第二章　　点　　集

本章基本内容：先介绍 R^n 中的距离、极限、邻域、区间及其体积等基本概念，然后定义了内点、聚点、外点、边界点、开集、闭集等特殊的点和集。介绍了聚点原理、有限覆盖定理、距离可达定理、隔离性定理。最后讨论了开集与闭集的构造及其性质，并规定了开集的体积。

§2.1　R^n 空间

教学目的　使学生了解 $\boldsymbol{R}^n$ 点集的直径，区间概念，掌握区间体积的计算方法。

本节重点　距离空间、距离概念，$\boldsymbol{R}^n$ 的几种常见距离规定方法，$\boldsymbol{R}^n$ 点集的直径、区间的定义及其计算方法。

本节难点　高维空间的区间及其体积计算公式。突破办法是奖投 1，2，3 维的几何直观意义。低维公式与高维公式中取 $n=1,2,3$ 时的统一性。

数学分析中的极限概念是以距离为基础的，由此可见，距离是一相当重要的概念，在高等代数中已对 R^n 规定过距离，且有以下三种：

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)\in R^n$

$$d_1(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d_2(x,y)=\max_{1\le i\le n}|\xi_i-\eta_i|$$

$$d_3(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|$$

距离的定义方法可以是多种多样的，甚至对抽象的集合也可以规定距离，但必须满足常识性的两点基本要求：距离不能为负，两边之和不小于第三边。用公理化形式表述如下：

定义２．１．１ 设 X 是一非空集合，且存在 d：X×X→[0,∞)满足

1) $d(x,y)\geqslant 0$，且 $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ （正定性）

2) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$ （三角不等式）

则称(X,d)为度量空间或距离空间，X 中的元素称为点，d(x,y)为点 x,y 之间的距离。

注２．１．１ “往返距离相等”的基本要求，也隐含在上述定义之中了。事实上，$d(x,y)\leqslant d(x,x)+d(y,x)=d(y,x)$，同理 $d(y,x)\leqslant d(x,y)$，故

$$d(x,y)=d(y,x)$$

上述 R^n 按所规定的三种距离都分别成为距离空间（高代已验证过满足 1)，2))。

例２．１．１ $\ell^2=\left\{ (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_i,\ldots) \mid \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2<+\infty \right\}$

按 $d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ 成为距离空间. 其中

$x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n,\ldots)\in\ell^2$

满足 1)显然，对 2)只须验证对任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots)$，

$y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n,\ldots)$，$z=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n,\ldots)$有

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

事实上，由 R^n 中的三角不等式:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

令 n→＋∞即得所证不等式。

例2．1．2　C[a,b]按 $d(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$成为距离空间。容易验证它满足距离条件1)、2)。

有了距离概念就可以仿照数学分析定义数列极限那样定义点列极限了。

定义2．1．2　设 $P_m\in R^n$ (m=1,2,3,...),如果 $\lim\limits_{m\to\infty} d(P_m,P_0)=0$，则称点列$\{P_m\}$收敛于$P_0$，记为 $\lim\limits_{m\to\infty} P_m=P_0$，或 $P_m\to P_0$ $(m\to+\infty)$。

显然 $\lim\limits_{m\to\infty} P_m=P_0 \Leftrightarrow$ 对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists N$，当 m>N 时 $d(P_m,P_0)<\varepsilon$。

在距离空间(R^n,d_1)中 $P_m\to P_0$ $(m\to+\infty)$ $\Leftrightarrow x_k^{(m)}\to x_k^{(0)}$ $(m\to+\infty)$，k=1,2,...,n，其中 $P_m=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\ldots,x_n^{(m)})$，$P_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$.

同样可以利用邻域来描述极限，为此，先引入邻域概念。

定义2．1．3　称集合$\{P|d(P,P_0)<\delta\}$为P_0的δ邻域，并记为$U(P_0,\delta)$。P_0称为邻域的中心，δ称为邻域的半径。在不需要特别指出是什么样的半径时，也简称为P_0的邻域，并记为$U(P_0)$。

在 R^n (n=1,2,3)中，距离按 d_1定义时，所谓以P_0为中心，δ为半径的邻域分别是P_0为中点、2δ为长度的开区间；P_0为圆心、δ为半径的开圆；P_0为球心、δ为半径的开球。但距离按d_2定义时，所谓以P_0为中心，δ为半径的邻域分别是P_0为中点、2δ为长度的开区间，P_0为正方形中心、2δ为边长的开正方形，P_0为正方体中心，2δ为边长的开正方体。

不难看出：点列$\{P_m\}$收敛于P_0的充分必要条件是对任意$\varepsilon>0$，存在N，当m>N时有：$P_m\in U(P_0)$。

容易验证邻域具有下面的基本性质：

1)　$p\in U(P)$；

2）　对于$\forall U(P_1)$和$U(P_2)$，　如果存在$P\in U_1(P)\cap U_2(P)$

　　则存在$U_3(P)\subseteq U_1(P)\cap U_2(P)$；

3）　对于$\forall Q\in U(P)$，存在$U(Q)\subseteq U(P)$；

4）　对于$\forall Q\neq P$，存在$U(Q)$和$U(P)$满足$U(Q)\cap U(P)=\phi$

定义２．１．４　两个非空的点集A、B间的距离定义为

$$d(A,B)=\inf_{p\in A,q\in B} d(P,Q)$$

如果A、B中至少有一个是空集，则规定$d(A,B)=0$；若$B=\{x\}$，则记$d(A,B)=d(A,x)$。

显然，若$A\cap B\neq\phi$，则$d(A,B)=0$。

定义２．１．５　一个非空的点集E的直径定义为

$$\delta(E)=\sup_{p,q\in E} d(P,Q)$$

当$E=\phi$时，规定$\delta(\phi)=0$。显然，$\delta(E)=0\Leftrightarrow E$至多只有一个元素。

若$\delta(E)<+\infty$，则称E为有界集。

定义２．１．６　称$\{(x_1,x_2,...,x_n)\mid x_i\in A_i, i=1,2,...,n\}$为集合$A_i$的直积，记为$A_1\times A_2\times...\times A_n$或$\prod_{i=1}^{n}A_i$。

定义２．１．６　若$I=\prod_{i=1}^{n}I_i$，其中$I_i=\langle a_i,b_i\rangle$为直线上的区间，则称I为n维欧氏空间$R^n$中的区间；如果所有$I_i$都是开(闭、左开右闭、左闭右开)区间，则称I是开(闭、左开右闭、左闭右开)区间。如果所有的I_i都是直线上的有界区间，则称I是R^n中的有界区间；如果至少有一个I_i是直线上的无界区间，则称I是R^n中的无界区间。

注２．１．２　R^2中的有界区间即矩形，R^3中的区间即长方体，因此R^n中的区间有时也称为“长方体”。

显然：E为有界集的充要条件是存在有界区间$I\supset E$，或

E为有界集的充要条件是存在有界邻域$E_0\subset U(x_0,\delta)$。

定义 2.1.7　$I=\prod_{i=1}^{n} I_i$，其中 $I_i=\langle a_i, b_i\rangle$，称 $|I|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ 为区间 I 的“体积”，即 $|I|=\prod_{i=1}^{n}|I_i|$。当然，这里须约定 $0\times\infty=\infty\times 0=0$，当 $a\neq 0$ 时，$a\times\infty=\infty\times a=\infty$。

注 2.1.3　R^1 中的区间体积即区间的长度，R^2 中的区间体积即矩形面积=长×宽，R^3 中的区间体积即长方体体积=长×宽×高，因此规定 R^n 中的区间体积=n 个边长的乘积，既是合理的又是自然的。

§2.2　几类特殊点和集

教学目的　本节通过对欧氏空间中若干特殊点（内点、外点、边界点、聚点，接触点）与特殊集合（开集、闭集、G_δ 型集 F_σ 型集，Borel集）的概念的讨论，为本门课程后面学习可测集的分解、学习《泛函分析》、《拓扑学》相关概念打下基础。

本节重点　开集、闭集的定义，性质，开集与闭集之间的对偶关系。

本节难点　任何集合的导集是闭集，任何集合的开核是开集。通过多种例子表明内核中的每一点都是内核之内核的点，让学生先直观接受再慢慢消化。

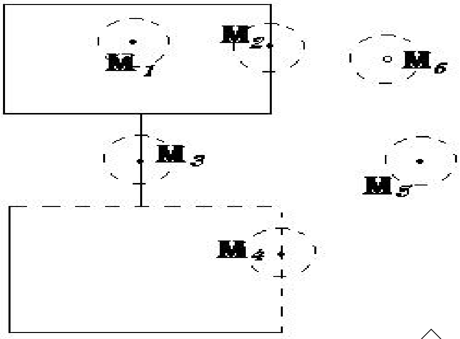
本节抓住直线上的开区间、闭区间及其点的基本性质，予以一般化。

对于 $E\subseteq R^n$，我们可以通过看是否有 x 的完整邻域含于 E 中将 R^n 中点 x 分为三类：

$$\begin{cases}(a).\ \exists U(x,\delta)\text{满足}U(x,\delta)\subseteq E\\(b).\ \forall U(x,\delta)\text{满足}U(x,\delta)\cap E\neq\Phi, U(x,\delta)\cap CE\neq\Phi\\(c).\ \exists U(x,\delta)\text{满足}U(x,\delta)\subseteq CE\end{cases}$$

定义 2.2.1　我们称(a)类点为 E 的内点，记其全体为 E^0；(b)类点为 E 的边界点，记其全体为 ∂E；(c)类点为 E 的外点。

显然外点全体为 $(CE)^0$，$R^n=E^0\cup\partial E\cup(CE)^0$



（图２．２．１）

如图２．２．１所示：M_1是E的内点，M_2、M_3、M_4、M_5是E的边界点，M_6是E的外点。

注２．２．１： E 的边界点既有可能属于E(如M_2、M_3、M_5)，又有可能不属于E(如M_4)。

注２．２．２： E 的边界与CE的边界相同，即$\partial E=\partial(CE)$

注２．２．３： 不要受“[a,b]的边界只有 a,b 两点 ”这个具体结论的直观约束，而得出错误的结论：“E 的边界∂E相对集合E而言只是很少一部分”。事实上，直线上的有理数全体的边界是整个实数集。

对∀ E $\subseteq R^n$，我们也可以通过看 x 的邻域含 E 中点的多少将 R^n 中点 x 分为三类：

$$\begin{cases}(e).\ 对\forall\delta>0, U(x,\delta)\cap E-\{x\}\neq\Phi\\ (f).\exists U(x,\delta)满足U(x,\delta)\cap E=\{x\}\\ (g).\exists U(x,\delta)满足U(x,\delta)\cap E=\Phi\quad(显然此类点即外点)\end{cases}$$

定义２．２．２　我们称（e）类点为 E 的聚点(或极限点)，记其全体为E'，并称为E的导集；（f）类点为E的孤立点，显然其全体为E-E'。

即R^n＝E'∪(E- E')∪$(CE)^0$

在图２．２．１中，M_1 、M_2、M_3、M_4是E的极限点，M_5是E的孤立点。

按第一种分类法的内点，是第二种分类法的聚点，按第一种分类法的边界点，既有可能是按第二种分类法的聚点（如M_2、M_3、M_4），又有可能是按

第二种分类法的孤立点如 M_5。同样按第二种分类法的孤立点，是第一种分类法的边界点，按第二种分类法的聚点，既有可能是按第一种分类法的内点（如 M_1），又有可能是边界点（如 M_2、M_3、M_4）。对外点而言，两类分类方法所指的概念是完全一致的。

“极限点”中的“极限”二字体现在何处，“聚点”中的“聚”字体现在哪里呢？下述两个定理将对此作出解释。

定理２．２．９： $x\in E' \Leftrightarrow \exists$ 互异点列 $x_n \in E$，$x_n \neq x$，且 $x_n \to x\ (n\to +\infty)$

证明　“$\Rightarrow$”因为 $x\in E'$，所以对 $\delta_n = \min\{\frac{1}{n}, d(x, x_{n-1})\}$，存在 $x_n \in U(x,\delta_n)\cap E-\{x\}$，显然 $x_n\in E$ 互异，$x_n\neq x$，且 $x_n\to x\ (n\to+\infty)$。

“$\Leftarrow$”若 $\exists$ $x\in E$，且 $x_n\neq x$，但 $x_n\to x\ (n\to+\infty)$，则对任意 $\delta>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，$x_n\in U(x,\delta)\cap E-\{x\}$，故 $x\in E'$。

证毕

即之所以称 x 为 E 的“极限点”的原因是：x 可以表成 E 中一串异于 x 的点列 x_n 的极限。

定理２．２．１０ $x\in E' \Leftrightarrow \forall\ \delta>0$，$U(x,\delta)\cap E$ 为无限集。

证明　“$\Leftarrow$”显然。

“$\Rightarrow$”因为 $x\in E'$，所以 $\exists$ $x_n\in E$，且 $x_n\neq x$，但 $x_n\to x\ (n\to+\infty)$，则对任意 $\delta>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，$x_n\in U(x,\delta)\cap E-\{x\}$，故 $U(x,\delta)\cap E$ 为无限集。

证毕

即之所以称 x 为 E 的“聚点”的原因是：在 x 的任意一个小邻域内都“聚集”着 E 的无限多个点。

定义２．２．３ 若对 $\forall\ \delta>0$，$U(x,\delta)\cap E\neq\Phi$，则称 x 为 E 的接触点。接触点全体记为 $\bar{E}$，并称 $\bar{E}$ 为 E 的闭包。

显然，$\bar{E} = E^0\cup\partial E = E'\cup\{x\mid x \text{ 为 } E \text{ 的孤立点}\} = E'\cup\partial E$

$=E'\cup E=E\cup\partial E=c(cE)^{0}$

在数学分析中要看一个区间 I 是开或闭，只须看它是否将作为边界的两个端点包含在内，对于 R^n 中一般的集合 G 是开或闭，也可以只看是否包含边界集，于是我们给出如下定义。

定义２．２．４ 若$\partial E\cap E=\phi$，则称 E 为开集；若$\partial E\subseteq E$，则称 E 为闭集。

开集与闭集这两个概念既不矛盾，又不互补。

例２．２．１：直线上的开区间，平面上的开圆盘皆为开集，直线上的闭区间，平面上的闭圆盘皆为闭集。(a,b]既不是开集，又不是闭集，全直线既是开集又是闭集。

定理２．２．１　1) E 为开集<=>$E\subseteq E^0$

2) E 为闭集<=>$E'\subseteq E$

证明　1)“=>”因为 E 开，所以$\partial E\cap E=\phi$，故$E\subseteq E^0$

“<=”因为$E\subseteq E^0$，所以$\partial E\cap E=\phi$，故 E 为开集。

2)“=>”因为 E 为闭集，所以$\partial E\subseteq E$，而$E'\subseteq\partial E\cup E\subseteq E$，从而$E'\subseteq E$；

“<=”若$E'\subseteq E$，则$\partial E\subseteq E'\cup\{x|x$ 为 E 的孤立点$\}\subseteq E$，故 E 是闭集。

定理２．２．２　对$\forall\ E\subseteq R^n$，E^0为开集。

证明　对$\forall\ x\in E^0$，$\exists\delta>0$，$U(x,\delta)\subset E$，对$\forall\ y\in U(x,\delta)$，$\exists\ \delta_1=\delta-d(x,y)>0$，对$\forall\ z\in U(y,\delta_1)$，$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)<\delta$，即$Z\in U(y,\delta_1)\subseteq U(x,\delta)\subseteq E$，即$y\in E^0$，从而$U(x,\delta)\subseteq E^0$，即$E^0\subseteq(E^0)^0$，故$E^0$是开集。

定理２．２．３：(开集与闭集的对偶性) 1)若 E 为开集，则 CE 为闭集；2)若 E 为闭集，则 CE 为开集。

证明 1) 因为 E 是开集，所以$\partial E\cap E=\phi$，则$\partial E=\partial CE\subseteq CE$，故 CE 是闭集。

2) 因为 E 是闭集，所以$\partial E\subseteq E$，而$\partial E=\partial CE$，$CE\cap\partial CE=\phi$，故 CE 是开集。

证毕

定理２．２．４　　1)R^n、ϕ是开集

2)任意有限个开集之交是开集

3)任意多个开集之并是开集

证明：1)、3)显然

2)设 E_i 为开集$(i=1,2,3,...,n)$，对任意 $x\in\bigcap_{i=1}^{n} E_i$，则 x 为每一个 E_i 的内点，即存在 δ_i 满足 $U(x,\delta_i)\subseteq E_i$，令 $\delta=\min_{1\le i\le n}\delta_i$，则 $U(x,\delta)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n} E_i$，即 x 为 $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ 的内点，故 $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ 为开集。若 $\bigcap_{i=1}^{n} E_i=\phi$，则 $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ 也是开集。

证毕

注２．２．４： 不仅 R^n 中开集具有以上三性质，一般距离空间也有此性质，在拓扑空间中以上三性质则是描述开集概念的三公理。

定理２．２．５：　1) R^n、ϕ是闭集

2) 任意有限个闭集之并是闭集

3) 任意多个闭集之交是闭集

证明：1) 显然

2)要证 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 是闭集，只须证 $C\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 是开集，而 $c\bigcup_{i=1}^{n} E_i=\bigcap_{i=1}^{n} cE_i$ 因为 E_i 是闭集，所以由定理２．２．３知 cE_i 是开集，$\bigcap_{i=1}^{n} cE_i$ 是开集，故 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 是闭集。

3)同理可证。

证毕。

因为 E^0、$(CE)^0$ 开，所以 $\partial E = C[E^0 \cup (CE)^0]$ 闭集。

定理２．２．６： 对任意集合 E，$\bar{E}$ 是闭集。

证明：由 $\bar{E} = C[(CE)^0]$ 即得。

证毕

定理２．２．７： E 为闭集 <=> $E = \bar{E}$

证明 “<=” 由定理２．２．６即得。

“=>” 因为 E 是闭集，所以 $\partial E \subseteq E$，即 $E = \partial E \cup E = \bar{E}$。

证毕

定义２．２．５ 若 $E \subseteq E'$，则称 E 为自密集；若 $E' = E$ 则称 E 为完备集。显然，自密集即是没有孤立点的集合，完备集即是没有孤立点的闭集。

定理２．２．８ 对 $\forall\ E \subseteq R^n$，E' 为闭集。

证明 只须证 $G = C(E')$ 是开集，事实上：对 $\forall\, x \in C(E') = G$，即 $x \notin E'$，则 $\exists\ \delta > 0$ 满足 $U(x, \delta) \cap E' - \{x\} = \phi$，对 $\forall\, y \in U(x, \delta)\ (y \neq x)$，$\exists$ $\delta_1 = \min\{\delta - d(x, y),\ d(x, y)\} > 0$，$U(y, \delta_1) \subseteq U(x, \delta)$ 满足 $U(y, \delta) \cap E' - \{y\} = \phi$，即 $y \notin E'$，所以 $y \in CE' = G$，即 $U(x, \delta) \subseteq G$，故 G 是开集，从而 E' 为闭集。

证毕

§２．３　有限覆盖定理与隔离性定理

教学目的 本节将《数学分析》在一维空间中已经证明的有限覆盖定理和聚点原理推广到高维情形,一是为证区间外测度刚好为区间体积时作准备，二是为学习《泛函分析》中的全有界，自列紧和《拓扑学》中紧集性质讨论作铺垫。

本节重点 有限覆盖定理的内容、表述、应用于隔离性定理、闭集间的距离可达定理证明。

本节难点 引理２.３.１ (Lindloff可列覆盖定理)的证明。

是否每一个集合都有极限点呢？不一定，但适当增加条件后可以的！

定理２．３．１　(Weierstrass 聚点原理) 设 E 为 R^n 中有界无限集，则 $E'\neq\Phi$。

证明　取互异点列 $M_k=(x_1^k,x_2^k,...,x_n^k)\in E$，由于 E 有界，所以 $\{M_k \mid k=1,2,...\}$ 有界，从而 $\{x_1^k \mid k=1,2,...,...\}$ 是有界集，由数学分析中已证明的直线上的聚点原理知：$\exists$ x_1^0 及 x_1^k 的子列 $x_1^{k_{i_1}}\to x_1^0$。这时 $M_{k_{i_1}}$ 满足第一个坐标收敛，对于第二个坐标 $x_2^{k_{i_1}}$ 可能不收敛，但有界，由直线上的聚点原理知：$\exists$ x_2^0 及 $x_2^{k_{i_1}}$ 的子列 $x_2^{k_{i_1 i_2}}\to x_2^0$，则 $M_{k_{\ell_1 i_2}}$ 满足第一、第二坐标收敛。此过程继续作下去，第 n 次找到的子列 $M_{k_{\ell_1 i_2 \dots i_n}}$ 便满足所有坐标都收敛，即 $M_{k_{\ell_1 i_2 \dots i_n}}\to M_0$。其中 $M_0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$，即 M_0 为 E 中的聚点。

证毕

推论２．３．１　有界点列必有收敛子列。

作为聚点原理的应用，可以证明著名的 Borel 有限覆盖定理和距离可达定理。

定理２．３．２　(Borel 有限覆盖定理) 设开集族 $\{U_\alpha \mid \alpha\in I\}$ 是一有界闭集 F 的覆盖，即 $F\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ 则在此开集族中存在有限个开集 $\{U_{\alpha_i} \mid i=1,2,...,n\}$ 同样覆盖 F，即 $F\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}$

我们退而求其次，暂不证存在有限覆盖，先证存在可数覆盖。

引理２．３．１　(Lindloff 可列覆盖定理)：设开集族 $\{U_\alpha \mid \alpha\in I\}$(这里 I 至少为可数集)是 R^n 中一有界闭集 F 的覆盖，即 $F\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$，则存在其中的可数个开集同样覆盖 F，即 $F\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}U_{\alpha_i}$

证明　对任意 $x\in F$，存在 U_{α_x} 满足 $x\in U_{\alpha_x}$，而对 U_{α_x} 存在有理坐标

点 p_x， 及有理半径 r_x 满足 $x\in U(p_x，r_x)\subseteq U_{\alpha_x}$，事实上，$\exists\delta>0$，

$U(x，\delta)\subseteq U_{\alpha_x}$，取有理坐标点 $p_x\in U(x，\dfrac{\delta}{3})$， $r_x<\dfrac{2\delta}{3}$ 即可。

由定理1．2．6知：$\{U(p_x，r_x)|p_x，r_x\in Q,x\in F\}$ 全体为至多可数集。从而可以简记为 U_i，由 $U(p_x，r_x)$ 的选取方法可知：存在相应的 U_{α_i} 满足 $U_i\subseteq U_{\alpha_i}$，于是 $F\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}U_{\alpha_i}$.

证毕

定理2．3．2的证明： 即在已知

$$F\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$$

的条件下证存在 n 满足

$$F\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}U_i$$

若不然，则对任意 n，存在 x_n 满足 $x_n\in F-\bigcup_{i=1}^{n}U_i$，由聚点原理知存在 x_0 及 x_{n_i} 满足 $x_{n_i}\to x_0$（$n_i\to\infty$），又因为 F 是闭集所以 $x_0\in F$，从而存在 U_{i_0} 满足 $x_0\in U_{i_0}$，于是存在 M，当 $n_i>M$ 时有 $x_{n_i}\in U_{i_0}$；另一方面，由 x_{n_i} 的选取法可知，对任意 $n_i>i_0$，$x_{n_i}\notin U_{i_0}$，矛盾。

证毕

定理2．3．3　（闭集间的距离可达定理）设 A、B 为互不相交的非空闭集，且至少有一个有界，则存在 $x_0\in A$，$y_0\in B$ 使得 $d(x_0,y_0)=d(A,B)>0$。

证明　由集合距离的定义知：存在 $x_n\in A$，$y_n\in B$ 使得

$d(A,B)<d(x_n,y_n)<d(A,B)+\dfrac{1}{n}$，不妨假定 A 有界由聚点原理知存在 x_0 及

x_{n_i} 满足 $x_{n_i}\to x_0\in A$，因为

$$d(x_0,y_{n_i})<d(x_0,x_{n_i})+d(x_{n_i},y_{n_i})<d(x_0,x_{n_i})+d(A,B)+\frac{1}{n_i},$$

所以这时 $\{y_{n_i}\}$ 有界，又由聚点原理知存在 y_0 及 $y_{n_{ij}}$ 满足 $y_{n_{ij}}\to y_0$，于是存在 $x_0\in A$，$y_0\in B$ 使得 $d(x_0,y_0)\le d(A,B)$，故 $d(x_0,y_0)=d(A,B)$。

证毕

推论 2．3．2　设 A 为非空闭集,则对 $\forall\ x\in R^n$，$\exists\ x_0\in A$ 满足 $d(x,A)=d(x,x_0)$.

证明　若 $x\in A$，取 $x_0=x\in A$ 即可。若 $x\notin A$，令 $B=\{x\}$ 有界闭，由定理 2．3．3 即得。

证毕

定义 2．3．1　设 A、$B\subseteq R^n$，若存在开集 U_1，U_2 满足 $U_1\cap U_2=\phi$，且 $A\subseteq U_1$，$B\subseteq U_2$，则称 A、B 是可隔离的。

定理 2．3．4（隔离性定理）A、B 是可隔离的 $\Leftrightarrow \overline{A}\cap B=\phi$，$A\cap\overline{B}=\phi$.

证明　"$\Rightarrow$" 反证：若不然，不妨假定 $\exists\ x_0\in\overline{A}\cap B$，由于 A、B 是可隔离的，所以存在开集 U_1，U_2 满足 $U_1\cap U_2=\phi$，且 $A\subseteq U_1$，$B\subseteq U_2$，由 $x_0\in B$ 得 $x_0\in U_2$，而 $x_0\in\overline{A}$，则存在点列 $x_n\in A\subseteq U_1$ 满足 $x_n\to x_0$，因为 $x_0\in U_2$ 且 U_2 开，所以 $\exists\ N$ 当 $n>N$ 时 $x_n\in U_2$，这与 $U_1\cap U_2=\phi$ 相矛盾，故 $\overline{A}\cap B=\phi$，同理 $A\cap\overline{B}=\phi$。

"$\Leftarrow$" 因为 $A\cap\overline{B}=\phi$，$\overline{A}\cap B=\phi$，所以由推论 2．3．2 知：对 $\forall\ x$

$\in A$ 有 $r_x = d(x, \bar{B}) > 0$，$\forall y \in B$ 有 $r_y = d(\bar{A}, y) > 0$，于是令，

$U_1 = \bigcup_{x \in A} U(x, \frac{r_x}{2})$，$U_2 = \bigcup_{y \in B} U(y, \frac{r_y}{2})$，则 U_1、U_2 是开集，且 $A \subseteq U_1$，$B \subseteq U_2$ 剩下的只须证：$U_1 \cap U_2 = \phi$。

若不然，$\exists\ z \in U_1 \cap U_2$，则 $\exists\ x_0 \in A$，$y_0 \in B$ $d(z, x_0) < \frac{r_{x_0}}{2}$，

$d(z, y_0) < \frac{r_{y_0}}{2}$，不妨设 $r_{x_0} = \max\{r_{x_0}, r_{y_0}\}$，

则 $r_{x_0} = d(x_0, \bar{B}) \leq d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(z, y_0) < r_{x_0}$，矛盾。

证毕

推论 2．3．3　若 A、B 均为闭集，且 $A \cap B = \phi$，则 $\exists$ 开集 U_1，U_2 满足 $U_1 \cap U_2 = \phi$，且 $A \subseteq U_1$，$B \subseteq U_2$。

推论 2．3．4　若 $d(A, B) > 0$，则 $\exists$ 开集 U_1，U_2 满足 $U_1 \cap U_2 = \phi$，且 $A \subseteq U_1$，$B \subseteq U_2$。

§2．4　开集的构造及其体积

教学目的　让学生理解直线上开集虽然不一定是开集，但无非只是至多可数个互不相交的开区间之并而已，由开集构造。尽管高维空间要复杂一些，也无非只是将“开”改为“左开由闭”而已，但表达方式不再唯一。理解几个直线上常见的特殊开集、闭集，熟悉构造方法，掌握基本性质，并能运用它作为反例。规定开集的“体积”且证明与表示法无关。

本节重点：直线上开集、闭集、完备集的构造。

本节难点：高维空间中开集的“体积”与表达方式无关。

开区间是开集，开集不一定是开区间，但开集与开区间有着密切联系。

定义 2．4．1　设 G 为直线上的开集，如果 $(a,b) \subseteq G$，且 $a, b \notin G$，则称 (a, b) 为 G 的构成区间。这里 a，b 可以为 $\pm\infty$。

定理２．４．１　设 G 为直线上的非空开集，则 G 可表为至多可数个互不相交的构成区间的并。反过来，若非空开集 G 已表为至多可数个互不相交的开区间的并，则这些区间为 G 的构成区间。

证明　1^0 G 的任意两个构成区间要么互不相交，要么完全重合。事实上，若(a_1,b_1)与(a_2,b_2)为 G 的两个不同的构成区间，不妨设 $a_1<a_2$，则必然有 $b_1\leq a_2$，否则，$a_1<a_2<b_1$，即 $a_2\in(a_1,b_1)\subset G$，另一方面，(a_2,b_2)是构成区间，则 $a_2\notin G$，矛盾。

2^0 对任意 $x\in G$，由开集的定义知：存在(α,β)满足 $x\in(\alpha,\beta)\subset G$，并将α尽可能往左移，移到第一次出现 $\alpha_x\notin G$ 为止，将β尽可能往右移，移到第一次出现 $\beta_x\notin G$ 为止，即令

$$\alpha_x=\inf\{\alpha\mid x\in(\alpha,\beta)\subset G\},\quad \beta_x=\sup\{\beta\mid x\in(\alpha,\beta)\subset G\}$$

便得到构成区间(α_x,β_x)。

事实上，对任意 y 满足 $\alpha_x<y<x$，存在α满足 $\alpha_x\leq\alpha<y<x<\beta$，且$(\alpha,\beta)\subset G$，故 $y\in G$，同理对任意满足 $x<y<\beta_x$ 有 $y\in G$，即$(\alpha_x,\beta_x)\subset G$。还可证 α_x，$\beta_x\notin G$，若不然，不妨假定 $\alpha_x\in G$，则存在 $\delta>0$，$(\alpha_x-\delta,\alpha_x+\delta)\subset G$，于是$(\alpha_x-\delta,\beta)\subset G$，这与 α_x 的定义相矛盾，故 $\alpha_x\notin G$，同理 $\beta_x\notin G$。

3^0　$G=\bigcup\limits_{x\in G}(\alpha_x,\beta_x)$ 由 1^0 知构成区间至多可数，从而

$$G=\bigcup_{i\in I}(\alpha_i,\beta_i)\ (I 至多可数)$$

4^0　若已知 $G=\bigcup\limits_{i\in I}(\alpha_i,\beta_i)$（I 至多可数），且其中$(\alpha_i,\beta_i)$互不

相交，则α_i，$\beta_i \notin G$（$i=1$，2,…），若不然，则存在$\alpha_{i_0}\in G$，那么必存(α_{i_1}，β_{i_1})满足$\alpha_{i_0}\in(\alpha_{i_1}$，$\beta_{i_1})$， 这与已知它们互不相交矛盾，故($\alpha_i$，$\beta_i$)为`G 的构成区间。

证毕

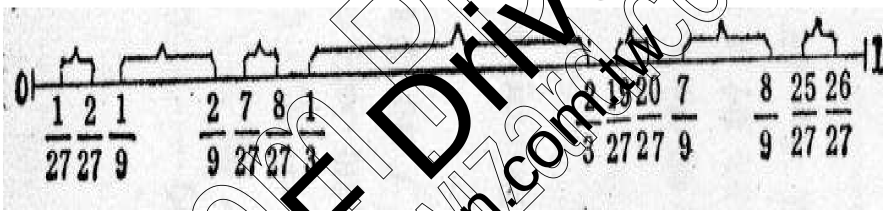
定理２．４．２　直线上闭集或是全直线或是从直线上挖去至多可数个互不相交的开区间后剩下的集。

我们将所挖去的开区间称为该闭集的余区间。

由于直线上闭集的孤立点，就是二余区间的公共端点。于是有

定理２．４．３　直线上的完备集或是全直线或是从直线上挖去至多可数个互不相交的、且无公共端点的开区间后剩下的集。

例２．４．１　设 Cantor　G_0，P_0集是按下述方法作出的集合。



第一步：将[0,1]三等分，挖去中间一个开区间，剩下两个闭区间；

第二步：将第一步所剩两个区间各自三等分，并分别挖去各自的中间一个开区间，剩下 4 个闭区间；

...　　　　...　　　　...　　　　...

第 n 步：将第 n−1 步所剩 2^{n-1}区间各自三等分，并分别挖去各自的中间一个开区间，剩下 2^n 个闭区间；

...　　　　...　　　　...

各步挖区的所有区间之并记为 G_0，最后剩下的集合记为 P_0.

显然，G_0是开集，P_0是闭集。一方面，由于 G_0中各区间相互无共同端点，且与$(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$也无共同端点，即 P_0无任何孤立点，故 P_0是完备集。由于第 n 次所剩区间长度为$\dfrac{1}{3^n}\to 0$，故 P_0不可能含有任何内点。

关于 P_0 不含有内点，在直觉上容易接受。但 P_0 无孤立点，却难于被初学者理解.不少人的直觉是：“随着挖的次数增多，剩下的集合越来越零散，最后将只剩一些孤零零的区间端点”。为此，我们从集合势的角度展示：P_0 集是 C 势集， 远远不止仅有 G_0 中可数个构成区间的端点。

定理２．４．４ P_0 是 C 势集。

证明 (1) P_0 集是三进制[0,1]中那些可以不用数字 1 表示的数全体 (事实上，第一次挖去的区间正是第一位小数必须出现数字 1 的小数全体，第二次挖去的区间正是第二位小数必须出现数字 1 的小数全体，第 n 次挖去的区间正是第 n 位小数必须出现数字 1 的小数全体，这里 0.1 因在三进制中可通过表成数字 2 的无限循环小数 0.2222.....即可回避用数字 1，而被保留下来，其他数同理)。也就是说：P_0 集中的数用三进制表示时具有如下形式：$x=0.a_1a_2...a_n...$ 其中 a_n 要么为 0，要么为 2。

(2) 令 $f:x=0.a_1a_2...a_n...\to y=0.b_1b_2...b_n...$

其中 $b_n=\begin{cases}0 & a_n=0\\ 1 & a_n=2\end{cases}$，则 f 是三进制表示的 P_0 集与二进制表示的[0,1]之间的一一对应，即 P_0 集势为 C。

证毕

对于二维及其多维空间的情形，有下述一般性的结论：

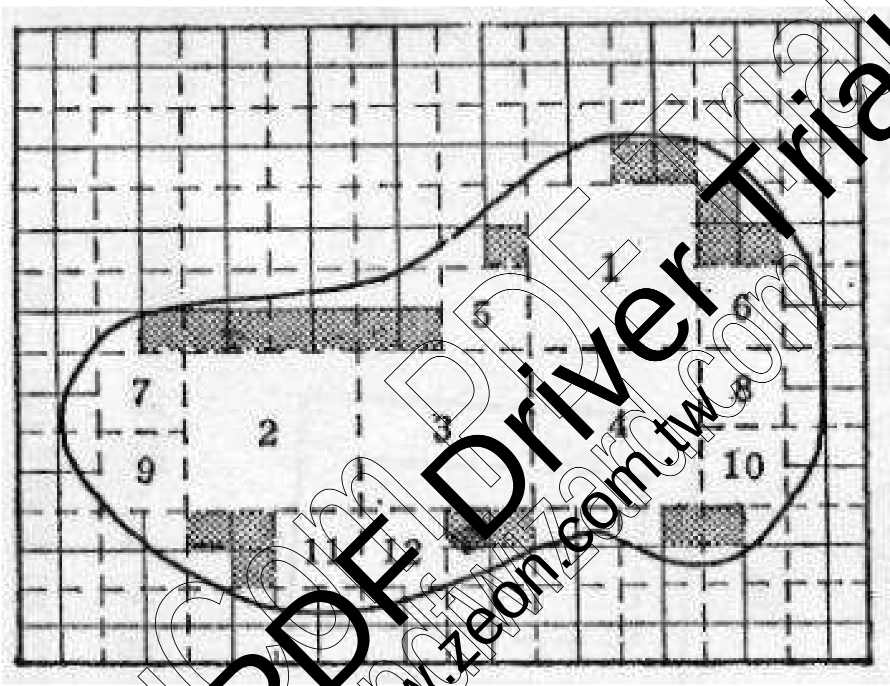
定理２．４．５ 设非空开集 $G\subseteq R^n$，则 G 可以表成可数个互不相交的左开右闭的半开半闭区间之并。

证明: 为了叙述方便，以 n=2 的情形为例予以说明。设 G 为 R^2 中的开集，作 2 族平行线

$x=\ell+(\dfrac{\nu}{2^k}),\ y=m+(\dfrac{\mu}{2^k})$，k=1,2,...； μ，$\nu$=1,3...,2k-1)，令

$$I_{\ell,m,\nu,\mu,k}=\left\{\ (x,y)\mid \ell+\frac{\nu-1}{2^k}<x\leqslant \ell+\frac{\nu}{2^k},\ m+\frac{\mu-1}{2^k}<y\leqslant m+\frac{\mu}{2^k}\ \right\}$$

由于 G 是开集，对任意 $x\in G$，$\exists\ I_{n_x,\ m_x,k_x,\mu_x,\nu_x}$（以下简记为 I_x）满足 $x\in I_x\subseteq G$，则 $\bigcup\limits_{x\in G} I_x=G$，其中 I_x，$I_x{}'$ 要么互不相交，要么一个包含另



一个，对于一个包含另一个的情形，去掉范围小者留下范围大者，即得可数个互不相交的左开右闭的区间。故

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{x_i}=G$$

证毕

注 2．4．1　分解成左开右闭的区间时一定是可数个不可能是有限个，且分解不唯一。

定义 2．4．2　若开集 $G=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$，其中 I_i 为互不相交的左开右闭区间，

则称 $|G|=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_i|$ 为 G 的“体积”。

值得注意的是：要定义合理，必须要|G|有确定意义。必须证明“尽管G的分解不唯一，但分解后的区间长度之和是一常数”，即须在证明下述引理和定理后方能承认其定义。

引理2.4.1　设I是 R^n 中的有界区间，$I=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，其中 I_i 为互不相交的左开右闭区间，则 $|I|=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$

证明　1）对任意n，∃m及有限个互不相交的区间 H_j 满足

$$I-\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right)=\left(\bigcup_{j=1}^{m} H_j\right),\text{于是}|I|-\sum_{i=1}^{n}|I_i|=\sum_{j=1}^{m}|H_j|\geq 0，$$

故 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\leqslant|I|$。

2）对任意ε>0，添加有限个包含I的边界的左开右闭区间 K_i (i=1,2,...m)满足 $\sum_{j=1}^{m}|K_j|<\frac{\varepsilon}{2}$，同时将每一个区间 I_i 适当扩宽范围为包含 I_i 闭包 $\bar{I}_i$ 的开区间 J_i，且 $|J_i|\leq|I_i|+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$，最后将 K_i 和 J_i 拉通统一编号为 W_j，则 $\bar{I}\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}W_j$ 而 $\bar{I}$ 有界闭，则由有限覆盖定理知：

∃m满足 $\bar{I}\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}W_j$，则

$$|I|\leqslant\sum_{j=1}^{m}|W_j|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|W_j|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|+\varepsilon,$$

由ε的任意性知 $|I|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$

综合1)、2)即得所证结论。

证毕

定理2．4．6　若开集$G=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i=\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$，其中$\{I_i\}$、$\{H_j\}$各自为互不相交的左开右闭区间族，则$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|=\sum_{j=1}^{\infty}|H_j|$

证明 因为对任意的i，j，$I_i\cap H_j$要么为φ，要么为互不相交的左开又闭的区间，且$I_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}[I_i\cap H_j]$，于是

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|I_i\cap H_j|=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|I_i\cap H_j|=\sum_{j=1}^{\infty}|H_j|$$

证毕

例2．4．2　求Cantor　G_0集的长度为$|G_0|$。

解　G_0集的构成区间为$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，$(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$，$(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$，…，…所以

$|G_0|=1\times(\frac{1}{3})+2\times(\frac{1}{3})^2+\cdots+2^{n-1}\times(\frac{1}{3})^n+\ldots=1$。

第二章　习　题

1.　证明：1)　$P_0\in E'\Longleftrightarrow$对任意$U(P,\delta)$，$P_0\in U(P,\delta)$有

$U(p,\delta)\cap E$为无限集。

2）$P_0\in E^0\Longleftrightarrow\exists\,U(P,\delta)$满足$P_0\in U(P,\delta)$且

$U(P,\delta)\subset E$。

2.设$R^n=R^1$是全体实数，$E_1=\{x\mid x\in[0,1]$，且x为有理数$\}$，求E_1'、E_1^0、$\bar{E}_1$，∂E_1，将E_1看成R^2的子集（即$E_1=\{(x,0)\mid x\in[0,1]$，且x为有理数$\}$）时，求$E_1'$、$E_1^0$、$\bar{E}_1$、$\partial E_1$。对$E_2=[0,1]$；分别在$R^1$，$R^2$中

各自求 E_2'、E_2^0、$\bar{E}_2$、∂E_2。

3. $R^n=R^2$ 是普通的 XOY 平面，$E_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，$E_4=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，求 E_3'、E_3^0、$\bar{E}_3$，∂E_3，E_4'、E_4^0、$\bar{E}_4$，∂E_4。

4. 设 $R^n=R^2$ 是普通的 XOY 平面，

$$E_5=\left\{(x,y)\mid y=\begin{cases}\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\right.$$，求 E_5'、E_5^0、$\bar{E}_5$、∂E_5。

5. 设 O 是开集，F 是闭集。

证明：1）O－F 是开集 2）F－O 是闭集。

6. 证明：1）设 G 是开集，则 f 在 G 上连续<=>对任意 a，G[f>a]、G[f<a]均为开集；

2）设 F 是闭集，则 f 在 F 上连续<=>对任意 a，F[f≥a]、F[f≤a]均为闭集。

7. 证明每个闭集必是可数个开集之交，每个开集必是可数个闭集之并。

8. 证明在[0，1]内，10 进位小数用不着数字 7 的数全体是一完备集，且其势为 c。

9. 若 $E\neq R^n$，$E\neq\phi$，则 $\partial E\neq\phi$。

10. E 是 R^n 中任一集合，则 $E-E'$ 至多可数。

11. 举例说明即使 E 中每一个点都是孤立点，也有可能 $\overline{\overline{E'}}=c$。