绪　　论

通过绪论教学让学生对《实变函数论》的中心任务，课程内容、篇章结构，研究思路与方法，特点有一个系统了解，为学好《实变函数论》作好思想准备。

一、《实变函数论》的内容

顾名思义，《实变函数论》即讨论以实数为变量的函数，这样的内容早在中学都已学过，中学学的函数概念都是以实数为变量的函数，大学的数学分析，常微分方程也是研究的以实数为变量的函数，那么《实变函数论》还有哪些内容可学呢？简单地说：《实变函数论》只做一件事，那就是恰当的改造积分定义使得更多的函数可积，使得积分的操作更加灵活。

何以说明 Riemann 积分范围狭窄呢？因为

$$D(x)=\begin{cases}0 & x\text{为无理数时}\\ 1 & x\text{为有理数时}\end{cases}$$

这样形式极为简单的函数 Riemann 积分定义也不可积，所以我们有足够理由认为 Riemann 可积范围确实狭窄。

如何改造积分定义来达到拓广积分范围的目的呢？让我们先剖析一下造成这一缺陷的根本原因在何处，只有先找准病根，然后才能对症下药。由数学分析知：对任意分划 T：$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$，由于任意一个正长度区间内既有有理数又有无理数，于是关于 D（x）在[0，1]上的大小和之差恒有：

$S(T,D)-s(T,D)\equiv 1-0=1$

如果分划不是这样呆板，这样苛刻地要求一定要分成区间的话，还是有可能满足大小和之差任意小的。比如，只要允许将函数值为 1 的有理数点分在一起，将函数值为 0 的无理数分在一起，那么大小和之差就等于零了。法国的著名数学家 Lebesgue 就抓住这个着眼点，首先让分化概念更加广泛，更加灵活，从而将函数值接近的分在一起以保证大小和之差任意小。即

$T:E=\bigcup_{i=1}^{n}E[y_{i-1}\le f<y_i]$，其中 $m\le f<M$，$m=y_0<y_1<\ldots<y_n=M$ 时，要

$S(D,f)-s(D,f)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-y_{i-1}]mE[y_{i-1}\le f<y_i]\le\max_{1\le i\le n}[y_i-y_{i-1}]mE<\varepsilon$，只须 $\max_{1\le i\le n}[y_i-y_{i-1}]<\varepsilon$，这里 $mE[y_{i-1}\le f<y_i]$ 相当于集合 $E[y_{i-1}\le f<y_i]$ 的长度。

思路非常简单，但实现起来并非易事。因为 $E[y_{i-1}\le f<y_i]$ 可能很不规则，如何求 $mE[y_{i-1}\le f<y_i]$ 呢？这就是一般集合的测度问题，第三章内容。测度理论本来是为了推

广长度、面积、体积概念到一般集合，然而在实施过程中却使我们非常遗憾，我们无法对直线上所有集合规定恰当测度使得满足以下两点最基本要求：①落实到具体区间的测度就是长度，即测度确为长度概念的推广；②总体测度等于部分测度之和，即可列可加性成立。只能对部分集合规定满足这两点基本要求的测度，这一部分集合便是所谓的可测集合，即第三章内容。那么哪些函数才能保证形如 $E[y_{i-1} \le f < y_i]$ 的集合均可测呢？这就是可测函数理论问题，即第四章内容，由于 $E[y_{i-1} \le f < y_i] = E[f \ge y_{i-1}] - E[f \ge y_i]$，所以我们采用"对 $\forall a$，有 $E[f \ge a]$ 可测"，作为函数 f 可测的定义？？。是否可以再改定义，比如按高等数学 09 年 1 期文章改？

有了以上准备之后，才根据前述思路对可测集 E 上定义的可测函数先定义大（小）和 $S(D,f) = \sum_{i=1}^{n} y_i mE[y_{i-1} \le f < y_i]$ （$s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} mE[y_{i-1} \le f < y_i]$）然后规定 $\inf_D S(D,f)$（$= \sup_D s(D,f)$）为积分值，定义并讨论积分的性质，验证尽管新积分定义是退而求其次的结果，但也确实达到了"使得更多的函数可积，使得积分的操作更加灵活"的预期目的，这就是第五、六章内容。

Lebesgue 测度思想，也不是凭空想象，而是借鉴思想之前的 Jordan 测度思想，剖析有理数集在 Jordan 意义下不可测的实质原因是，有限个区间盖住[0，1]中有理数全体，必然同时也盖住[0，1]中无理数全体，从而外测度为 1，要是能用自然数一样多的无限区间盖住有理数全体的话总长度就可以要多小有多小，从而外测度也为 0，不就可测了吗？于是就不得不讨论无限集与无限集之间个数的区别，也就是说必须研究集合势理论，即第一章。

无论是将定义域中接近的点分在一起的 Riemann 分划，还是将函数值接近的分在一起的 Lebesgue 分划，都离不开"接近"、"相邻"这个概念，也就是说离不开距离结构，更一般说离不开拓扑结构，从点的角度看离不开收敛、聚点等概念，从集合的角度看离不开开集、闭集概念，他们的性质和相互关系的讨论就是第二章。

以上所述，凭着基于直观集合概念的深刻洞察，放弃对函数定义域直接分割进而求和的方法，转而对函数值域进行分割以达对定义域间接分割的目的，然后再求和。这既是上世纪初法国著名数学家 Lebesgue 创立新型积分的原始思路，也是传统教材介绍 Lebesgue 积分定义的常见的普遍方法。

鉴于人们在研究可测函数时发现：可测函数的本质特征是正、负部函数的下方图形均为可测集。结合 Riemann 积分的几何意义，使我们自然想到：与其说测度推广了定义域的长度（面积、体积）概念后使得我门作大、小和更加灵活多样，以达推广积分的目的，不如说由于定义域与实数域的乘积空间的面积（体积）概念的推广，使得大量的象 Dinichni 函数那样图形极其不规则的下方图形也可以求面积（体积）了，从而拓宽了

可积范围。于是我们在本教材中采取直接规定其测度之差为积分值（如果差存在的话）的办法，该定义简单、明了、直观。既有效地避免了分划、大（小）和、确界概念的繁琐，又成功地回避了先在测度有限，函数有界条件下讨论积分性质，然后推广到测度无限，函数无界的一般情形的重复、啰嗦。

从《实变函数》的内容不难看出，它是一门承先起后的重要课程，是数学分析的发展和深化，第一章集合论是现代数学各分支的公共基础，第二章点集理论是泛函分析、拓扑学的基础，第三章是测度论和现代概率论的基础，抽象积分理论可以说就是Lebesgue 测度、Lebesgue 可测函数、Lebesgue 积分理论定一般化、即是第三、第四、第五、第六章内容的抽象化。

二、《实变函数论》的特点

由以上叙述可以看出《实变函数论》内容单纯，学习起来应该简单，然而实际情况却大相径庭，各届同学都感到学习《实变函数论》有一定困难。原因在何处呢？从学生反映意见看集中在两点：

1. 高度抽象，防不胜防。

抽象到什么程度呢？有人用八个字概括为："似是而非，似非而是"，并有以下例为证：

例 1：若许多同学站成一列，且男女生交叉排列，任意两个男生中间有女生，任意两个女生中间有男生，在其中任取一个片段，男女生的个数关系无非只有三种可能：或男女生一样多，或男生比女生多一个，或女生比男生多一个。也就是说在任一片段中男女生个数至多相差一个。直线上的有理数、无理数排列表面看来很类似，任意两个有理数中间有无理数，任意两个无理数中间有有理数，在直线上任取一节线段，有理数、无理数的个数似乎无非只有三种可能：或有理数、无理数一样多或有理数多一个或无理数多一个，也就是说在任一片段中有理数、无理数个数至多相差一个。但严密的逻辑推理告诉我们，这种说法是完全错误的。事实上，有理数相对无理数而言少得多。少到什么程度？即使是有理数开头有理数结尾这样对有理数最有利的情形，有理数与无理数相比也是那样的微不足道，"有它不多，无它不少"。即去掉有理数后的无理数居然还与所有实数一样多，这就是所谓"似是而非"。

例 2：有理数在直线上密密麻麻，自然数在直线上稀稀拉拉，如果在学习《实变函数论》以前有人说自然数与有理数一样多的话，谁也不会承认，而《实变函数论》却严密论证该结论无可非议。这就是所谓"似非而是"。

2．定理、定义、引理、推论多，例题少、计算内容少，理论性强。

理论性强是由于实变函数论的内容结构所决定的，因它只做一件事：恰当地改造积分定义使得更多的函数可积。这就使得《实变函数论》的绝大部分篇幅都是在作理论上的准备，很少有应用、例题的原因。但从另一个角度讲，《实变函数论》的习题几乎全是证明题，而定理、引理、推论的证明本身就是一些典型的，带证明示范性的例子。

三、学习《实变函数论》的方法

针对《实变函数论》的特点，学习它应有本门课程较为独特的方法。

1．由于《实变函数论》高度抽象、理论性强，对于每一个尚未证明的结论都应持谨慎态度，不能简单类比后就盲目承认和否定，必须严格论证或举出反例，否则就有可能出现例 1 、例 2 类似的错误。

2．对于每一个已经证明的结论不仅仅是记住，更重要的是理解其证明，只有理解其证明才能借鉴其方法。之所以有人将“可数集并上至多可数集仍为可数集”记得滚瓜烂熟，但无法自己证明“无限集并上一个至多可数集后其势不变”，也有人即使听懂、看懂“无限集并上一个至多可数集后其势不变”的证明后，对直接建立（0，1）与[0，1]之间的 1—1 对应仍束手无策，根本想不到应该用证明定理的思想方法，而不是直接用结论本身。其原因在于未消化其证明，从而未能达到借鉴方法解决类似问题之目的。有人知道“可数个可数集之并仍为可数集”，但不知道反过来如何将一个可数集分解成可数个互不相交的可数集之并，原因也是类似。

3．尽管凭直观想象可能会出现例 1、例 2 那样“似是而非，似非而是”的结论，但也不能因噎废食。在对每一个定理、引理、推论作证明之前，都应尽量想象其合理的直观意义。直观解释虽然不能代替严格的论证，却会给我们的证明带来开阔思路的启迪，直观想象永远是数学各分支发现联系、揭示规律、猜测命题的重要依据和行之有效的手段之一。

4．既然《实变函数论》是《数学分析》研究范围、内容的扩展，研究方法的改进和完善，新旧知识之间就难免存在诸多内在联系。及时复习相关旧知识以达温故而知新的目的，注重体会如何借鉴旧方法来解决新问题的思路，同时特别注意新方法与旧方法实质区别之处，把握创新点。

5. 注意“下连上串，左顾右盼”。如在学习 R^n 中点之间的距离时，请先复习初中学的直线上两点间的距离公式，高中《平面解析几何》学的平面上两点间的距离公式，大学《空间解析几何》学的立体空间中两点间的距离公式即“下连”，然后浏览本课程的后继课程《泛函分析》的度量空间中的距离即“上串”，从而把握距离概念的实质。又如，在学习抽象测度 μ 的定义时, 验证概率统计中的概率是一种测度，子集中元素的个数是一种测度，非负可测函数关于任一种抽象测度在子集上的积分都是测度，并思考还有哪些问题实质上是测度轮问题，即“左顾右盼”。

6．无论是个案形式出现的例题解法，还是为主线服务的定理、引理、推论，还是本门课程的核心结论都得将具体方法抽象化、一般化成代普遍性的方法，从而实现通过一门课、甚至仅仅只是一个定理、公式的学习，达到掌握一类问题的解决方法之目的。

7. 遇到困难及时与同学讨论，或请老师释疑，不要拖延到问题成堆才来梳理，造成时间紧迫来不及、或见问题太多而丧失攻克难关勇气。

四、本教材的几点特色处理

1．在过去“区间体积”概念和“开集构造”理论基础上，引入了开集“体积”概念，为简化测度定义及性质讨论奠定了基础。

2．用$m^*E=\inf\{|G|\mid G$开，且$G\supset E\}$取代$m^*E=\inf\{\sum_{i=1}^{+\infty}|I_i|\mid\bigcup_{i=1}^{+\infty}I_i\supset E$，$I_i$为区间$\}$不仅使测度概念在保证实质不发生变化的前提下，形式上得到简化、直观化，更重要的是使得诸如$m^*I=|I|$等一系列命题的证明过程得到大大简化。

3．将大部分教材留到学了Fubini 定理时才讲的乘积空间的测度，提前到紧接着测度的概念和性质讲，以保证在讲可测函数时能证明可测函数的下方图形可测，从而最终保证直接用非负可测函数下方图形的测度规定其积分值。

4．直接用正、负部函数下方图形的测度之差规定积分值，不仅使得积分概念简单、直观、明了，让学生易于接受。同时也使得诸如并集积分等于各子集积分求和、Levi 定理等一系列命题的证明过程得到大大简化。

5．在本教材中不依赖Riemann 积分定义，直接从Lebesgue 积分定义出发证明计算积分的重要工具牛顿——莱布尼兹公式，为将来实现Lebesgue 积分取代Riemann 积分作必要的准备。同时也面对现在学生确实学了Riemann 积分的事实，研究了Riemann 积分和广义Riemann 积分与Lebesgue 积分关系。

6．将“不含端点的区间为开区间，包含所有端点的区间为闭区间”一般化为“不含边界点的集合为开集，包含所有边界点的集合为闭集”从而使概念直观化，学生易于理解其实质，开集与闭集的对偶性等定理证明被简化，思路直观化。

7．既注重知识的传授，又注重数学创新思维方法的挖掘和点拨。由于篇幅所限在此仅举部分例子予以说明之。

如在引入“依测度收敛”概念时，先讲：改造积分定义的目的一是为了扩展可积范围，二是为了使得操作更方便。对(R)积分而言，积分与极限交换顺序需要一个苛刻的条件：‘$f_n(x)$在E上一致收敛于$f(x)$’。从集合论的角度讲：‘$f_n(x)$在E上一致收敛于$f(x)$’是指$\forall\sigma>0$，$\exists N_0>0$，当$n>N_0$时，$E[|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]=\phi$，之所以我们认为‘一致收敛’条件苛刻，就在于它要求$E[|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]$从某项以后永远为空集。能否改成允许不空，甚至可以允许为正测度集，但必须满足$mE[|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]\to0(n\to+\infty)$呢？ 这就导致了“依测度收敛”这个新概念的产生”。展示了数学创新过程中一些重要的新概念引入时的直观思维方法。

又如在引入叶果落夫定理时，通过实例$f(x)=x^n\xrightarrow[\text{处处}]{n\to+\infty}0$于$[0,1)$，却不一致收敛出发究其原因是自变量越靠近0越收敛速度慢，只有更慢没有最慢，从而不可能一致收敛。但不难看出，只要挖去一个以1为右端点的小区间（1-δ，1）后就有收敛最慢点x=1-δ了，从而可以保证一致收敛了。著名的俄国数学家叶果落夫（ЕгОРОВ）发现任何几乎处处收敛的可测函数列都有类似的相应结果，这就是著名的叶果落夫定理。展示

了数学中一些重要结果的发现来源于常见简单例子的启发，即将特例抽象化、一般化后就会得出重要的带普遍性的结果。

再如对 Lebesgue 积分定义，先在绪论中指出 Riemann 积分的弊病，分析了产生弊病的原因，提出了解决此弊病的方法，即对 Lebesgue 改造积分定义的思路概括性作了介绍，当我们在第五章通过几何意义直接定义 Lebesgue 积分时，唯恐掩盖 Lebesgue 原始创新思路，及时指出“$mG_{(\Phi_n,E)}$ 便是 f 在分划 $T_n: E=\bigcup_{k=1}^{n2^n} E_k$ 下的小和 $s(f,T_n)$，即 $\int_E f d_x=\lim_{n\to\infty} mG_{(\Phi_n,E)}=\lim_{n\to\infty} s(f,T_n)$。这与定义(R)积分的分割、求和、取极限三大步骤基本相似；区别仅在于(R)积分直接将定义域分成区间，(L)积分可能是通过将值域分成区间后反过来将定义域分成有限个不一定是区间的集合。”不仅达到了前后呼应的目的，更重要的是展示了数学新体系形成过程中的“提出问题、分析问题、克服障碍，解决问题、完善方法、简化思路”数学创新过程。