第一章　　集合论

本章基本内容：　先介绍集合的概念、表示方法、例子、关系、运算及其规律；然后以集合间的一一对应为工具定义集合的势、及其势的大、小、相等关系，最后讨论两类特殊势的集合——可数集与 c 势集的定义、性质、例子、运算封闭性；　最后证明了无最大势的集合存在。其目的是为研究点集及其测度作必要的准备，当然，它又是众多数学分支的共同基础。

§１．１　集合概念与运算

教学目的 集合论是本课程的基础. 本节将引入集的概念与集的运算，使学生掌握集和集的运算的基本概念.。

本节重点 De Morgan 公式是以后常用的公式. 证明两个集的相等是经常要遇到论证，应通过例子使学生掌握其基本方法.集列的极限是一种新型的极限，学生应注意理解其概念。

一、集合的概念

集合是数学中最基本、最原始、最简单的概念之一。它与中、小学已经学习过的点、面、线概念一样，不能用其它已有概念来定义它。严格的定义只能采用一组公理来刻划，这里只采用下述朴素的说法予以描述。

所谓的集合是指一定范围内研究对象的全体，其中每一个对象称为元素。我们约定用小写字母表示元素，大写字母表示集合。元素 a 在集合 A 中时，记为 $a\in A$，读作 a 属于 A，或 A 包含 a，元素 a 不在集合 A 中时记为 $a\notin A$，读作 a 不属于 A，或 A 不包含 a。

例１．１．１　实数全体构成一个集合，常用 R^1 记之。

n 元实数组全体组成一个集合，用 R^n 记之。

$[a,b]$上连续函数全体是一个集合，记为 $c[a,b]$

E 中满足 $f(x)\geq a$ 的所有 x 全体是一个集合，记为 $E[f\geq a]$

在一定范围内包含了所有研究对象的集合，称为全集，记为 S。 为了形式上的方便，我们引入不含任何元素的集合，称为空集，并记为 ϕ。

集合中的元素具有以下三大性质：①明确性：即一个元素 a 要么属于 A，要么不属于 A，不能模棱两可；②互异性：集合中的任意两个元素互不相同；③元素与集合

的不可含混性：$A \notin A$。

集合表示方法有两种：一是列举法，二是条件刻划法。

所谓列举法就是将集合中元素排列于花括号内，记为

$$A=\{a,b,c,...,\ ...,\}。$$

例 1．1．2　$A=\{1,2,58,100.5\}$　$N=\{1,4,9,...,n^2,...\}$　均为列举法表示的集合。

所有有限集和部分能用通项反映其规律的特殊无限集可以用列举法表示。

所谓条件刻划法，即通过集合中元素必须且只须满足的条件 p 来定义，记为

$$A=\{x|x \text{ 所满足的条件 } p\}$$

例 1．1．3　$[0,1]=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$，$E(f\geqslant a)=\{x|x\in E,\ 且\ f(x)\geqslant a\}$

同一集合既可以用列举法表示也可以用条件刻划法表示

例 1．1．4　$\{0,1\}=\{x|x-x^2=0\}$

定义 1．1．1　若两个集合 A、B 所包含的元素完全相同，则称这两个集合相等，记为 $A=B$

若 A 中每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或称 A 包含于 B，或称 B 包含 A，记为 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

显然，包含关系具有下述性质：

定理 1．1．1　对任意集合 A、B、C，均有

(1) (反身性) $A\subseteq A$

(2) （对称性）若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$

(3) （传递性）若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$

二、集合的运算

在中学已经学习过任意两个集合 A、B 的交运算 $A\cap B$，并运算 $A\cup B$，现将这两种运算推广到任意多个集合的情形：

定义 1．1．2　设有一族集合 $\{A_\alpha\mid \alpha\in I\}$，其中 α 是在固定指标集 I 中变化的指标；则由一切 A_α $(\alpha\in I)$的所有元素所组成的集合称为这族集合的并集或和集，记为

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \overset{\Delta}{=} \{x|\ \exists\ \alpha\in I \text{ 满足 } x\in A_\alpha\}$$

例 1．1．5　$A_i=\{i\}$，$i=1，2，3，...，$

$$\bigcup_{i=1}^{n} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

例 1.1.6 设 $A_i = \{x \mid i-1 \leqslant x \leqslant i\}$，I 为实数全体，$i \in I$，则

$$\bigcup_{i \in I} A_i = (-\infty, +\infty)$$

例 1.1.7 $A_i = \{x \mid -1 + \frac{1}{i} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{i}\}$，I 为自然数全体，$i \in I$，则

$$\bigcup_{i \in I} A_i = (-1, +1)$$

定义 1.1.3　设有一族集合 $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$，其中 α 是在固定指标集 I 中变化的指标；则由一切同时属于每个 A_α（$\alpha \in I$）的元素所组成的集合称为这族集合的积集或交集，记为

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \stackrel{\Delta}{=} \{x \mid 对\forall\, \alpha \in I 有 x \in A_\alpha\}$$

例 1.1.8　$A_i = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 + \frac{1}{i}\}$，$i=1,2,3,\ldots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = [0, 1 + \frac{1}{n}] \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 1]$$

例 1.1.9　$A_i = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant i + \frac{3}{2}\}$，$i=1,2,3,\ldots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = [0, \frac{5}{2}], \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = [0, \frac{5}{2}]$$

例 1.1.10　$A_i = \{x \mid -1 - \frac{1}{i} \leqslant x \leqslant 1 + \frac{1}{i}\}$，$i=1,2,3,\ldots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = [-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}] \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = [-1, 1]$$

定义 1.1.4 设 A，B 是任意二集合，则由一切属于 A 而不属于 B 的元素全体组成之集合 A 减 B 所得的差集，记为 A-B(或 A\B).

特别地，当 $A\supset B$ 时，称 $A-B$ 为 B 相对于 A 的余集，也可记为 $C_A B$；特别地当 A 为全集 S 时，称 $S-B$ 为 B 的余集，并记为 $C_s B$ 或 B^c 或 CB.

三、集合运算规律

集合的交、并、余、差运算有如下规律：

定理１．１．２　(1)交换律　$A\cup B=B\cup A$　$A\cap B=A\cap B$

(2)结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$　　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(3)分配律

a)　　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

一般地　$A\cap(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$

b)　　$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

c)　　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

一般地　$A\cup(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$

(4)幂等律　$A\cup A=A$　$A\cap A=A$

(5)吸收律　若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$　$A\cap B=A$

(6)余集运算律　$C_s S=\phi$，$C_s\phi=S$；

$A\cup C_s A=S$，$A\cap C_s A=\phi$；

$C_s(C_s A)=A$；　$A\backslash B=A\cap C_s B$；

若 $A\subseteq B$，则 $C_s A\supseteq C_s B$.

(7)DeMorgan 定律

a)　　$C_s(A\cup B)=C_s A\cap C_s B$

一般地　$C_s(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I} C_s A_\alpha$

b)　　$C_s(A\cap B)=(C_s B)\cup(C_s B)$

一般地　$C_s(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I} C_s A_\alpha$

证明：只证(3) a)和(7) a)，其余同理可证

(3)　a) $x\in A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)$ <=> $x\in A$，且有 $\alpha_0\in I$，使得 $x\in B_{\alpha_0}$

<=>存在 α_0 满足 $x\in A\cap B_{\alpha_0}$ <=> $x\in\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$

(7)　a)　$x\in C_s(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)$<=>$x\notin\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$<=>对任意 $\alpha\in I$ 有 $x\notin A_\alpha$

<=>对任意 $\alpha\in I$ 有 $x\in C_sA_\alpha$<=>$x\in\bigcap_{\alpha\in I}C_sA_\alpha$

四、集合列的上下极限及其性质

定义１．１．５　设有一列集合 $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ 称

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}A_n$$ 为集列的上极限

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}A_n$$ 为集列的下极限

如果 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$，则称集列$\{A_n\}$收敛，记为$\lim_{n\to\infty}A_n$。

尽管定义是人为给定的，但也讲究其合理性。对数列 a_n 而言已有上下极限概念，这里是对集列规定上下极限概念，两种极限概念在定义对象上有区别，但又应该有着必然的内在联系，尤其是定义的思维方法有着一致性，那么联系和一致性在何处呢？

对数列 a_n 而言：

$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\inf_{m\geq1}\sup_{n\geq m}a_n$，这里 $\sup_{n\geq m}a_n$ 是刚好不小于所有 $a_n(n\geq m)$ 的数，

$\inf_{m\geq1}\sup_{n\geq m}a_n$ 是刚好不大于所有 $\sup_{n\geq m}a_n(m\geq1)$ 的数，

对集列 A_n 而言：

范围刚好不小于所有 $A_n(n\geq m)$ 的集是 $\bigcup_{n=m}^{\infty}A_n$，且范围刚好不大于所有 $\bigcup_{n=m}^{\infty}A_n$ $(m\geq1)$

的集是 $\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}A_n$，故

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}A_n$ 为集合列的上极限是合理、自然的。

同理 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}A_n$ 为集合列的下极限也是合理、自然的。

也就是说集合列的上、下极限概念是数列的上、下极限概念的平移。

当上、下极限相等时，称集合列 $\{A_n\}$ 收敛，并称其上(下)极限为极限这也只不过是数列极限概念的平移而已。

上、下极限集合究竟是由哪些元素组成的呢？它们之间有何关系呢？

定理 1．1．2　设有一列集合 A_1，A_2，...，A_n，...

1） $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x|$存在无限多个 A_n 满足 $x\in A_n\}$

$=\{x|$对任意 $N>0$，存在 $n\geq N$ 满足 $x\in A_n\}$

2） $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x|$从某项开始所有项满足 $x\in A_n\}$

$=\{x|$存在 N，当 $n\geq N$ 时恒有 $x\in A_n\}$

3） $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subseteq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$

证明 1) $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n \Leftrightarrow x\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}A_n$

$\Leftrightarrow$ 对任意 m 有 $x\in\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}A_n$

$\Leftrightarrow$ 对任意 m 存在 $n\geq m$ 满足 $x\in A_n$

$\Leftrightarrow$ $x\in\{x|$存在无限多个 A_n 满足 $x\in A_n\}$

2） 同理可证。

3） 由 1)、2)直接可得。

例 1．1．11　已知　$A_{2m}=[0,1+\dfrac{1}{2m}]$，$A_{2m+1}=[0,2-\dfrac{1}{2m+1}]$

求 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$

解 $$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n=\bigcap_{m=1}^{\infty}[0,2)=[0,2)$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n=\bigcup_{m=1}^{\infty}[0,1]=[0,1]$$

例１．１．１２　设 $f(x)$，$f_n(x)(n=1,2,...,)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的实函数，k 为自然数则

$$E[f_n(x)\nrightarrow f(x)]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{k}] \quad (1)$$

$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} E[|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{k}]$$

$$E[f_n(x)\xrightarrow{n\to+\infty} f(x)]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty} E[|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}] \quad (2)$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\underline{\lim_{n\to\infty}} E[|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}]$$

证明 只须证(1)

$x\in E[f_n(x)\nrightarrow f(x)] \Longleftrightarrow x\in E$，$\exists\ \varepsilon_0$，对 $\forall\ N$，$\exists\ n\geq N$ 满足

$$|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon_0$$

$\Longleftrightarrow x\in E$，$\exists\ 1/k$，对 $\forall\ N$，$\exists\ n\geq N$ 满足

$$|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon_0\geq\frac{1}{k}$$

$\Longleftrightarrow \exists\ k$，对 $\forall\ N$，$\exists\ n\geq N$，$x\in E[|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{k}]$

$\Longleftrightarrow \exists\ k$，对 $\forall\ N$，$x\in\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E[|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{k}]$

$$\Leftrightarrow \exists\, k,\ x\in\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{k}]$$

$$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{k}]$$

证毕

注１．１．１　关于(2)式的证明，既可以采用(1)式的类似方法，也可以直接在(1)式基础上用 Demorgan 定律。

注１．１．２　(1)、(2)式都是极限语言与集合语言的相互“翻译”，请注意体会其证明过程。

例１．１．１３ ①若 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\ \cdots A_n\subseteq\cdots\ \cdots$（渐涨集合列）

则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} A_n=\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 且

同理 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ A_n=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty} A_n=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} A_N=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

故　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

②若 $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\ \cdots A_n\supseteq\cdots\ \cdots$（渐缩集合列）

则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

以上两结论对应于数列中的结果是单调递增数列的极限就是上确界，单调递减数列的极限就是下确界。

§１．２　集合的势、可数集与不可数集

教学目的 继续介绍集合论的基础内容，如映射，基数，可数集与不可数集等.让学生理解无限集与无限集之间存在着实质性的差别，尤其是可数与否关重要。

本节要点 一一对应的思想与方法贯穿本节的核心.基数的概念.可数集的讨论,都要用的一一对应的方法.证明两个不同的集对等，从而具有相同的基数，

本节难点 (1)证明一个集是可数集，有时需要一定的技巧，因而具有一定的难度，通过较多的例题和习题，使学生逐步掌握其方法和技巧

(2)无最大势集合存在，通过理发师悖论对比使得理解变容易一些。

这里所谓的势，简单地说势就是集合的元素个数，个数概念是幼儿园娃娃都懂的概念，为什么要故弄玄虚，用一个高年级大学生才第一次听说的新词呢？过去的个数只对有限集而言，无论是有理数那么多个无限，还是无理数那么多个无限，都用同一个无限，不加任何区别。本节要讲的势，则必须将无限予以细分，并区别对待。事实上，我们将会发现，不同的无限会有许多惊人的差异。那么是否会补充一些记号来分别表示各种各样的无限呢？毫无必要，即使这样作了也没有办法记住。因此，这里只给出比较元素个数多少的一般性方法。

定义１．２．１　设 A，B 是任意二集合，且存在一一对应 f：A→B，则称 A 与 B 势相等，或称 A 与 B 对等，记为 A～B，或 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.如果集合 A 是有限集，且元素个数为 n，则记为 $\overline{\overline{A}}=n$.

如果存在 $B_0\subseteq B$ 和一一对应 f 使得 $f: A\to B_0$，则称 A 的势不超过 B 的势，记为 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$；如果 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，但 $\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$，则称 A 的势小于 B 的势，记为 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$.

这种定义表面看来似乎有点抽象，但实际上非常自然而合理。

原始人用自己的苹果换别人的梨子且等量交换时，他们只能数 1、2，三个以上都称为“许多”，但你真的要用三个苹果去换他四个梨时，虽然是“许多”换“许多”，但他是绝对不同意的。那么他们用什么方法保证“不吃亏”呢？那就是给一个苹果换一个梨子，逐一逐一换，如果刚好同时换完说明苹果、梨子一样多，如果苹果完了以后还有梨子，则说明苹果比梨子少。这实质上是利用一一对应来比较集合中元素的个数多少，其基本思想与此处定义是一致的。故定义是自然而合理的。

然而通过上述合理的定义确得到下面似乎“荒唐”的结果：

例１．２．１　N＝{1,2,3,...,n,...}～A＝{3,4,5,...,n,...}。事实上，$f(n)=n+2$　(1,2,3,...,n,...)就是 N 与 A 之间的一一对应。

由此可以注意到：对无限集而言“部分小于整体”的算术规则不再成立，事实上，可与其本身的某一真子集对等是无限集的本质特征（留作习题）。

定理１．２．１　设 A、B、C 是任意三集合，

1) A～A　(反身性)

2) 若 A～B，则 B～A（对称性）

3) 若 A～B，且 B～C，则 A～C（传递性）

4)若对任意$\alpha\in I$，有$A_\alpha\sim B_\alpha$，且对任意$\alpha_1\neq\alpha_2$有$A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2}=\phi$，$B_{\alpha_1}\cap B_{\alpha_2}=\phi$，则$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\sim\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$

5)若$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{C}}$，则$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{C}}$　（传递性）

6)若$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$，则$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$（两边夹法则）

7)设A、B是任意二集合，则$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$三者必居其一，且仅居其一。(三歧性)

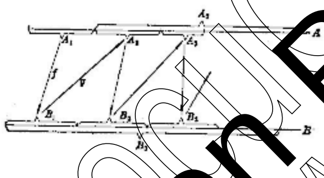
证明　这里只证6)，其余留给读者自己证明。

因为$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，则存在$B_0\subseteq B$及集合A与集合$B_0$之间的一一对应f满足$f:A\to B_0$，同理由于$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$，则存在$A_0\subseteq A$及集合A与集合$B_0$之间的一一对应g满足$g:B\leftrightarrow A_0$，令

$A_1=A-A_0$　　$B_1=f(A_1)$

$A_2=g(B_1)$　　$B_2=f(A_2)$

...　　...　　...



$A_n=g(B_{n-1})$　　$B_n=f(A_n)$　　　...　　...　　...

显然　$A_n\cap A_m=\phi\,(n\neq m)$，

$B_n\cap B_m=\phi\,(n\neq m)$，

于是$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\overset{f}{\sim}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，

而$A_1=A-A_0$，所以$A_0=A-A_1$

$$B-\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \overset{g}{\sim} A_0-\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n+1}=A-\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad (*)$$

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cup (B-\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup (A-\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=A$$

故

$$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$$

证　毕。

注 1．2．1　(*)式成立是由于有 g 这个一一对应存在，并非是“等量减等量差相等”的算术规则。事实上，“等量减等量差相等”的算术规则对无限集而言不再成立。由例 1．2．1 可以看出：虽然 N～N，N～A，但 ϕ＝N－N 与 N－A＝｛1,2｝不对等.

引入集合势的目的在于区别无限集之间的元素个数多少，无论是无穷数列，还是无穷级数都是可以以自然数为脚标排列成一串形式的特殊无限，是最简单、最常见的无限。

定义 1．2．2　设 A 是任一集合，N＝{1,2,3,......}，如果 A～N，则称 A 为可数集。记为 $\overline{\overline{A}}$＝a

例 1．2．2　A＝{0,1,-1,2,-2,3,-3,......}是一可数集

可数集具有一个直观而简单的本质特征：

定理 1．2．2　A 为可数集的充要条件是 A 可以排成无穷序列形式。

证明　若 A 为可数集，则存在一一对应 f: N→A，于是 A＝{f(1),f(2),...,f(n),...}便是无穷序列形式。

反过来，若 A 是无穷序列形式，即 A＝$\{a_1,a_2,...,a_n,.......,...\}$

则令 $f(1)=a_1$，$f(2)=a_2$，...，$f(n)=a_n$，...即可知 A 为可数集。

可数集是势最小的一类无限集，即：

定理 1．2．3　设 A 是无限集，则 $\overline{\overline{A}}\geq a$

证明　只须证 A 有可数子集，事实上因为 A 是无限子集，所以存在 $a_1\in A$，而 A 无限则保证了 $A-\{a_1\}$为无限集，所以存在 $a_2\in A-\{a_1\}$，...，同理存在

$a_n\in A-\{a_1,a_2,...,a_{n-1}\}$，

令　$A_0=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$，则 A_0 是一可数集，且 A_0 是 A 的子集。故 $\overline{\overline{A}}\geqslant a$

定理 1．2．4　可数集 A 的任何无限子集 A_0 都是可数子集

证明　　由定理 3 知 $a\leqslant\overline{\overline{A}}_0\leqslant\overline{\overline{A}}=a$，由定理 1 之 5)知 $\overline{\overline{A}}_0=a$

也可以直观想象为：请无穷序列 $A=\{a_1,a_2,...,a_n,...,\}$ 中 A_0 的元素出列，然后向右看齐，便将 A_0 排成了无穷序列，从而 A_0 可数。

定义 1．2．3　我们将空集、有限集、可数集统称为至多可数集

定理 1．2．5　至多可数个至多可数集之交、并、差运算结果仍为至多可数集。特别地，如果其中有一个集是可数集，那么其并集必然是可数集。

证明　　对交、差运算而言显然，只须证并运算的情形。

1)　证 A_1，A_2，...，A_n 有限个至多可数集之并 $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 仍为至多可数集。

事实上，可设

$$
\begin{array}{l}
A_1=\{a_{1,1},\ a_{1,2},\ ...,\ a_{1,n},\ ...\}\\
\qquad\ \downarrow\qquad\ \downarrow\qquad\qquad\ \downarrow\\
A_2=\{a_{2,1},\ a_{2,2},\ ...,\ a_{2,n},\ ...\}\\
\qquad\ \downarrow\qquad\ \downarrow\qquad\qquad\ \downarrow\\
A_3=\{a_{3,1},\ a_{3,2},\ ...,\ a_{3,n},\ ...\}\\
\qquad\ \downarrow\qquad\ \downarrow\qquad\qquad\ \downarrow\\
\ \ ...\quad\ ...\qquad\ ...\qquad\ ...\\
\qquad\ \downarrow\qquad\ \downarrow\qquad\qquad\ \downarrow\\
A_n=\{a_{n,1},\ a_{n,2},\ ...,\ a_{n,n},\ ...\}
\end{array}
$$

只须将第一列从上到下排完后接着排第二列，按此顺序逐列排，就可以排成有限或无穷序列形式，所以 A 为至多可数集。（当然要注意：已经在前面排过的不要重复排，遇到有限集而出现的缺项，跳过不排。）

2）证 A_1，A_2，...，A_n，...可数个至多可数集之并 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 仍为可数集

注意：无法照搬 1)的证明过程，因为第一列在任一时刻都未排完，当然无法排到第二列元素去，咋办呢？必须改造排列办法，此处采用对角线法则。事实上，可设

$$
\begin{array}{llllll}
A_1=\{a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a_{1,4}, & \ldots, & a_{1,n}, \ldots\} \\
\quad\downarrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \nearrow \\
A_2=\{a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & a_{2,4}, & \ldots, & a_{2,n}, \ldots\} \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\
A_3=\{a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & a_{3,4}, & \ldots, & a_{3,n}, \ldots\} \\
 & \nearrow & \nearrow & & & \\
A_4=\{a_{4,1}, & a_{4,2}, & a_{4,3}, & a_{4,4}, & \ldots, & a_{4,n}, \ldots\} \\
 & \nearrow & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & & & \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
A_n=\{a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & a_{n,4}, & \ldots, & a_{n,n}, \ldots\} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & &
\end{array}
$$

则 $A=\{a_{1,1}, a_{2,1}, a_{1,2}, a_{3,1}, a_{2,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{n,1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}$ 便是有限或无穷序列形式，从而 A 为至多可数集。

常见的可数集非常多。

例１．２．３　有理数集 P 为可数集

证明　设 P^+，P^-分别为正、负有理数集，则 $P=P^+\cup P^-\cup\{0\}$

只须证 P^+ 是可数集，事实上

$$A_1=\{\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{1},...,\frac{n}{1},...\}$$

$$A_2=\{\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2},...,\frac{n}{2},......\}$$

$$A_3=\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},...,\frac{n}{3},...,...\}$$

$$A_n=\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},...,\frac{n}{n},...,...\}$$

...

由于任何有理数 r 均可表为分数形式，即存在 p，q 满足 $r=\frac{p}{q}$，就是说 r 必在第 q 的一个集合之中。

所以 $$P^+=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ 是可数集。}$$

定理 1．2．6 设 A 中每一个元素均由 n 个记号所决定， 而每个记号独立地跑遍一个可数集，则 A 为可数集。

证明　设 $A=\{a_{x_1,x_2,x_3,...,x_n} \mid x_i\in I_i, \overline{\overline{I_i}}=a, i=1,2,...,n\}$

我们对 n 用归纳法：

一、n=1 时命题显然成立

二、假定 n＝N 时命题成立

三、证 n＝N＋1 时命题成立，事实上，不妨设

$I_{N+1}=\{r_j \mid j=1,2,...,...\}$，对任意固定的 j

$$A_j=\{a_{x_1,x_2,x_3,...,x_N,r_j} \mid x_i\in I_i,\ \overline{\overline{I_i}}=a,\ i=1,2,...,N\}$$

是由 N 个记号所决定的集合，由归纳假设可知 A_j 为可数集，从而

$$A=\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ 是可数集。}$$

此定理有着广泛而重要的应用：

例１．２．４ 1)平面上有理数坐标点全体为可数集。

2) 对任意整数 n，n 次整系数多项式全体

$A_n=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \mid a_0,\ldots,a_n$ 为整数$\}$

是可数集。

3)所有整系数多项式全体 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 为可数集。

4)所有代数数(称整系数多项式的根为代数数)全体为可数集

证明　1)　$P^2=\{(x,y)\mid x,y$ 均为有理数$\}$，(x,y)可视为由 x 和 y 两个记号所决定，且每个记号独立跑遍有理数这个可数集，由定理 6 知这样的元素全体为可数集。

2)对任意整数 n，每一个 n 次整系数多项式

$$P(x)=a_0+a_1x^1+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

由 n＋1 个记号 a_0，a_1，...，a_n 所决定，且每个记号独立跑遍整数集这个可数集，

由定理１．２．６知这样的元素全体 A_n 为可数集

3)因为 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，且 A_n 为可数无限集，所以 A 为可数集。

4)每一个整系数多项式的根只有有限个，从而至多可数，又由 3)知所有整系数多项式全体为至多可数集，所有代数数全体为可数个至多可数集之并集，由定理 5 知所有代数数全体为至多可数集，即 $\overline{\overline{A}}\leq a$；另一方面，显然 $A\supseteq N$，即 $\overline{\overline{A}}\geq a$，故 $\overline{\overline{A}}=a$ 。

注意：代数数的范围比较大，它不仅包括了所有的有理数， 而且还包含许许多多的无理数，例如：$\sqrt{2}$ 是 $x^2-2=0$ 的根，所以 $\sqrt{2}$ 是代数数。

既然代数数这样大的范围都是可数集，那是否意味着所有的无限集都为可数集呢？答案是否定的。请看下例：

例１．２．５　$(0,1)$是不可数无限集。

证明　若不然（0,1）$=\{a_1,a_2,\ldots,a_2,\ldots\}$，并将这些数用 10 进制小数为：

$$a_1=0.a_{1,1},a_{1,2},\ldots,a_{1,n},\ldots$$

$a_2 = 0.a_{2,1}, a_{2,1}, ..., a_{2,n}, ...$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$a_n = 0.a_{n,1}, a_{n,2}, ..., a_{n,2}, ...$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

则我们可以构造一个新数 $a_0 \in (0,1) - \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$，与假设矛盾。

a_0的每一位小数具体构造法如下：

第一位：$a_{0,1} = \begin{cases} 1 & 当 a_{1,1} \neq 1 \\ 2 & 当 a_{1,1} = 1 \end{cases}$　　（保证 $a_0 \neq a_1$）

第二位：$a_{0,2} = \begin{cases} 1 & 当 a_{2,2} \neq 1 \\ 2 & 当 a_{2,2} = 1 \end{cases}$　　（保证 $a_0 \neq a_2$）

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

第 n 位：$a_{0,n} = \begin{cases} 1 & 当 a_{n,n} \neq 1 \\ 2 & 当 a_{n,n} = 1 \end{cases}$　　（保证 $a_0 \neq a_n$）

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

显然 $0 < a_0 = 0.a_{0,1}a_{0,2}...a_{0,n}... < 1$，且 $(a_0 \neq a_n,\ \forall n \in N)$。

既然(0,1)是一个不可数无限集，那就另用记号 c 表示它的势，即 $\overline{\overline{(0,1)}} = c$

我们以后将与(0,1)对等的一类集称为 c 势集。c 势集也是一类范围相当广的集。

例 1.[illegible]　1）$(-\infty, +\infty)$为 c 势集.

2）对任意 $a<b$，(a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$，$[a,b]$均为 c 势集.

3）$(0,1)\times(0,1)$为 c 势集，R^2 为 c 势集，R^n 为 c 势集

4）$B = \{(x_1, x_2, ..., x_k, ...) \mid x_k \in (0,1),\ \ k=1,2,......\}$为 c 势集.

$E_\infty = \{(x_1, x_2, ..., x_k, ...) \mid x_k \in (-\infty, +\infty),\ \ k=1,2,......\}$为 c 势集.

证明 1）$f(x) = tg(\pi x - \frac{\pi}{2})$：$(0,1) \to (-\infty, +\infty)$是一一对应，故

$(-\infty,+\infty)$为 c 势集.

2) $f(x)=(b-a)x+a$：$(0,1)\to(a,b)$是一一对应，故(a,b)为 c 势集.
因为$(a,b)\subseteq[a,b]\subseteq(-\infty,+\infty)$，且$(a,b)\sim(-\infty,+\infty)$，由两边夹法则知：
$[a,b)$为 c 势集。同理$(a,b]$，$[a,b]$为 c 势集。

3) $(a,b)\in(0,1)\times(0,1)$，不妨设

$$a=0.a_1,a_2,...,a_n,...$$

$$b=0.b_1,b_2,...,b_n,...$$

则 $f(a,b)=0.a_1,b_1,a_2,b_2,.......a_n,b_n,.......$

是$(0,1)\times(0,1)$到$(0,1)$的单射$\overline{\overline{(0,1)\times(0,1)}}\leqslant\overline{\overline{(0,1)}}=c$. 另一方面，显然

$\overline{\overline{(0,1)\times(0,1)}}\geqslant\overline{\overline{(0,1)}}$，故$\overline{\overline{(0,1)\times(0,1)}}=\overline{\overline{(0,1)}}=c$.

令 g：$(x,y)\to(tg(x-\frac{1}{2})\pi,tg(y-\frac{1}{2})\pi)$，g 是$(0,1)\times(0,1)$到 R^2 的一一对应，故 R^2 也为 c 势集.

同理 R^n 也为 c 势集.

4) 证法与 3)相同，只是作 f 时必须利用对角线排列法将数列对应一个数。

定理１．２．７ 1)任意有限个 c 势集之并的势仍为 c

2)可数个 c 势集之并的势仍为 c

3)c 势个 c 势集之并的势仍为 c

证明　始终不妨设其中任意二集互不相交

1) 设有限个 c 势集 A_1，A_2，...，A_n 之并为 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$

因为 $A_i\sim(i-1,i]$，则 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\sim\bigcup\limits_{i=1}^{n}(i-1,i]=(0,n]$，故 $\overline{\overline{A}}=c$.

2) 同理 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\sim(0,+\infty)$，故 $\overline{\overline{A}}=c$.

3) 设$\overline{\overline{I}}=c$，任意$\alpha\in I$，$\overline{\overline{A_\alpha}}=c$，且不妨假定 $I=(0,1)$

则 $A_\alpha \sim \{(\alpha, y) | 0<y<1\}$，于是

$$A=\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \sim (0,1)\times(0,1)，故\overline{\overline{A}}=c.$$

定理１．２．８　设 A 中每一个元素均由 n 个记号所决定， 而每个记号独立地跑遍一个 c 势集，则 A 为 c 势集。即若 $A=\{a_{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n} \mid x_i \in A_i, \overline{\overline{A_i}}=c，i=1,2,\ldots,n\}$，则 $\overline{\overline{A}}=c$.

证法一　只须将定理１．２．６证明过程中最后一步用“可数个可数集之并是可数集”改为用“c 势个 c 势集之并是 c 势集即可”。

证毕

证法二　不妨设 $A_i=(-\infty，+\infty)$，则 $f:a_{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n}\to(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 是 A 到 R^n 上的一一对应，故 A 为 c 势集。

证毕

定理１．２．９　设 A 为无限集，B 是至多可数集，则 $A\cup B\sim A$

证明　1)假定 $A\cap B=\phi$

作 $A_0=\{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots,\}\cup A$，则

$$(A-A_0)\cap(A_0\cup B)=\phi，(A-A_0)\cap A_0=\phi 于是$$

$$A\cup B=(A-A_0)\cup(A_0\cup B)\sim(A-A_0)\cup A_0=A$$

2)如果 $A\cap B\neq\phi$，则(B-A)至多可数，且 $(A-A_0)\cap[A_0\cup(B-A)]=\phi$

有 1)知：$A\cup B=(A-A_0)\cup[A_0\cup(B-A)]\sim(A-A_0)\cup A_0=A$

证毕

定理１．２．１０ 设 B 是至多可数集，A-B 为无限集，则 A－B～A.

证明　　因为 B 是至多可数集，所以 $A\cap B$ 也是至多可数集，由定理１．２．９知： $A=(A-B)\cup(A\cap B)\sim(A-B)$

证毕

通过此定理可以把握许多重要集合的势。

例１．２．７ 1)非整实数集是 c 势集；

2)无理数集是 c 势集；

3)超越数集是 c 势集。

证明　利用整数集、有理数集、代数数集是可数集及其定理１．２．１０即得。

在直线上常见的无限集要么是可数集，要么是 c 势集， 那是否有无限集的势介于 a 与 c 之间呢？集合论创始人 Contor 认为不存在，但至今既无人证明此结论，又无人否定此结论，。因此，数学界称此结论为 Contor 连续统假设。

全直线的势为 c 势集，那么是否 c 就是最大势呢？下述定理说明无最大势存在。

定理 1．2．1 1　设 $2^M=\{A|A\subseteq M\}$，则 $\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{2^M}}$

证明　　显然 $\overline{\overline{M}}\leqslant\overline{\overline{2^M}}$，还须证明 $\overline{\overline{M}}\neq\overline{\overline{2^M}}$

若不然，存在一一对应 f：$M\rightarrow 2^M$，我们暂且将满足 $x\in f(x)$ 的元素称为"好"元素，否则称为"坏"元素。

$M_{好}=\{x|x\in M, x\in f(x)\}$，$M_{坏}=\{x|x\in M, x\notin f(x)\}$

由于 f 是一一对应，所以对 $M_{坏}$，$\exists x_0\in M$ 满足　　$x_0\rightarrow f(x_0)=M_{坏}$

那么 x_0 究竟是"好"元素呢？还是坏元素呢？

倘若 x_0 是"坏"元素，则 $x_0\notin f(x_0)$，而 $f(x_0)=M_{坏}$，即 $x_0\notin M_{坏}$，矛盾。

倘若 x_0 是"好"元素，则 $x_0\in f(x_0)$，而 $f(x_0)=M_{坏}$，即 $x_0\in M_{坏}$，矛盾。

故存在一一对应是错误的，即 $\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{2^M}}$

此方法许多初学者感觉抽象难懂，然而在趣味逻辑中我们早已见过的著名的理发师悖论就是类似的推理方法。

从前有一位理发师宣称："我必须为且只为不给自己理发的人理发"，当有一人问他"你给不给自己理发？"时，他却无法自圆其说了。如果他给自己理发，他就是给自己理发的人，按他自己的宣言，他不应该给他自己理；如果他不给自己理发，他就是不给自己理发的人，按他自己的宣言，他应该给他自己理发。

又如，一个无神论者在证明"万能的上帝并不存在"时是这样巧妙地提问的，"请问你所说的万能的上帝能创造出他自己搬不动的石头吗？"，如果回答不能，这与上帝万能相矛盾；如果回答能，既然有上帝也无法搬动的石头，就说明上帝并非万能。

正是由于无最大势的集合存在，全集只是相对而言的"全"，没有绝对意义的全。

第一章　习　题

1. 证明　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

2. 证明

(1) A—B＝A—(A∩B)＝(A∪B)—B　　(4) A—(B—C)＝(A—B)∪(A∩C)

(2) A∩(B—C)＝(A∩B)—(A∩C)　　(5) (A—B)∩(C—D)＝(A∩C)—(B∪D)

(3) (A—B)—C＝A—(B∪C)　　(6) A—(A—B)＝A∩B

3. 证明　(A∪B)—C＝(A—C)∪(B—C)　　A—(B∩C)＝(A—B) ∪(A—C)

4. 证明　$C_s(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I} C_s A_\alpha$　　$C_s(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I} C_s A_\alpha$

5. 证明　$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha - B=\bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha - B)$　　$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha - B=\bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha - B)$

6. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合，作 $B_1=A_1$，$B_n=A_n-\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ (n>1)，证明 B_n 是一列互不相交的集，且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ (n=1, 2, ...,)

7. 设 $A_{2n-1}=(0,\ \frac{1}{n})$，$A_{2n}=(0,\ n)$，求出集合列的上限集与下限集。

8. 证明：若　$A_{2m}=[0,2m]\times[0,\frac{1}{2m}]$，$A_{2m+1}=[0,\frac{1}{2m+1}]\times[0,(2m+1)]$

则　1) $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n=\{(0,0)\}$

2) $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n=\{(0,y)\mid 0\le y<+\infty\}\cup\{(x,0)\mid 0\le x<+\infty\}$

9. 作出一个(-1,1)和(-∞, +∞)的1—1对应，并写出这一对应的解析表达式。

10. 作出球面去掉一点以后余下的点所成的集合与整个平面上的点所成的集合之间的 1—1 对应。

11. 证明由直线上互不相交的开区间作为集合 A 的元素，则 A 是至多可数集。

12. 所有有理系数多项式组成一可数集。

13. 设 A 是平面上以有理点(坐标为有理数的点)为中心，有理数为半径的圆全体，则 A 是可数集。

14. 证明单调函数的间断点至多只有可数个。

15. 作出(0,1)与[0,1]之间的 1--1 对应。

16* 设 A 是无限集，则必存在 $A^*\subset A$，满足 $A^*\sim A$，且 $A-A^*$ 可数。

17. 证明[0,1]上的全体无理数作成的集合其势为 c。

18. 设 $\overline{\overline{A\cup B}}=c$，则 $\overline{\overline{A}}=c$ 或 $\overline{\overline{B}}=c$。

19* 设 A 是一可数集，则 A 的所有有限子集作成的集合也必可数。

20. 设 $\{x_n\}$ 为一序列，其中元素彼此互异，则它的子序列全体组成基数为 c 的集。

21. A 为无限集的充分必要条件是它可与其本身的某一真子集对等。