，$m^*T\leq m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE)=0+m^*(T\cap CE)\leq m^*T$

故$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE)$，即E可测。

证毕

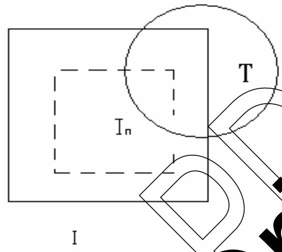
推论 3．2．4　一切可数集皆可测，且测度为 0。

证明　$E=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$，由外测度定义知：对任意 n

$m^*\{x_n\}=0$，所以单元素集$\{x_n\}$可测，由可列可加性知：E 可测，且测度为 0。

证毕

定理 3．2．1 0　区间 I 为可测集，且 $mI=|I|$。



证明　对任意 $\varepsilon=\frac{1}{n}>0$ 存在 $I_n \subseteq I$ 满足 $|I_n|>|I|-\frac{1}{n}$，且

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$，$d(I_n, CI)>0$，　任意 T，

$m^*T \geqslant m^*[(T\cap I_n)\cup(T\cap CI)]=m^*(T\cap I_n)+m^*(T\cap CI)$

又因为 $m^*(T\cap I) \leqslant m^*(T\cap I_n)+m^*[T\cap(I-I_n)]$，

$0 \leqslant m^*(T\cap I)-m^*(T\cap I_n)$

$\leqslant m^*[T\cap(I-I_n)] \leqslant |(I-I_n)| \to 0$

所以 $m^*(T\cap I_n) \to m^*(T\cap I)$　$(n\to+\infty)$

故　$m^*T \geqslant m^*(T\cap I)+m^*(T\cap CI)$

即 I 为可测集。

由定理 3.1.1 之 5）知　$mI=m^*I=|I|$.

证毕

推论 3.2.5　一切开集、闭集均为可测集；且当 G 为开集时，$mG=|G|$。

例 3.2.1　求 Cantor　G_0，P_0集的测度。

解　$mG_0=|G_0|=1$，$mP_0=m[0,1]-mG_0=1-1=0$。

此例说明：除了可数集一定测度为 0 以外，C 势集也有可能测度为 0。

§3.3　可测集的构造

教学目的　让学生理解由“一座空中楼阁”与“两个具体集合”的有机结合，可以表示出所有可测集合。本教材特殊处理：证可测集的笛卡尔积是可测集，为第四章证可测函数下放图形可测作准备。

本节重点　①可测集可以通过开集外包接近到所剩测度“要多小有多小”！通过G_δ型集外包接近到所剩测度为0。②可测集可以通过开集内填接近到所剩测度“要多小有多小”！通过F_σ型集内填接近到所剩测度为0。

本节难点　可测集的笛卡尔积是可测集。

定义 3.3.1　若 E 可以表成至多可列个闭集之并，则称 E 为F_σ型集；

若 E 可以表成至多可列个开集之交，则称 E 为G_δ型集；

若 E 可以看成由区间出发经至多可列次交并余差运算的结果，则称 E 为 Borel 集。

由开集与闭集的对偶性可直接得到F_σ型集与G_δ型集的对偶性:F 为 F_σ型集<=>CF 是G_δ型集,G 为 G_δ型集<=>CG 是F_σ型集。

证明留作习题。

推论 3.3.1：一切F_σ集、G_δ集、Borel 集均为可测集。

反过来，可测集不一定是 F_σ集、G_δ集、Borel 集但可以由这些集合来逼近，　下述三个定理将给出具体描述。

定理 3.3.1　以下三命题是等价的

1）E 可测

2）对任意 $\varepsilon>0$ 存在开集 G 满足 $G\supset E$，且 $m^*(G-E)<\varepsilon$。

3）存在 G_δ 集 G_0 满足 $G_0\supset E$，且 $m^*(G_0-E)=0$。

证明：1)=>2)因为 E 可测，若 $mE<+\infty$，对由外测度定义知，对任意 $\varepsilon>0$ 存在开集 $G\supset E$ 满足 $mG<mE+\varepsilon$，即 $m(G-E)<\varepsilon$；若 $mE=+\infty$，则存在 E_n 满足 $m^*E_n<+\infty$，且 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，对任意 $\varepsilon>0$ 存在开集 $O_n\supset E_n$ 满足 $mO_n<mE_n+\dfrac{\varepsilon}{2^n}$，令 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}O_n$，

则开集 $G\supset E$，从而 $m^*(G-E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}m^*(O_n-E_n)<\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$.

2)=>3) 对任意 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$ 存在开集 G_n 满足 $G_n\supset E$，且 $m^*(G_n-E)<\dfrac{1}{n}$，

令 $G_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ 则 G_0 为 G_δ 集，且 G_0 满足 $G_0\supset E$，且 $m^*(G_0-E)<m^*(G_n-E)$ $<\dfrac{1}{n}\to 0$，故 $m^*(G_0-E)=0$。

3)=>1) 因为存在 G_δ 集 G_0 满足 $G_0\supset E$，且 $m^*(G_0-E)=0$，所以 G_0-E 可测，从而 $E=G_0-(G_0-E)$ 可测。

证毕

利用 E 与 E^c 可测的等价性，开集与闭集、G_δ 集与 F_σ 的对偶性不难得到下述定理：

定理 3．3．2　以下三命题是等价的

1）E 可测

2）对任意 $\varepsilon>0$ 存在闭集 F 满足 $E\supseteq F$，且 $m^*(E-F)<\varepsilon$。

3）存在 F_σ 集 F_0 满足 $E\supseteq F_0$，且 $m^*(E-F_0)=0$。

证明留给读者。

将定理３．３．１与定理３．３．２相结合即得：

定理３．３．３　以下三命题是等价的

1）E 可测

2)对任意 ε＞0 存在开集 G,闭集 F 满足 F⊂E⊂G,且 m(G-F)＜ε。

3)存在 G_δ 集 G_0，F_σ 集满足 F_0⊂E⊂G_0，且 m(G_0-F_0)＝0。

定理３．３．４　若 A⊂R^p，B⊂R^q，且均可测，则 A×B＝｛(a,b)｜a∈A，b∈B｝⊂R^p×R^q 为可测集，且 m(A×B)＝mA×mB

证明　1)若区间 I_1⊂R^p，I_2⊂R^q，则显然 I_1×I_2 为 R^p×R^q 中的区间，从而可测。且|I_1×I_2|＝|I_1|×|I_2|。

2)若开集 G⊂R^p，O⊂R^q，则显然 G×O 为 R^p×R^q 中的开集，从而可测。

G＝$\bigcup_{n=1}^{\infty}$ G_n，O＝$\bigcup_{n=1}^{\infty}$ O_n，其中 G_n、O_n 分别为 R^p、R^q 中的左开右闭的互不相交的区间,则 G_n×O_m 为 R^p×R^q 中的左开右闭的互不相交的区间，且

G×O＝$\bigcup_{n=1}^{\infty}$ G_n×$\bigcup_{m=1}^{\infty}$ O_m＝$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}$ (G_n×O_m)，于是

m(G×O)＝$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}$ (mG_n×mO_m)

＝($\sum_{n=1}^{\infty}$ mG_n)×($\sum_{m=1}^{\infty}$ mO_m)＝mG×mO

3) 对一般可测集，且 mA＜+∞，mB＜+∞，A⊂R^p，B⊂R^q，则对任意 ε＞0，存在开集 G_A、G_B，闭集 F_A、F_A 满足 F_A⊂A⊂G_A，且

m(G_A-F_A)＜ε，F_B⊂B⊂G_B，且 m(G_B-F_B)＜ε，即存在

开集 G_A×G_B，闭集 F_A×F_B 满足 F_A×F_B⊂A×B⊂G_A×G_B，且

$$[(G_A\times G_B)-(F_A\times F_B)]\subset[(G_A-F_A)\times G_B]\cup[F_A\times(G_B-F_B)]$$

$$\subset[(G_A-F_A)\times G_B]\cup[G_A\times(G_B-F_B)]$$

这里$[(G_A\times G_B)-(F_A\times F_B)]$、$[(G_A-F_A)\times G_B]\cup[G_A\times(G_B-F_B)]$、$(G_A-F_A)$、$(G_B-F_B)$均为开集。

$$m[(G_A\times G_B)-(F_A\times F_B)]\leqslant m[(G_A-F_A)\times G_B]+m[G_A\times(G_B-F_B)]$$

$$<\varepsilon\times(mB+\varepsilon)+(mA+\varepsilon)\times\varepsilon=\alpha(\varepsilon)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$$

由ε的任意性和定理3．3．3的2〕知：A×B可测。

而$m(A\times B)\leqslant m(G_A\times G_B)=mG_A\times mG_B\leqslant(mA+\varepsilon)(mB+\varepsilon)$，

由ε的任意性知$m(A\times B)\leqslant mA\times mB$。同理，因为$A\times B\supset F_A\times F_B$，所以

$$m(A\times B)\geqslant m(F_A\times F_B)\geqslant m[(G_A\times G_B)]-\alpha(\varepsilon)$$

$$=mG_A\times mG_B-\alpha(\varepsilon)\geqslant mA\times mB-\alpha(\varepsilon),$$

由ε的任意性知$m(A\times B)\geqslant mA\times mB$，故$m(A\times B)=mA\times mB$。

4) 当mA、mB至少有一个无限时，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$，其中$mA_n<+\infty$，$mB_n<+\infty$，仿2)即可证明结论成立。

证毕

第三章　习　题

1. 证明若E有界，则$m^*E<+\infty$。

2. 证明可数集的外测度为0。

3. 设 E 是直线上一有界集，$m^*E>0$，则对满足 $0<c<m^*E$ 的任意 c，恒 $\exists$ $E_0\subseteq E$ 满足 $m^*E_0=c$.（其实去掉条件“E 是直线上一有界集”后，命题仍成立）。

4. 设 $S_1,S_2,\ldots,S_n$ 是一些互不相交的可测集合，$E_i\subseteq S_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$

求证 $$m^*(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)=\sum_{i=1}^{n}m^*E_i$$

5. 证明：F 为 F_σ 型集 $\Leftrightarrow$ CF 是 G_δ 型集，G 为 G_δ 型集 $\Leftrightarrow$ CG 是 F_σ 型集。

6. 证明：开集、闭集均既是 F_σ 型集又是 G_δ 型集。

7. 验证：$(0,1]$ 既是 F_σ 型集，又是 G_δ 型集。有理数集只 F_σ 型集而不是 G_δ 型集，无理数集是 G_δ 型集而不是 F_σ 型集。

8. 证明直线上所有可测集合作成集合类的基数等于直线上所有集合类的基数。

9. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}m^*E_n<+\infty$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n$ 为可测集，且 $m(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n)=0$