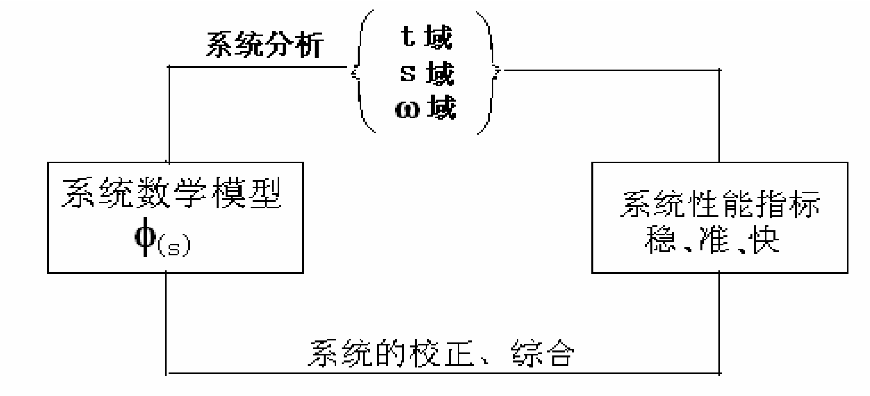
第三章　线性系统的时域分析法

●　时域分析法在经典控制理论中的地位和作用



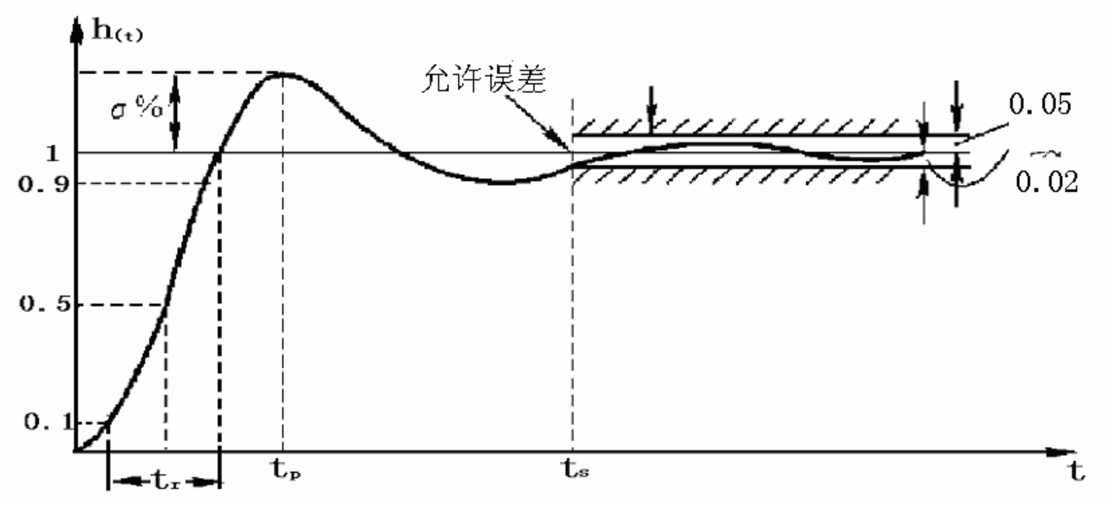
时域分析法是三大分析方法之一，在时域中研究问题，重点讨论过渡过程的响应形式。

● 时域分析法的特点：1).直观、精确。2).比较烦琐。

§3.1 概述

1. 典型输入

2. 性能指标



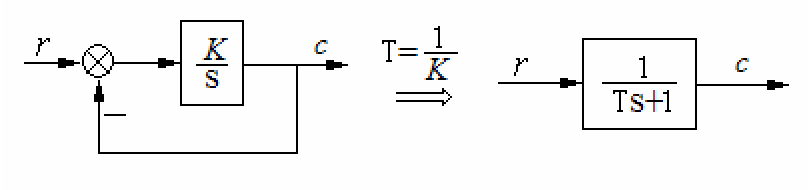
•稳→基本要求

• 准 $\rightarrow$ 稳态要求：$e_{ss}\downarrow$

• 快 $\rightarrow$ 过渡过程要求 $\begin{cases}\sigma\% = \dfrac{h(t_p)-h(\infty)}{h(\infty)}\times\%\downarrow \\ t_s\downarrow\end{cases}$

§3.2 一阶系统的时域响应及动态性能

设系统结构图如右所示



开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{s}$

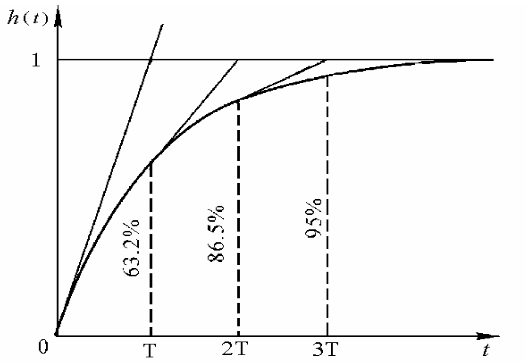
闭环传递函数 $\Phi(s)=\dfrac{\frac{K}{s}}{1+\frac{K}{s}}=\dfrac{K}{s+K}=\dfrac{\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T}}=\dfrac{1}{Ts+1}\quad(\lambda=-\dfrac{1}{T})$

$r(t)=1(t)$时：

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{\frac{1}{T}}{s(s+\frac{1}{T})}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

$\therefore c(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}\qquad c(0)=0,c(\infty)=1$

$c'(t)=\dfrac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}\qquad c'(0)=\dfrac{1}{T}$



依 $h(t)$ 特点及 t_s 定义有：

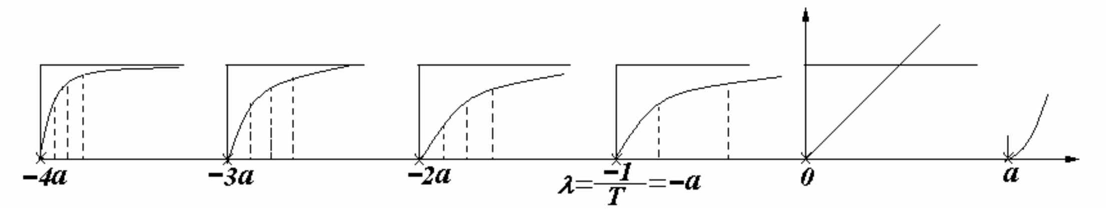
$h(t_s)=1-e^{-\frac{1}{T}t_s}=0.95$

$e^{-\frac{1}{T}t_s}=1-0.95=0.05$

$-\dfrac{1}{T}t_s=\ln 0.05=-3$

$\therefore t_s=3T$

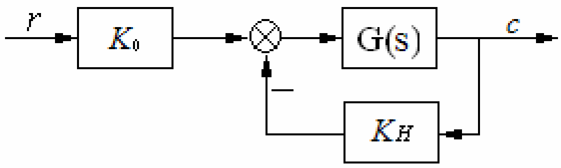
一阶系统特征根 $\lambda=-\dfrac{1}{T}$ 分布与时域响应的关系：



• $\lambda=0$时　$C(s)=\Phi(s).R(s)=\frac{1}{s}.\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2}$　　$h(t)=t$

• $\lambda=a$时　$C(s)=\frac{a}{s(s-a)}=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-a}$　　$h(t)=-1+e^{at}$

例1　　已知系统结构图如右



其中：$G(s)=\frac{10}{0.2s+1}$

加上K_0,K_H环节，使t_s减小为原来的 0. 1 倍，且总放大倍数不变，求K_0,K_H

解：依题意，要使闭环系统$t_s^*=0.1\times0.2=0.02$，且闭环增益=10。

$$\Phi(s)=K_0.\frac{G(s)}{1+K_HG(s)}=K_0.\frac{\frac{10}{0.2s+1}}{1+\frac{10K_H}{0.2s+1}}=\frac{10K_0}{0.2s+1+10K_H}$$

$$=\frac{10K_0/(1+10K_H)}{\frac{0.2}{1+10K_H}s+1}$$

令$\begin{cases}T=\frac{0.2}{1+10K_H}=0.02\\K=\frac{10K_0}{1+10K_H}=10\end{cases}$　联立解出$\begin{cases}K_H=0.9\\K_0=10\end{cases}$

例2　　已知某单位反馈系统的单位阶跃响应为

$$h(t)=1-e^{-at}$$

求(1). 闭环传递函数$\Phi(s)$；(2). 单位脉冲响应；(3). 开环传递函数。

解：$(1)k(t)=h'(t)=ae^{-at}$

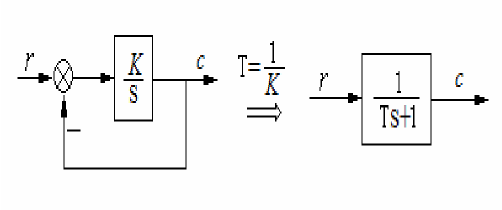
$(2)\Phi(s)=L[k(t)]=\frac{a}{s+a}$

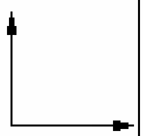
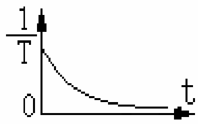
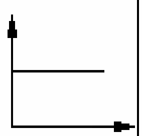
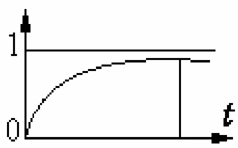
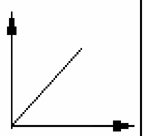
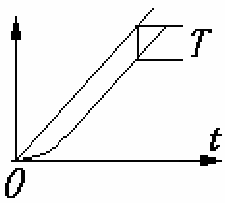
$$(3)\Theta\ \Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)} \qquad \therefore \Phi(s)+\Phi(s)G(s)=G(s) \qquad \Phi(s)=[1-\Phi(s)]G(s)$$

$$\therefore G(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}=\frac{\frac{a}{s+a}}{1-\frac{a}{s+a}}=\frac{a}{s+a-a}=\frac{a}{s}$$

一阶系统分析　　开环传递函数　$G(s)=\dfrac{K}{s}$

闭环传递函数　$\Phi(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$



	$r(t)$	$R(s)$	$C(s)=\Phi(s)\cdot R(s)$	$c(t)$	$c'(t)\big\|_{t=0}$	$e_{ss}=r-c\big\|_{t=\infty}$
1	$\delta(t)$ 	1	$\dfrac{1}{Ts+1}=\dfrac{\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T}}$	$h(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}$ 	$\dfrac{-1}{T^2}e^{-\frac{1}{T}t}\Big\|_{t=0}=\dfrac{-1}{T^2}$	$\delta(t)-\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}\Big\|_{t=\infty}=0$
2	$1(t)$ 	$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{1}{s(Ts+1)}=\dfrac{\frac{1}{T}}{s(s+\frac{1}{T})}$ $=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+\frac{1}{T}}$	$h(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}$  $t_s=3T$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}\Big\|_{t=0}=\frac{1}{T}$	$e^{-\frac{1}{T}t}\Big\|_{t=\infty}=0$
3	t 	$\dfrac{1}{s^2}$	$\dfrac{1}{s^2(Ts+1)}=\dfrac{\frac{1}{T}}{s^2(s+\frac{1}{T})}$ $=\dfrac{1}{s}-\dfrac{T}{s}+\dfrac{T}{s+\frac{1}{T}}$	$h(t)=t-T+Te^{-\frac{1}{T}t}$ 	$1-\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}\Big\|_{t=0}=0$	$T-Te^{-\frac{1}{T}t}\Big\|_{t=\infty}=T$

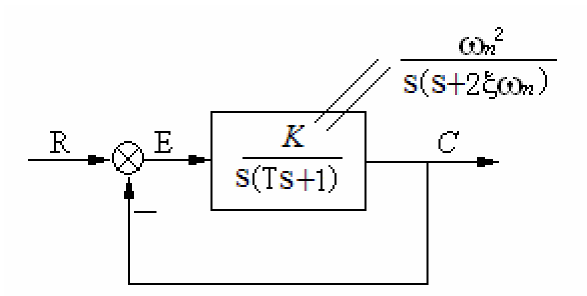
●线性系统重要特性：系统对输入信号的导数/积分响应，等于系统对该信号响应的导数/积分

§3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

1. 二阶系统标准形式及分类

1）二阶系统典型结构及标准形式：

典型结构如右



$$\Phi(s)=\frac{K}{s(Ts+1)+K}$$

$$=\frac{K/T}{s^2+\frac{1}{T}s+K/T}$$

$$\begin{cases}\omega_n^{\ 2}=K/T\\ 2\xi\omega_n=\frac{1}{T}\end{cases}\qquad\begin{cases}\omega_n=\sqrt{\frac{K}{T}}\\ \xi=\frac{1}{2\sqrt{KT}}\end{cases}$$

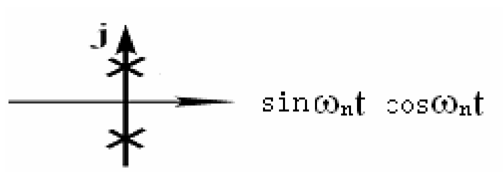
$$=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_m^{\ 2}}$$

标准形式：

$$\Phi(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$$

$$\begin{cases}\xi:\text{系统的(闭环系统)阻尼比，阻尼系数}\\ \omega_n:\text{闭环系统固有频率，无阻尼自然频率}\end{cases}$$

2）二阶系统分类：$s_{1.2}=-\xi\omega_n\pm\sqrt{\xi^2-1}\cdot\omega_n$

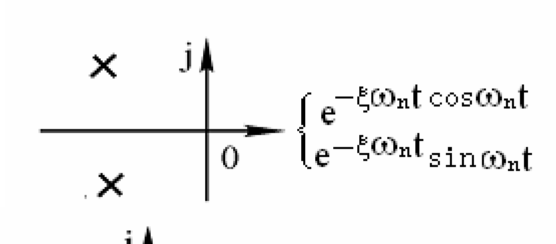


$\xi<0$：负阻尼系统

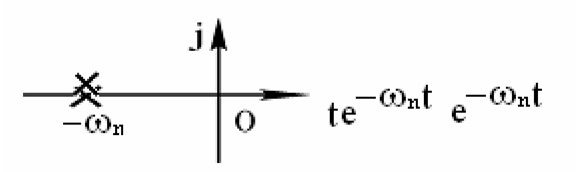
$\xi=0$：零阻尼系统 $S_{1,2}=\pm j\omega_n$

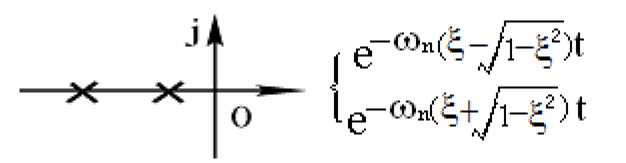
$0<\xi<1$：欠 阻 尼 系 统

$s_{1.2}=-\xi\omega_n \pm j\sqrt{\xi^2-1}\omega_n$



$\xi=1$：临阻尼系统　$s_{1.2}=-\omega_n$



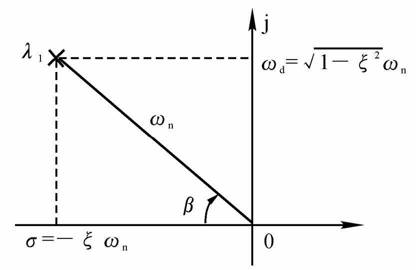


$\xi>1$：　过 阻 尼 系 统

$s_{1.2}=-\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2-1}\omega_n$

2．欠阻尼二阶系统分析：

⑴二阶欠阻尼系统极点的两种表示：



直角坐标表示：

$$s_{1.2}=\sigma \pm j\omega_d$$
$$=-\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n$$

“极”坐标表示：

$$\text{模}=\omega_n$$
$$\text{“极”角}=\beta$$
$$\cos\beta=\xi \qquad \xi\uparrow\rightarrow\beta\downarrow$$
$$\sin\beta=\sqrt{1-\xi^2}$$

⑵二阶欠阻尼系统单位阶跃响应

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2)-s(s+2\xi\omega_n)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{(s+\xi\omega_n)+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n)^2}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n)^2}-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.\frac{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n)^2}$$

$$h(t)=1-e^{-\xi\omega_n t}\left[\cos\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right] \qquad (1)$$

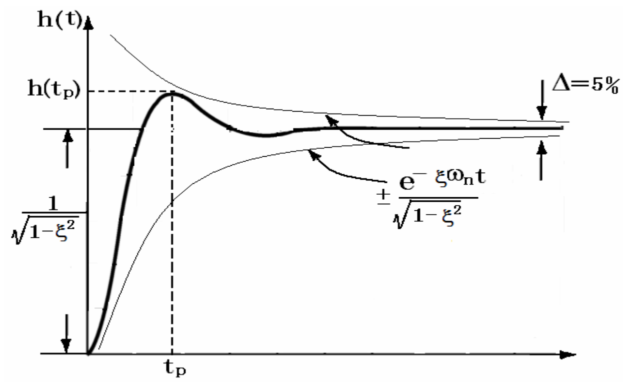
$$=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{\sin\beta}\cos\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t+\underbrace{\xi}_{\cos\beta}\sin\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right]$$

$$=\underbrace{1}_{\text{稳态分量}}\underbrace{-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t+\beta)}_{\text{瞬态分量}}\overset{\xi=0}{\underset{\beta=90^\circ}{=}}1-\cos\omega_n t$$

$$k(t)=h'(t)=L^{-1}[\Phi(s)]=L^{-1}\left[\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega_n)^2+(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n)^2}.\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\right] \qquad (2)$$

$$=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t$$

$$h(t)\text{响应特征}:\begin{cases}h(\infty)=1\\ h(0)=0\\ h'(0)=0\\ \text{包络线收敛速度}e^{-\xi\omega_n t}\\ \text{阻尼振荡频率}\sqrt{1-\xi^2}\omega_n\end{cases}$$



(3)指标计算:

由 $k(t)\overset{(2)}{=}0$ 得：$\sin\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t=0$

即：$\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t=0,\pi,2\pi,\Lambda$

依 t_p 定义， 应有 $\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_p=\pi$

$$\therefore \quad t_p=\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n} \qquad (3)$$

t_p 代入(1)式： $h(t_p)=1+e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$

$$\therefore \quad \sigma\%=\frac{h(t_p)-h(\infty)}{h(\infty)}=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (4)$$

由（1）依 t_s 定义 忽略正弦因子影响，以包括线进入5%误差带的时刻为 t_p

有：$\dfrac{e^{-\xi\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\xi^2}} < 0.05$

$$-\xi\omega_n t_s = \ln 0.05 + \ln\sqrt{1-\xi^2}$$

$$t_s = \frac{-\ln 0.05 - \ln\sqrt{1-\xi^2}}{\xi\omega_n} \overset{0.3<\xi<0.8}{====} \frac{3.5}{\xi\omega_n} \qquad (5)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \quad = \dfrac{\quad}{\sqrt{1- \quad ^2}} \\ \quad \% = \quad ^{- \quad / \sqrt{1- \quad ^2}} \times 100\% \qquad\qquad = 0.707 \\ \quad = \dfrac{3.5}{\quad} \ (\Delta = 5\%) \qquad < 0.8, \quad > 37^\circ \end{cases}$$

ERROR: rangecheck
OFFENDING COMMAND: string

STACK:

66038
33018
32512
33019