

# 非 Markov 系统的可靠性仿真

刘东<sup>1</sup>, 熊伟<sup>1</sup>, 邢维艳<sup>2</sup>, 王鹏<sup>1</sup>, 张睿<sup>1</sup>

(1. 装备指挥技术学院重点实验室, 北京 101416; 2. 中国华阴兵器试验中心, 华阴 714200)

**摘要:** 在进行非 Markov 系统的可靠性仿真时, 为获得准确的状态转移时间抽样, 提出剩余分布的近似抽样(ASRD)方法, 利用多个均匀分布拟合一般形式的剩余分布, 通过拟合参数  $d$  调整抽样精度和抽样效率。在此基础上, 提出基于强制转移(FT)策略的 ASRD(FT-ASRD)仿真方法。多个算例结果表明, 当  $5 < d < 10$  时, FT-ASRD 相对于常规仿真方法具有更高的效率, 而且仿真结果的相对误差较小。

**关键词:** 强制转移; 可靠性仿真; 非 Markov 系统

## Reliability Simulation of Non-Markovian System

LIU Dong<sup>1</sup>, XIONG Wei<sup>1</sup>, XING Wei-yan<sup>2</sup>, WANG Peng<sup>1</sup>, ZHANG Rui<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory, Academy of Equipment Command & Technology, Beijing 101416; 2. China Huayin Ordnance Test Center, Huayin 714200)

**【Abstract】** In order to sample precisely the state transition time when simulating non-Markovian system, a new sampling method named Approximate Sampling for Residual Distribution(ASRD) method is put forward, in which several uniform distributions are used to approach general residual life distributions. The approach-coefficient  $d$  is used to adjust sampling precision and efficiency. Another method named Forced Transitions(FT) based ASRD(FT-ASRD) simulation method is brought forward to simulate high-reliable non-Markovian systems. FT-ASRD uses FT strategy to get the unreliability parameter. Several examples show that, when  $5 < d < 10$ , FT-ASRD is more efficient and has lower relative error compared with crude simulation methods.

**【Key words】** Forced Transitions(FT); reliability simulation; non-Markovian system

### 1 概述

复杂系统的可靠性仿真一直是可靠性工程中重点关注的问题<sup>[1]</sup>。非 Markov 系统是指部件的失效/维修时间不满足指数分布的系统。在仿真非 Markov 系统时, 一个主要的问题是如何通过剩余分布获得下一仿真时间。

文献[2]对剩余分布的抽样问题作了初步的探讨, 给出了具有特定参数的 Weibull 分布、 $\Gamma$ -分布、正态分布的反函数解析形式或近似形式, 但无法应用于具有任意参数的上述分布。文献[3]借助于罗必塔法则提出了一种有效的抽样剩余分布的方法。该方法事先利用常规抽样方法(如取舍法)确定一个阈值  $t_a$ , 当仿真时间小于  $t_a$  时, 利用常规抽样方法获得抽样时间, 当仿真时间大于  $t_a$  时, 则在剩余分布函数的导数基础上应用罗必塔法则抽样时间。这种混合抽样方法大大提高了仿真速度, 并得到了可信的仿真结果。然而, 对于高可靠系统,  $t_a$  通常具有较大的数值, 而在  $t_a$  之前进行的常规抽样方法总是会带来仿真效率低下的问题。文献[4]针对  $k/n:F$  非 Markov 系统的可靠性分析提出了基于失效率/维修率的仿真方法, 该方法仍旧要求部件的寿命服从指数分布, 以便能够基于失效率/维修率抽样系统的状态转移时间, 因此, 无法应用于任意分布的系统仿真过程。

有关非 Markov 系统的仿真目前均关注于常规的粗仿真方法(crude simulation), 例如软件工具 Raptor 7.0 即是使用粗仿真方法分析非 Markov 系统的可靠性。对于高可靠系统, 粗仿真方法具有很大的局限性。当用粗仿真方法仿真高可靠系统时, 必须利用大量的仿真次数<sup>[5]</sup>, 从而造成仿真效率较低。

本文针对非 Markov 系统的剩余分布抽样和高可靠非 Markov 系统的快速仿真问题探讨相应的解决方案。

### 2 Markov 系统的可靠性仿真模型

利用数字仿真方法仿真 Markov 系统的过程如下:

(1)用状态转移图表示系统的状态转移过程。令  $P_k(t)$  为系统在时刻  $t$  处于状态  $k$  的概率,  $\chi_{j,k}$  为系统从状态  $j$  转移到状态  $k$  的转移率, 即

$$\chi_{j,k} = \begin{cases} \lambda_i & \text{从 } j \text{ 到 } k \text{ 的转移中, 部件 } i \text{ 发生失效} \\ \mu_i & \text{从 } j \text{ 到 } k \text{ 的转移中, 部件 } i \text{ 维修完毕} \end{cases}$$

其中,  $\lambda_i$  和  $\mu_i$  分别表示部件  $i$  的失效率和维修率。而

$$\gamma_k = \sum_{j \neq k} \chi_{k,j} \quad (1)$$

(2)设当前时间为  $t$ , 当前状态为  $k$ , 利用剩余分布函数

$$C(t'|t) = 1 - e^{-\gamma_k(t'-t)} \quad (2)$$

和均匀分布的随机变量  $\zeta$  抽样下一时间  $t'$ , 即

$$t' = t - \frac{\ln(1-\zeta)}{\gamma_k} \quad (3)$$

(3)设状态  $k$  的出向转移(起始于  $k$  的转移)的个数为  $l$ , 由另一均匀分布的随机变量  $\xi$  根据下式抽样系统的下一状态:

**基金项目:** 国家“863”计划基金资助项目(2006AA704302); 国家自然科学基金资助项目(60904082)

**作者简介:** 刘东(1981-), 男, 讲师、博士, 主研方向: 系统仿真, 系统综合集成; 熊伟, 副教授、博士; 邢维艳, 工程师、硕士; 王鹏、张睿, 讲师、硕士

**收稿日期:** 2009-06-02 **E-mail:** ld5m@163.com

$$\frac{\sum_{j=1}^h \chi_{k,j}}{\gamma_k} \xi < \frac{\sum_{j=1}^{h+1} \chi_{k,j}}{\gamma_k}, h=0,1,\dots,l-1 \quad (4)$$

(4)如果  $t$  超过系统预计寿命  $T$  或者当前状态为吸收态, 结束该次仿真。否则转步骤(2)。

设仿真次数为  $N$ , 用

$$I_i(t < T) = \begin{cases} 1 & t < T \\ 0 & t = T \end{cases} \quad (5)$$

作为第  $i$  次的仿真结果, 则系统不可靠度的无偏估计为

$$\hat{U} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i(t < T) \quad (6)$$

### 3 剩余分布的近似抽样方法

剩余分布的近似抽样方法(Approximate Sampling for Residual Distribution, ASRD)如下:

对于任意分布函数  $F(t)$ , 设  $T$  为系统预计寿命。设  $d$  为正整数, 称为拟合系数, 令  $t_i = iT/d$ , ( $0 \leq i \leq d$ )。利用  $[t_i, t_{i+1}]$  区间内的均匀分布函数  $F_i(t)$ :

$$F_i(t) = \frac{F(t_{i+1}) - F(t_i)}{t_{i+1} - t_i} (t - t_i) + F(t_i) \quad (7)$$

拟合  $[t_i, t_{i+1}]$  时间段内的  $F(t)$ , 式中  $0 \leq i \leq d-1$ 。而对于  $[T, \infty)$  内的  $F(t)$ , 可以直接利用常数分布  $\{F_d; t=T+1, F \in [F(t_d), 1]\}$  替代。则系统状态转移时间可由下式抽样获得:

$$t' = \begin{cases} \frac{(t_{i+1} - t_i)(\zeta - F(t_i))}{F(t_{i+1}) - F(t_i)} + t_i & \zeta \in [F(t_i), F(t_{i+1})] \\ T+1 & \zeta \in [F(t_d), 1] \end{cases}$$

其中,  $0 \leq i \leq d-1$ ;  $\zeta$  为随机数。

### 4 高可靠非 Markov 系统的强制转移仿真方法

基于强制转移的 ASRD 仿真方法 (Forced Transitions based ASRD, FT-ASRD)如下:

在抽样非 Markov 系统状态转移时间时, 设当前状态为  $k$ , 当前时间为  $t$ 。设状态  $k$  的出向转移的个数为  $l$ ,  $l$  个转移对应的移出状态分别表示为  $k'_i$  ( $1 \leq i \leq l$ )。设  $c(k, k'_i)$  表示在从  $k$  到  $k'_i$  的转移过程中发生失效或维修完毕的部件。  $l$  个出向转移中具有  $m$  个失效转移和  $n$  个维修转移。用  $F_{c(k,k'_i)}(t)$  表示部件  $c(k, k'_i)$  在时刻  $t$  的累积失效概率,  $G_{c(k,k'_i)}(t)$  表示部件  $c(k, k'_i)$  在时刻  $t$  的累积维修概率。如果令  $C_{c(k,k'_i)}(t'|t)$  表示状态  $k$  第  $i$  个出向转移的条件概率, 则有:

$$C_{c(k,k'_i)}(t'|t) = \begin{cases} [F_{c(k,k'_i)}(t') - F_{c(k,k'_i)}(t)] / [1 - F_{c(k,k'_i)}(t)] & k \rightarrow k'_i \text{ 为失效转移} \\ [G_{c(k,k'_i)}(t') - G_{c(k,k'_i)}(t)] / [1 - G_{c(k,k'_i)}(t)] & k \rightarrow k'_i \text{ 为维修转移} \end{cases}$$

则系统在  $t'$  时刻转移到下一状态的条件概率可表示为

$$C(t'|t) = 1 - \prod_{i=1}^l (1 - C_{c(k,k'_i)}(t'|t)) \quad (8)$$

对式(8)应用强制转移(Forced Transitions, FT)策略, 则更新后的条件转移概率为

$$\tilde{C}(t'|t) = \frac{1 - \prod_{i=1}^l (1 - C_{c(k,k'_i)}(t'|t))}{1 - \prod_{i=1}^l (1 - C_{c(k,k'_i)}(T|t))} \quad (9)$$

则系统状态转移的发生时间将是对上式的抽样, 可采用 ASRD 方法进行。

为了获得统计结果的无偏估计, 需要利用权值  $\omega_i$  对上述仿真结果进行修正, 其中,  $i$  表示第  $i$  次仿真。在每次仿真开始时, 设置  $\omega_i$  的初值为 1。每发生一次强制转移时, 按下式修正第  $i$  次仿真的权值:

$$\omega_i \rightarrow \omega_i [1 - \prod_{j=1}^l (1 - C_{c(k,k'_j)}(T|t))] \quad (10)$$

设抽样得到的状态转移时间为  $t'$ , 则下一状态  $h$  可由下式抽样确定:

$$\frac{\sum_{i=1}^h \chi_{k,i}(t')}{\sum_{i=1}^l \chi_{k,i}(t')} \xi < \frac{\sum_{i=1}^{h+1} \chi_{k,i}(t')}{\sum_{i=1}^l \chi_{k,i}(t')} \quad (11)$$

其中,  $h=0, 1, \dots, l-1$ 。

则系统不可靠度的无偏估计为

$$\hat{U} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [I_i(t < T) \cdot \omega_i] \quad (12)$$

## 5 算例分析

**算例 1** 某一航空电子系统(Aviation Electric System, AES)的结构如图 1 所示。

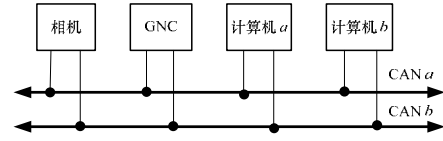


图 1 AES 的结构

AES 的搭载设备包括相机(C)、姿态导航与控制子系统(GNC, 标识为 G)和 2 台计算机(标识为  $O_a, O_b$ )。所有设备通过 2 条 CAN 总线(标识为  $N_a, N_b$ )连接。  $O_a$  与  $O_b$  互为热备,  $N_a$  与  $N_b$  相互冗余。计算机系统和 CAN 总线均可以通过重新上电获得修复。在 AES 系统中, 任何子系统的失效将导致整个系统的失效。设  $C$  的寿命服从  $\lambda=2.0 \times 10^{-7}$  的指数分布,  $G$  的寿命服从  $\lambda=2.7 \times 10^{-7}$  的指数分布,  $O$  的寿命服从  $k=5, \lambda=4.3 \times 10^{-4}$  的  $\Gamma$ -分布,  $N$  的寿命服从  $k=5, \lambda=9.7 \times 10^{-4}$  的  $\Gamma$ -分布,  $N$  的维修时间服从  $m=0.5, t_0=400$  的 Weibull 分布。求系统在  $T=25\ 000$  时的不可靠度。

设  $d=10$ , 由 FT-ASRD 和 Raptor 仿真获得的不可靠度结果如表 1 所示。可以看出, 如果要仿真高可靠系统, 常规的仿真方法需要大量的仿真次数才能抽样到系统失效的发生, 而本文的 FT-ASRD 方法能够在有限的仿真次数内获得系统的可靠性参数。此外, 当仿真次数为  $1 \times 10^4$  时, FT-ASRD 方法花费的时间为 Raptor 的  $4.8/3\ 102 \approx 1/650$ 。

表 1 FT-ASRD 与 Raptor 对算例 1 的仿真结果

	仿真次数为 $1 \times 10^4$		仿真次数为 $1 \times 10^5$	
	FT-ASRD	Raptor	FT-ASRD	Raptor
失效次数	$1 \times 10^4$	0	$1 \times 10^5$	1
不可靠度	$3.886 \ 2 \times 10^{-4} \pm 2.3\%$	0	$3.880 \ 4 \times 10^{-4} \pm 2.1\%$	$1.0 \times 10^{-5}$
仿真时间/s	4.8	3 102	47	30 000

**算例 2** 考虑算例 1 的系统, 当  $d=1\ 000$  时, 采用 FT-ASRD 得到的系统不可靠度  $U=3.887 \ 5 \times 10^{-4}$ , 花费时间  $t=61.1$  s。在不同的  $d$  下, 算例 1 的仿真结果如图 2 所示。其中,  $Re$  表示在不同  $d$  下获得的仿真结果相对于  $d=1\ 000$  时仿真结果的相对误差;  $r$  表示在不同  $d$  下仿真时间与  $d=1\ 000$  时仿真时间的比值。由图 2(a)知, 当  $5 \leq d$  时, 仿真结果的相对误差  $Re < 1\%$ 。由图 2(b)知, 当  $d \geq 10$  时, 所需的仿真时间较  $d=1\ 000$  时花费的仿真时间的比值  $r < 0.07$ 。

因此, 可以得出结论: 在应用 FT-ASRD 方法进行可靠性仿真时, 可将拟合参数设定为  $5 \leq d \leq 10$ , 不仅花费较少的仿真时间, 而且能够获得较高的仿真精度。

(下转第 12 页)