

# 基于 EM 的导频数据联合辅助频偏估计算法

刘 波, 胡贻鹏, 于宏毅

LIU Bo, HU Yun-peng, YU Hong-yi

信息工程大学 信息工程学院, 郑州 450002

Department of Communication Engineering, Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China

E-mail: niroleliu@126.com

LIU Bo, HU Yun-peng, YU Hong-yi. EM-based frequency offset estimation algorithm with pilot-data assisted jointly. *Computer Engineering and Applications*, 2010, 46(2): 125-128.

**Abstract:** A frequency offset estimation algorithm with pilot-data assisted jointly based on the framework of the Expectation-Maximum(EM) algorithm is proposed in order to deal with the conflict between estimation accuracy and spectral efficiency for burst-mode transmission systems. Furthermore, the improved recursive EM estimation algorithm is proposed. Theoretical analysis and simulation results show that it is more accurate to estimate frequency offset from both pilot symbols and data symbols than from pilot symbols only. The joint estimator attains the CRLB with a large number of pilot symbols at moderate high Signal-to-Noise Ratios (SNR), and is superior in performance to the non-data aided blind estimator at low SNR.

**Key words:** Expectation-Maximum(EM) algorithm; frequency offset estimation; joint estimation; data-aided; blind estimation

**摘 要:** 针对突发通信系统在保证频率估计精度和频谱效率时存在的矛盾, 提出了一种基于 EM 算法结构的导频与数据联合辅助的频偏估计算法, 在此基础上进而提出了改进的递归 EM 估计算法。理论分析和仿真实验表明, 相比于仅使用导频的估计算法, 联合使用导频和数据进行频偏估计的性能更加精确, 在高信噪比下达到了使用更多导频符号估计的克拉美罗下界, 并且在低信噪比条件下, 其性能要优于非数据辅助的盲估计算法。

**关键词:** 期望最大化算法; 频偏估计; 联合估计; 数据辅助; 盲估计

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2010.02.038 文章编号: 1002-8331(2010)02-0125-04 文献标识码: A 中图分类号: TN91

突发通信模式正广泛应用于 TDMA 系统和无线自组织网络等通信系统中。在大多数的突发通信系统中, 每个突发数据包的某些位置中都放置了一定数量的导频符号用于同步参数估计, 因此基于导频符号的数据辅助(Data-Aided, DA)估计算法得到了广泛的研究<sup>[1-3]</sup>。通过增加突发中的导频符号个数可以提高估计的精确性, 从而获得更好的系统性能, 但这样降低了系统的频谱效率, 同时造成传输时延的增大, 对于频谱利用率要求十分苛刻的无线突发通信非常不利。采用非数据辅助(Non-Data-Aided, NDA)的盲估计算法无需导频符号从而提高了频谱效率, 但是由于其非线性运算的影响, 该类算法性能往往随着信噪比的降低严重恶化<sup>[4-5]</sup>。出于对以上问题的考虑, 为了能够在不使用较多导频符号的情况下获得较高的估计精度, 联合使用导频符号和未知数据符号信息进行参数估计值得研究。期望最大化算法(Expectation-Maximum, EM)在不完全数据情况下, 能够迭代的解决一些复杂的最大似然估计问题<sup>[6-7]</sup>, 并越来越多的应用于通信信号处理领域。文献[8-10]研究了衰落信道下基于 EM 算法的联合序列检测与信道估计问题。在 EM 算法的基础上, Zamiri-Jafarian 等推导了一种递归-EM 信道参数估

算法<sup>[11]</sup>, 提供了渐进最大似然估计的递归解决办法。

研究了基于 EM 的导频与数据联合辅助的载波频偏估计算法, 有效地利用了未知数据信息进行参数的联合估计。在给出普通形式的算法基础上进而提出了一种递归 EM 的频偏估计算法。与前者一次全部接收并保存整个突发数据包然后再处理的批处理方式不同, 递归 EM 估计算法根据当前接收到的部分数据样本进行参数估计, 随着数据样本的更新, 递归的估计载波频偏, 从而提高了实时应用环境下的计算效率并降低了系统存储空间, 同时避免了因批处理方式一次性过多的引入数据符号数量而导致算法快速收敛到局部极值点从而影响估计性能<sup>[7,11]</sup>, 保证了估计精度随着引入未知数据符号数的增加而提高。

## 1 信号模型

考虑 AWGN 信道下的 MPSK 信号, 假设发送和接收端之间的滤波器完全匹配, 整个信道响应满足 Nyquist 条件。经过匹配滤波和理想定时采样后, 接收信号的等效基带表示为:

$$r_k = a_k e^{j(\omega_k + \theta)} + n_k, k=0, \dots, N_p-1, \dots, N-1 \quad (1)$$

基金项目: 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60472064); 国家部委预研基金资助项目。

作者简介: 刘波(1977-), 男, 博士生, 主要研究方向为信号检测与估计; 胡贻鹏(1978-), 男, 博士, 研究方向为无线通信; 于宏毅(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 中国计算机学会高级会员, 中国计算机学会无线传感器网络专业委员会委员, 研究方向为无线通信、无线传感器网络。

收稿日期: 2008-07-30 修回日期: 2008-10-13

其中,  $\{a_k \in C\}$  为发送的零均值归一化方差且独立同分布的MPSK符号序列,  $C$  为  $M$  点的信号星座空间; 当  $k=\{0, 1, \dots, N_p-1\}$  时,  $\{a_k\}=\mathbf{P}$  为已知的导频符号; 当  $k=\{N_p, \dots, N-1\}$  时,  $\{a_k\}=\mathbf{D}$  为未知的数据符号;  $\omega$  为按采样频率  $f=1$  归一化后的载波频偏,  $\theta$  为载波相位。加性零均值复高斯白噪声样本  $n_k$  的协方差矩阵为  $\mathbf{R}_n = \sigma^2 \mathbf{I}$ , 其中噪声方差  $\sigma^2 = E\{|n_k|^2\}$ ,  $\mathbf{I}$  为  $N \times N$  的单位矩阵。假设载波相位  $\theta$  已知, 不失一般性设  $\theta=0$ 。

将模型(1)重写成如下的矩阵形式:

$$\mathbf{r} = \Psi_\omega \mathbf{A} + \mathbf{n} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{r}=[r_0, r_1, \dots, r_{N-1}]^T$ ,  $\mathbf{n}=[n_0, n_1, \dots, n_{N-1}]^T$

$$\Psi_\omega = \text{diag}\{1, e^{j\omega}, e^{j2\omega}, \dots, e^{j(N-1)\omega}\}$$

$$\mathbf{A}=[a_0, \dots, a_{N_p-1}, \dots, a_{N-1}]^T = [\mathbf{P}^T \quad \mathbf{D}^T]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{P}=[a_0, \dots, a_{N_p-1}]^T, \mathbf{D}=[a_{N_p}, \dots, a_{N-1}]^T$$

因此联合似然函数  $p(\mathbf{r}|\mathbf{D}, \omega)$  为:

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{D}, \omega) = \frac{1}{\pi^N |\mathbf{R}_n|} \exp\{-[\mathbf{r} - \Psi_\omega \mathbf{A}]^H \mathbf{R}_n^{-1} [\mathbf{r} - \Psi_\omega \mathbf{A}]\} \quad (4)$$

其中  $(\cdot)^H$  表示矩阵的共轭转置。

## 2 导频与数据联合辅助频偏估计算法

### 2.1 普通 EM 的估计算法

根据文献[6-7]所描述的 EM 算法结构, 将未知数据符号  $\mathbf{D}$  视为缺损变量, 与观测数据  $\mathbf{r}$  共同构成完备数据  $\mathbf{x}=(\mathbf{r}, \mathbf{D})$ 。考虑到数据符号  $\mathbf{D}$  和待估参数矢量  $\omega$  独立不相干, 由式(4)及 Bayes 准则, 完全数据  $\mathbf{x}$  的对数似然函数为:

$$\ln p(\mathbf{x}|\omega) = \ln p(\mathbf{r}|\mathbf{D}, \omega) p(\mathbf{D}|\omega) =$$

$$\ln \left\{ \frac{1}{\pi^N |\mathbf{R}_n|} \exp\{-[\mathbf{r} - \Psi_\omega \mathbf{A}]^H \mathbf{R}_n^{-1} [\mathbf{r} - \Psi_\omega \mathbf{A}]\} \right\} + \ln p(\mathbf{D}) \quad (5)$$

在第  $i$  次迭代过程中, EM 算法的两个步骤分别为下式所示:

(1) E 步骤, 计算期望函数  $Q$ :

$$Q(\omega|\omega^i) = E[\ln p(\mathbf{x}|\omega) | \mathbf{r}, \omega^i] \quad (6)$$

(2) M 步骤, 求解最大值:

$$\omega^{i+1} = \text{argmax}_\omega Q(\omega|\omega^i) \quad (7)$$

E 步骤和 M 步骤交替重复进行直至  $\omega$  对前后两次的估计结果满足条件  $\|\omega^i - \omega^{i+1}\| < \varepsilon$ ,  $\|\cdot\|$  和  $\varepsilon$  为根据需要预先确定的度量及其具体值。

将式(5)代入式(6)中, 忽略所有与  $\omega$  无关的项, 整理可得期望函数  $Q(\omega, \omega^i)$  为:

$$Q(\omega, \omega^i) = E[\text{Re}(\mathbf{A}^H \Psi_\omega^H \mathbf{r}) | \mathbf{r}, \omega^i] = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} E(a_k^* | \mathbf{r}, \omega^i) r_k e^{-j\omega k} \right\} \quad (8)$$

上式中,  $\text{Re}[\cdot]$  表示取实部。定义符号  $a_k$  的后验概率均值  $\lambda_k^i$  为:

$$\lambda_k^i \triangleq E(a_k | \mathbf{r}, \omega^i) = \sum_{\alpha_m \in M} \alpha_m P(a_k = \alpha_m | \mathbf{r}, \omega^i) \quad (9)$$

式(11)中,  $P(a_k = \alpha_m | \mathbf{r}, \omega^i)$  为第  $k$  个符号  $a_k$  在给定观测序列  $\mathbf{r}$  和第  $i$  次迭代得到的估计  $\omega^i$  的条件下的边缘后验概率,  $\alpha_m$  为星座空间  $C = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$  中的第  $m$  个可能取值。因此式(8)可以重写为:

$$Q(\omega, \omega^i) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda_k^i)^* r_k e^{-j\omega k} \right\} \quad (10)$$

对式(10)求解最大化问题, 得到新的频偏估计子  $\omega^{i+1}$  为:

$$\hat{\omega}^{i+1} = \text{argmax}_\omega \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda_k^i)^* r_k e^{-j\omega k} \right\} \quad (11)$$

对于已知的导频符号序列  $\{a_k | k=0, 1, \dots, N_p-1\}$ , 容易得到

其后验概率均值即为  $\lambda_k^i = a_k$ ; 对于未知数据符号序列  $\{a_k | k=N_p, \dots, N-1\}$ , 假设各符号相互独立而且在星座空间  $C$  中等概取值, 即  $P(a_k = \alpha_m) = M^{-1}$ , 以未编码的 BPSK 调制为例, 由全概率公式, 符号  $a_k$  的后验概率均值  $\lambda_k^i$  为:

$$\lambda_k^i = \sum_{\alpha_m \in M} \alpha_m P(a_k = \alpha_m | r_k, \omega^i) = \frac{p(r_k | a_k = 1, \omega^i) - p(r_k | a_k = -1, \omega^i)}{p(r_k | a_k = 1, \omega^i) + p(r_k | a_k = -1, \omega^i)} = \tanh \left[ \frac{2}{\sigma} \text{Re}(r_k e^{-j\omega^i k}) \right] \quad (12a)$$

同理可得, 对于 QPSK 调制, 符号  $a_k$  的后验概率均值  $\lambda_k^i$  为:

$$\lambda_k^i = \frac{\sinh \left[ \frac{2}{\sigma} \text{Re}(r_k e^{-j\omega^i k}) \right] + j \cdot \sinh \left[ \frac{2}{\sigma} \text{Re}(r_k e^{-j\omega^i k}) \right]}{\cosh \left[ \frac{2}{\sigma} \text{Re}(r_k e^{-j\omega^i k}) \right] + \cosh \left[ \frac{2}{\sigma} \text{Im}(r_k e^{-j\omega^i k}) \right]} \quad (12b)$$

综上所述, 基于 EM 算法结构的导频与数据联合辅助频偏估计算法过程描述如下:

(1) 设定  $i=0$ , 选取  $\omega^0$  为初值, 根据式(12)计算未知数据符号的后验概率均值  $\lambda_k^0$ ;

(2) 根据式(11)计算  $\omega^{i+1}$ ;

(3) 计算  $\lambda_k^{i+1}$  并回到第(2)步, 重复以上步骤直到算法收敛。

显然, 式(11)所示的联合辅助频率估计子可以通过新程序列  $\{(\lambda_k^i)^* r_k, 0 \leq k \leq N-1\}$  的离散傅里叶变换(DFT)计算获得。初始值  $\omega^0$  可以根据已知的导频符号通过经典的 DA 估计算法得到<sup>[1-3]</sup>, 也可以选取为任意值。

### 2.2 递归 EM 的估计算法

前文所述的普通 EM 估计算法一次全部接收并保存整个突发数据包  $\mathbf{r}=[r_0, r_1, \dots, r_N]^T$  后, 将  $N_D$  个未知数据符号的后验概率均值  $\{\lambda_k^i\}$  全部代入到式(6)、(7)中进行迭代计算, 这样的数据批处理方式存在两方面的缺陷: 一是降低了在一些实时应用环境下的计算效率, 需要增加系统的存储空间; 二是以该种方式一次引入未知数据符号过多时, 会导致算法快速收敛到局部极值点, 从而导致算法估计性能的恶化<sup>[6,11]</sup>。

为了解决上述问题, 在此基础上提出了一种递归形式的 EM 频偏估计算法, 该算法基于当前  $k$  时刻接收到的数据  $\mathbf{r}_k = [r_0, r_1, \dots, r_k]^T$ , 根据式(6)、(7)进行  $i$  次迭代, 直至算法收敛或使得  $\omega_{k|k}^{i+1} = \omega_{k|k}^i$ ; 第  $k+1$  时刻, 初值设置为  $\omega_{k+1|k+1}^0 = \omega_{k|k}^{i+1}$ , 然后根据更新的接收数据  $\mathbf{r}_{k+1} = [r_0, r_1, \dots, r_{k+1}]^T$  继续进行新一轮的迭代。改进的递归 EM 算法的两个步骤如下所示:

(1) E 步骤, 计算期望函数:

$$Q_k(\omega_k, \omega_{k|k}^i) = E[\ln p(\mathbf{x}_k | \omega_k) | \mathbf{r}_k, \omega_{k|k}^i] = \text{Re} \left\{ \sum_{t=0}^k (\lambda_t^i)^* r_t e^{-j\omega_k t} \right\} \quad (13)$$

(2) M 步骤, 求解最大值:

$$\hat{\omega}_{k|k}^{i+1} = \underset{\omega_k}{\operatorname{argmax}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=0}^k (\lambda_l^i)^* r_l e^{-j\omega_l t} \right\} \quad (14)$$

由上所述, 将改进的递归 EM 联合估计算法过程描述如下:

- (1) 在  $k$  时刻, 根据 (13)、(14) 两式设定  $i=0$ , 选取  $\omega_k^0$  为初值, 根据式 (14) 计算  $\lambda_k^0$ ;
- (2) 根据式 (14) 计算  $\omega_{k|k}^{i+1}$ ;
- (3) 计算  $\lambda_k^{i+1}$  并回到第 (2) 步, 重复以上步骤直到算法收敛, 结束当前递归过程;
- (4) 在  $k+1$  时刻, 设定  $\omega_{k+1|k+1}^0 = \omega_{k|k}^{i+1}$  作为下一次递归过程的迭代初值, 根据更新的接收数据重复步骤 (1)、(2)、(3)。

### 3 性能仿真

为了验证提出的导频和数据联合辅助的频偏估计算法性能, 考虑如下的 Monte-Carlo 仿真方案: 在高斯白噪声信道环境下, 未编码信号调制方式为 BPSK。EM 估计算法的初值  $\omega^0$  和递归 EM 算法的初值  $\omega_{N_p, N_d}^0$  均设为 0。

图 1 给出了普通 EM 估计算法和递归 EM 估计算法 (REM) 的均值性能。仿真信噪比设定为 5 dB, 导频符号数  $N_p=5$ , 联合使用数据符号  $N_d=16$ 。对于递归 EM 算法而言, 其递归次数即为使用的数据符号个数, 每次递归过程中只利用 1 个数据符号。

两种算法的两步迭代次数均为 4。以理想曲线  $E[\hat{f}] = f$  作为参考, 两种 EM 算法具有较大的无偏估计范围, 均达到了符号速率的  $\pm 40\%$ 。

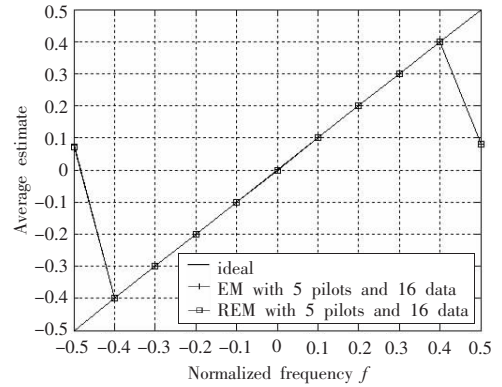


图 1 联合估计算法均值性能曲线

图 2 给出了 EM 和 REM 两种联合估计算法均方误差性能曲线 (MSE)。仿真结果与相同信噪比下 AWGN 信道频率估计的克拉美罗下界 (CRLB)<sup>[1]</sup>、数据辅助最大似然频率估计 (MLE)<sup>[1]</sup> 以及最佳盲载波估计 (NDA)<sup>[6]</sup> 结果进行对比。结果表明, 由于联合使用了导频 ( $N_p=5$ ) 和数据 ( $N_d=4, 8$ ) 两部分信息, 相比于仅使用导频的 MLE, 联合估计算法具有更高的估计精度, 并且在较高信噪比下时, 算法性能达到了使用 ( $N_p+N_d$ ) 个导频符号的 MLE 性能以及相应的 CRLB; 当所使用的总的符号数相同时, 给出的联合估计算法与盲载波估计算法相比, 两者 MSE 性能在高信噪比下几乎相同, 且在低信噪比情况下性能要明显好于后者。

图 3 给出了普通 EM 算法与递归 EM 算法的 MSE 性能比较。导频符号数为 5, 分别引入 4 个、8 个、16 个和 24 个未知数据符号进行联合估计。仿真结果表明: 当一次联合使用的数据

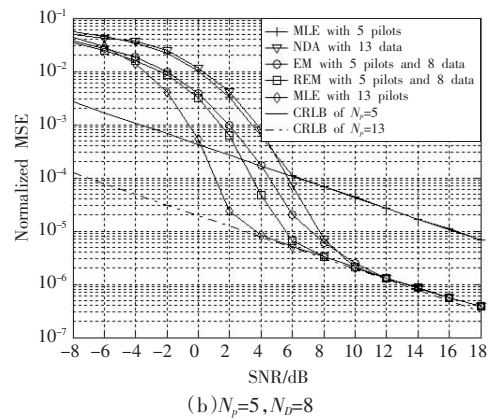
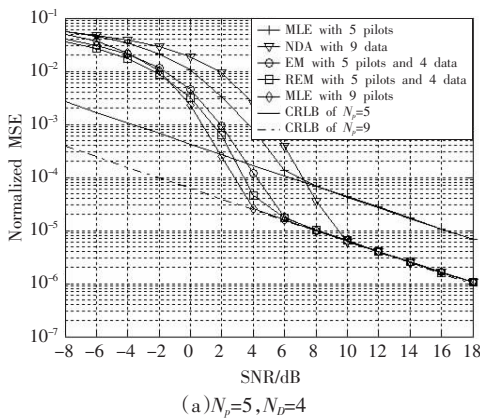


图 2 均方误差 MSE 与信噪比的关系曲线

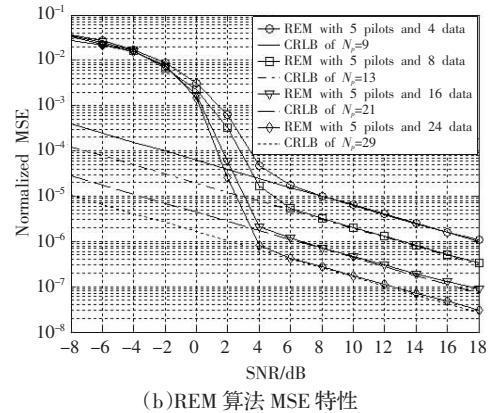
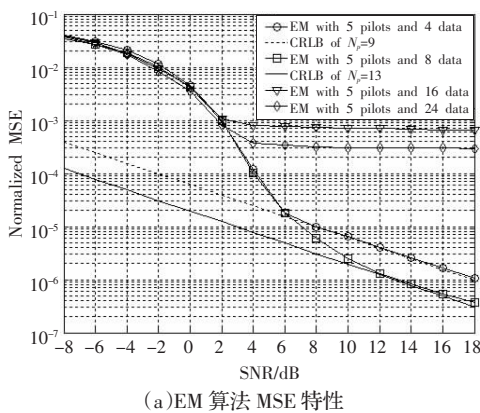


图 3 均方误差 MSE 与信噪比的关系曲线



符号数量过多时,普通的 EM 算法性能不但不能随着引入数据符号数量的增多而得到提升,反而发生了恶化,文献[6-7]分析了 EM 算法的收敛特性并指出,当引入过多的未知数据符号(缺损变量)时,EM 算法容易使得似然函数快速收敛到局部极值点,从而导致估计性能恶化。而改进的递归 EM 算法在每次递归过程中只利用了 1 个未知数据符号进行迭代估计,随着递归过程的进行,不断更新接收数据样本,引入新的数据符号,算法的估计性能仍然得到明显的改善,而且在较高信噪比下接近使用更多导频符号的 CRLB。

#### 4 结束语

基于 EM 算法结构,研究了一种能够有效联合利用未知数据符号与已知导频符号进行载波频偏估计的联合估计算法。与传统的仅利用导频符号的最大似然估计算法相比,联合估计算法无需增加导频符号个数也能有效地提高估计性能,在平衡估计精度和系统频谱效率上达到了较好的折中;另外,在低信噪比情况下,算法性能优于全盲估计算法。同时,针对所给出的普通 EM 联合估计算法存在实时计算效率低和容易快速收敛到局部极值点从而影响估计性能的缺陷,进而提出了改进的递归 EM 估计算法,以递归更新的方式引入数据符号,能有效地克服上述问题。

#### 参考文献:

- [1] Rife D,Boorstyn R.Single-tone parameter estimation from discrete-time observations[J].IEEE Trans Inform Theory,1974,20(5):591-598.
- [2] Ying Y,Ghogho M.Optimal pilot placement for frequency offset es-

timation and data detection in burst transmission systems[J].IEEE Commun Letters,2005,9(6):549-551.

- [3] You Y H,Hong D K,Kang S J,et al.A simplified autocorrelation-based single frequency estimator[J].IEICE Trans Commun,2006,E89-B(7):2096-2098.
- [4] Ciblat P,Ghogho M,Blind NLLS carrier frequency-offset estimation for QAM,PSK, and PAM modulations:Performance at low SNR[J].IEEE Trans Commun,2006,54(10):1725-1730.
- [5] Wang Y,Serpedin E,Ciblat P.Optimal blind carrier recovery for MPSK burst transmissions[J].IEEE Trans Commun,2003,51(9):1571-1581.
- [6] Dempster A,Laird N,Rubin D.Maximum-likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J].J Roy Statist Soc,1977,39:1-17.
- [7] Wu C F.On the convergence properties of the EM algorithm[J].Ann Stat,1983,11(1):95-103.
- [8] Nissila M,Pasupathy S.Adaptive bayesian and EM-based detectors for frequency-selective fading channels[J].IEEE Trans Commun,2003,51(8):1325-1336.
- [9] Cozzo C,Hughes B L.Joint channel estimation and data detection in space-time communications[J].IEEE Trans Commun,2003,51(8):1266-1270.
- [10] Dogan H,Panayiri E,Cirpan H A.EM-based map channel estimation and data detection for downlink MC-CDMA systems[C]//WCNC'07.Hong Kong:IEEE,2007:227-231.
- [11] Zamiri-Jafarian H,Pasupathy S.EM-based recursive estimation of channel parameters[J].IEEE Trans Commun,1999,47(9):1297-1302.

(上接 28 页)

#### 4.2 改进后的 MC 方法

针对脊柱 CT 数据  $512 \times 512 \times 103$  (Dicom3.0),在改进后的 MC 方法基础上进行 Decimate 面片消减,其效果如图 15 所示。

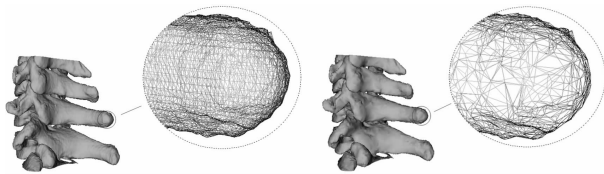


图 15 面片消减前后网格结构变化示意图

其中,精简前的三角面片总量为:530 081,数据文件大小为 19.1 M;精简后的三角面片数量为:113 004,数据文件大小为 5.20 M。精简后的面片数为原来总数的 28.32% ( $113\ 004/530\ 081=28.32\%$ ),这对于网络传输或是术前规划、教学演示来说,重构效果都是不错的。

#### 5 结语

以脊柱 CT 图像为具体研究对象,结合其应用背景所要求的重构需求,分析了原始 MC 方法中 15 基本情形在重构过程中的出现频率,以及各情形对重构结果可能的影响,从而确定 MC 方法的改进方向。

利用渐近线判别式和插值函数空间连续性解决体面二义性问题,并进一步基于对象相关性改进原始 MC 方法中 cube 的检索路径,避免不必要的运算,提高了重构质量;采用简化后的

Decimate 算法在保证拓扑正确前提下进行网格消减。有效地解决了原始 MC 方法在脊柱三维重构中出现的表面破损和三角面片过多的问题,获得了满意的重构效果。

#### 参考文献:

- [1] Lorensen W E,Cline H E.Marching cubes:A high resolution 3D surface construction algorithm[J].Computer Graphics,1987,21(3):163-169.
- [2] Durst M J.Additional reference to marching cubes [J].Computer Graphics,1988,22(2):72-73.
- [3] Nielson G M,Hamann B.The asymptotic decider:Resolving the ambiguity in marching cubes[C]//Proceedings of Visualization'91,San Diego,CA,1991:83-91.
- [4] Natarajan B K.On generating topologically consistent isosurfaces from uniform samples[J].The Visual Computer,1994,11(1):52-62.
- [5] Chernyaev E V.Marching cubes 33:Construction of topologically correct isosurfaces,Technical Report CERN CN 95-17[R].CERN,1995.
- [6] Nielson G M.On marching cubes[J].Visualization and Computer Graphics,2003,9(3):283-297.
- [7] 孙伟,张彩明,杨兴强.Marching Cubes 算法研究现状[J].计算机辅助设计与图形学学报,2007,7(19):947-952.
- [8] 徐晓玲,李现民.体素重建中的快速移动立方体方法[J].系统仿真学报,2002,4(14):509-513.
- [9] Schroeder W J,Zarge J A,Lorensen W E,et al.Decimation of triangle meshes[J].Computer Graphics,1992,26(2):65-70.