文章编号: 1000-6788(2009)12-0118-07

欧式期权和交换期权在随机利率及 O-U 过程下的精算定价方法

刘 坚[1,2,3], 文凤华[2,3], 马超群[1,3]

(1. 湖南大学 工商管理学院, 长沙 410082; 2. 长沙理工大学 经济与管理学院, 长沙 410114; 3. 湖南省金融工程与金融管理研究中心, 长沙 410114)

摘 要 引入随机利率及股价服从 O-U 过程的市场模型, 研究了精算定价法在上述模型下的期权定价问题. 根据精算定价法的定价定义, 利用随机微分方程的相关理论, 得到了欧式看涨看跌期权和交换期权的精确定价公式, 并由此得到了欧式买权卖权的平价公式; 进而推出有红利率的欧式看涨看跌期权的精算定价公式. 最后, 对上述结果与 B-S 定价公式进行了数值模拟比较分析, 显示出了精算法下的定价与 B-S 定价的差异. 所有结果均适用于复杂的不完全市场.

关键词 精算定价; Ornstein-Uhlenback 过程; Hull-White 利率模型; 交换期权

中图分类号 F224.7 **文献标志码** A

Actuarial pricing approach to Europe option and exchange option under stochastic interest rates and O-U process

LIU Jian[1,2,3], WEN Feng-hua[2,3], MA Chao-qun[1,3]

(1. School of Business and Management, Hunan University, Changsha 410082, China; 2. School of Economics and Management, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China; 3. Financial Engineering and Financial Management Research Center of Hunan Province, Changsha 410114, China)

Abstract This paper discusses an actuarial approach to the option pricing problem for a market model where the interest rates are stochastic and the stock prices are driven by generalized Exp-Ornstein-Uhlenback process. According to the definition of actuarial pricing approach, the exact solutions of the general European option and the exchange option are obtained with the help of the related theory of stochastic differential equation. Then the European call-put parity relation is derived naturally. Furthermore, the new prices of European call option and the put option with continuous dividend yield are deduced from the above results. At last, a comparative analysis of numerical simulation is made between the above-mentioned results and the B-S pricing formula. All the results are applicable to complex incomplete markets.

Keywords actuarial approach; Ornstein-Uhlenback process; Hull-White interest rate model; exchange option

1 引言

未定权益的定价一直是金融数学研究领域内的主要内容之一, 正确科学地给出未定权益的价格是金融风

收稿日期: 2008-04-30
资助项目: 国家自然科学基金 (70971013, 70701035); 湖南省杰出青年基金 (09JJ1010); 湖南省普通高等学校哲学社会科学重点研究基地开放基金 (09FEFM04)
作者简介: 刘坚 (1981–), 女, 博士研究生, 研究方向: 金融工程与风险管理, Email: ljorg@126.com; 文凤华 (1972–), 男, 教授, 研究方向: 金融工程; 马超群 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向: 资产定价理论与风险管理.

险管理的基础, 也是现代金融中必不可少的组成部分. 1973 年, Fisher Black 和 Myron Scholes 发表了关于期权定价的经典论文《期权定价和公司负债》[1]. 文中利用套利推理和随机分析导出了著名的 Black-Scholes(B-S) 公式, 建立了期权定价理论, 是金融理论的一次革命性成果. 但 B-S 公式的获得是建立在众多假设条件的基础上的, 如利率为常数, 标的资产价格过程服从正态分布, 标的资产不支付红利等, 显然与不断变化的金融市场有一定差距. Black, Scholes 的工作是开创性的, 此后许多学者对 B-S 模型及其公式作了大量的完善和多方面的推广工作. Cox, Ross 和 Rubinstein[2] 等人在 1979 年提出了二项式期权定价; Merton[3] 利用套利思想证明了 B-S 期权定价公式, 且用动态规划方法得到了连续时间模型下最优消费与投资决策的简明解; Darrell Duffie 用传统的期权定价方法导出了 B-S 公式.

上述诸如鞅方法、偏微分方法、离散模型逼近法等定价方法均是建立在金融市场完备无套利的基础上, 用复制的思想得到的. 对于有套利的不完备市场, 这些方法就受到了许多的限制. 当市场不完全时, 对于一个给定的未定权益, 不可能像完全市场那样精确地复制与套期保值. 通常的做法是寻找一族由自融资策略所得到的最终财富逼近某种未定权益, 这样就必然存在误差. 如由 Föllmer 和 Sondermann 在 1986 年提出的用 "均值-方差" 准则去度量这种误差, 但求解过程十分复杂.

1998 年 Bladt 和 Rydberg[4] 首次提出了期权的精算定价方法. 精算定价方法将期权定价问题转化为等价的公平保费确定问题, 由于无任何经济假设, 所以它不仅对无套利、均衡、完备的市场有效, 而且对有套利、非均衡、不完备的市场也有效. 闫海峰等 [9] 用精算法得到了股票价格遵循 Ornstein-Uhlenback(O-U) 过程的欧式期权定价公式, 赵巍等 [11] 考虑了在风险中性市场中股票价格遵循分数 O-U 过程的期权定价模型. 股票价格服从 O-U 过程避免了传统对数正态分布中股价有朝同一方向变化的局限, 对股价上升的趋势进行了削弱. 但上述模型中利率为时间的确定性函数不足以满足实际背景的要求. 大量实证研究表明, 在现实的金融市场中, 利率有均值回复的特征, 长期利率的波动会小于短期利率的波动; 在利率水平较高时, 其波动率也较大. 刘坚等 [10] 用鞅定价理论研究了利率服从 Hull-White 模型下的再装期权定价. 该随机利率模型使得利率随着时间的推移有向某一平均回复水平收敛的趋势.

本文引入随机利率及股价服从 O-U 过程的市场模型, 研究了精算定价法在上述模型下的期权定价问题. 根据精算法的定价定义, 利用随机微分方程的相关理论, 得到了欧式看涨看跌期权和交换期权的精确定价公式, 并由此得到了欧式买权卖权的平价公式; 进而推出有红利率的欧式看涨看跌期权的精算定价公式. 最后, 对上述结果与 B-S 定价公式进行了数值模拟比较分析.

2　基本假设

考虑一个连续时间的无摩擦金融市场. 假定市场存在两种资产, 一种为无风险资产, 如债券; 另一种为风险资产, 如股票. 给定一个满足通常条件 σ 流的完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$.

假定股票价格过程 $S(t)$ 遵循广义指数 O-U 过程:

$$\mathrm{d}S(t) = (\mu(t) - \alpha \ln S(t))S(t)\mathrm{d}t + \sigma_s(t)S(t)\mathrm{d}B(t), \quad S(0) = S \tag{1}$$

其中 $S > 0$, $\sigma_s(t)$ 为股票的波动率, $\mu(t), \sigma_s(t)$ 均为时间的确定性函数, α 为常数.

假定短期利率过程 $r(t)$ 满足 Hull-White 利率模型:

$$\mathrm{d}r(t) = (a(t) - b(t)r(t))\mathrm{d}t + \sigma_r(t)\mathrm{d}W(t), \qquad r(0) = r \tag{2}$$

其中 $a(t)$、$b(t)$ 及 $\sigma_r(t)$ 为 t 的确定性函数. $a(t)$ 是描述利率长期平均水平的参数, $b(t)$ 是调整短期和长期利率关系的平均回复率, 当两者均为常值时, 即为 Vašiček 模型. $\sigma_r(t)$ 是利率的波动率.

$\{B(t) : t \geq 0\}$ 与 $\{W(t) : t \geq 0\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ 上的两标准布朗运动, 其相关系数为 ρ.

定义 1[4]　股票价格过程 $\{S(t), t \geq 0\}$ 在 $[0, T]$ 上产生的期望收益率 $\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t$ 定义为:

$$\mathrm{e}^{\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t} = \frac{ES(T)}{S} \tag{3}$$

$\beta(t)$ 为 t 时刻 $S(t)$ 的连续复利收益率, 是 $[0, T]$ 上的实值可积函数.

定义 2[4] 欧式期权的精算定价法价值定义为: 当期权被执行时, 股票到期日的折现值与执行价的折现值之差, 在股票价格实际分布的概率测度下的数学期望值. 其中, 无风险资产按无风险利率折现, 风险资产按其期望收益率 (定义如 (3)) 折现. 欧式期权在到期日被执行的充要条件是: 欧式看涨期权为 $\exp\{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t\}S(T) > \exp\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\}K$, 欧式看跌期权为 $\exp\{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t\}S(T) < \exp\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\}K$.

设 $C(K,T)$ 和 $P(K,T)$ 分别表示股票价格为 $S(t)$, 执行价格为 K, 到期日为 T 的欧式看涨和看跌期权在 $t=0$ 时刻的价值, 则根据精算定价方法定义欧式期权的价值为:

$$C(K,T)=E\left[\left(\exp\left\{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t\right\}S(T)-\exp\left\{-\int_0^{\mathrm{T}}r(t)\mathrm{d}t\right\}K\right)I_{\{\exp\{-\int_0^{\mathrm{T}}\beta(t)\mathrm{d}t\}S(T)>\exp\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\}K\}}\right]$$

$$P(K,T)=E\left[\left(\exp\left\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\right\}K-\exp\left\{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t\right\}S(T)\right)I_{\{\exp\{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t\}S(T)<\exp\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\}K\}}\right]$$

3 定价公式及推论

本节在上节给定市场模型下, 给出了欧式看涨看跌期权及交换期权的精算方法定价公式, 并将一般欧式期权结果推广到了有红利情形, 进而得到欧式买权卖权的平价公式.

首先给出两个引理如下:

引理 1[12] 设两随机变量, $W_1\sim N(0,1)$, $W_2\sim N(0,1)$, $\mathrm{Cov}(W_1,W_2)=\rho$, 则对任意的实数 a, b, c, d, k, 有 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{cW_1+\mathrm{d}W_2}I_{\{aW_1+bW_2\ge k\}}]=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(c^2+d^2+2\rho cd)}N(\frac{ac+bd+\rho(ad+bc)-k}{\sqrt{a^2+b^2+2\rho ab}})$.

引理 2 若股票价格 $S(t)$ 遵循广义指数 O-U 过程 (1), 则有:

$$S(t)=S^{\mathrm{e}^{-\alpha t}}\exp\left\{\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma_s^2(u))\mathrm{e}^{\alpha u}\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\sigma_s(u)\mathrm{e}^{\alpha u}\mathrm{d}B(u)\right\}$$

$$ES(t)=S^{\mathrm{e}^{-\alpha t}}\exp\left\{\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma_s^2(u))\mathrm{e}^{\alpha u}\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\int_0^t\sigma_s^2(u)\mathrm{e}^{2\alpha u}\mathrm{d}u\right\}$$

证明 由 Itŏ 公式有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\ln S(t) &= \frac{1}{S(t)}\mathrm{d}S(t)-\frac{1}{2S^2(t)}\mathrm{d}S(t)\mathrm{d}S(t)=\big(\mu(t)-\alpha\ln S(t)-\frac{1}{2}\sigma_s^2(t)\big)\mathrm{d}t+\sigma_s(t)\mathrm{d}B(t)\\ \mathrm{d}(\ln S(t)\mathrm{e}^{\alpha t}) &= \big(\mu(t)-\frac{1}{2}\sigma_s^2(t)\big)\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}t+\sigma_s(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}B(t)\end{aligned}$$

故
$$\ln S(t)\mathrm{e}^{\alpha t}=\ln S+\int_0^t\big(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma_s^2(u)\big)\mathrm{e}^{\alpha u}\mathrm{d}u+\int_0^t\sigma_s(u)\mathrm{e}^{\alpha u}\mathrm{d}B(u)$$

则
$$\ln S(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\ln S+\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\big(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma_s^2(u)\big)\mathrm{e}^{\alpha u}\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\sigma_s(u)\mathrm{e}^{\alpha u}\mathrm{d}B(u)$$

从而
$$S(t)=S^{\mathrm{e}^{-\alpha t}}\exp\left\{\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma_s^2(u))\mathrm{e}^{\alpha u}\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\sigma_s(u)\mathrm{e}^{\alpha u}\mathrm{d}B(u)\right\}$$

两边取期望有

$$ES(t)=S^{\mathrm{e}^{-\alpha t}}\exp\left\{\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma_s^2(u))\mathrm{e}^{\alpha u}\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\int_0^t\sigma_s^2(u)\mathrm{e}^{2\alpha u}\mathrm{d}u\right\}$$

3.1 一般欧式期权定价

现分别考虑一般的欧式看涨期权及欧式看跌期权. 两期权的标的资产均为股票, 敲定价格为 K, 执行日为 T.

定理 1 设股票价格过程 $\{S(t),t\ge 0\}$ 遵循广义指数 O-U 过程 (1), 利率过程满足 Hull-White 利率模型 (2), 则欧式看涨期权与看跌期权在 0 时刻的精算法价值分别为:

$$C(K,T)=SN(d_1)-K\exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_X^2-G(0,T)\right\}N(d_2)$$

$$P(K,T)=K\exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_X^2-G(0,T)\right\}N(-d_2)-SN(-d_1)$$

其中,

$$n(t)=\int_0^t b(t)\mathrm{d}t,\quad m(t,T)=\int_t^T \mathrm{e}^{n(t)-n(s)}\mathrm{d}s,\quad G(0,T)=rm(0,T)+\int_0^T a(t)m(t,T)\mathrm{d}t$$

$$X=\int_0^T \sigma_r(t)m(t,T)\mathrm{d}W(t)\ ,\qquad Y=\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_0^T \sigma_s(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}B(t)$$

$$\sigma_X^2=\int_0^T \sigma_r^2(t)m^2(t,T)\mathrm{d}t,\qquad \sigma_Y^2=\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_0^T \sigma_s^2(t)e^{2\alpha t}\mathrm{d}t$$

$$d_1=\frac{\ln\frac{S}{K}+G(0,T)+\frac{1}{2}\sigma_Y^2+\rho\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y}},\ d_2=\frac{\ln\frac{S}{K}+G(0,T)-\sigma_X^2-\frac{1}{2}\sigma_Y^2-\rho\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y}}.$$

证明 由定义 2 知:

$$\begin{aligned}C(K,T)&=E\Big[S(T)\exp\Big\{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t\Big\}\cdot\mathbf{1}_{\left(S(T)\exp\{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t\}>K\exp\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\}\right)}\Big]-\\&\quad E\Big[K\exp\Big\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\Big\}\cdot\mathbf{1}_{\left(S(T)\exp\{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t\}>K\exp\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\}\right)}\Big]\\&\triangleq I_1-I_2.\end{aligned}$$

由于精算定价法中期望收益率满足 $\mathrm{e}^{\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t}=\frac{ES(T)}{S}$, 且由引理 2 知

$$\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t=\ln\frac{ES(T)}{S}=(e^{-\alpha T}-1)\ln S+\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_0^T(\mu(t)-\frac{1}{2}\sigma_s^2(t))\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_0^T\sigma_s^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha t}\mathrm{d}t$$

故 $\mathrm{e}^{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t}=\exp\Big\{(1-\mathrm{e}^{-\alpha T})\ln S-\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_0^T(\mu(t)-\frac{1}{2}\sigma_s^2(t))\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_0^T\sigma_s^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha t}\mathrm{d}t\Big\}$

且 $\mathrm{e}^{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t}S(T)=\exp\Big\{\ln S-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_0^T\sigma_s^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha t}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_0^T\sigma_s(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}B(t)\Big\}$

由利率模型 (2) 及 $It\check{o}$ 公式得 [10] $\int_0^T r(t)\mathrm{d}t=G(0,T)+\int_0^T\sigma_r(t)m(t,T)\mathrm{d}W(t).$

若要满足条件 $S(T)\mathrm{e}^{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t}>K\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}$, 则

$$\Longleftrightarrow\exp\Big\{\ln S-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_0^T\sigma_s^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha t}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_0^T\sigma_s(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}B(t)\Big\}>K\cdot\exp\Big\{-G(0,T)-\int_0^T\sigma_r(t)m(t,T)\mathrm{d}W(t)\Big\}$$

$$\Longleftrightarrow\int_0^T\sigma_r(t)m(t,T)\mathrm{d}W(t)+\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_0^T\sigma_s(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}B(t)>\ln\frac{K}{S}-G(0,T)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_0^T\sigma_s^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha t}\mathrm{d}t$$

$$\Longleftrightarrow X+Y>\ln\frac{K}{S}-G(0,T)+\frac{1}{2}\sigma_Y^2$$

由于 $\{B(t):t\geq 0\}$ 与 $\{W(t):t\geq 0\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ 上的两标准布朗运动, 根据定义易知 X,Y 为与 $\mathcal{F}_t$ 独立的两正态随机变量, 且 $E^Q[X]=E^Q[Y]=0,\sigma_X^2=\int_0^T\sigma_r^2(t)m^2(t,T)\mathrm{d}t$, $\sigma_Y^2=\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_0^T\sigma_s^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha t}\mathrm{d}t$, 故由引理 1 有

$$\begin{aligned}I_1&=E\Big[S\exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_0^T\sigma_s^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha t}\mathrm{d}t+Y\Big\}\cdot\mathbf{1}_{(X+Y>\ln\frac{K}{S}-G(0,T)+\frac{1}{2}\sigma_Y^2)}\Big]\\&=S\exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_0^T\sigma_s^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha t}\mathrm{d}t\Big\}\cdot E\Big[e^Y\cdot\mathbf{1}_{(X+Y>\ln\frac{K}{S}-G(0,T)+\frac{1}{2}\sigma_Y^2)}\Big]\\&=SN(d_1),\\I_2&=K\mathrm{e}^{-G(0,T)}\cdot E\Big[\mathrm{e}^{-X}\cdot\mathbf{1}_{(X+Y>\ln\frac{K}{S}-G(0,T)+\frac{1}{2}\sigma_Y^2)}\Big]=K\exp\Big\{\frac{1}{2}\sigma_X^2-G(0,T)\Big\}N(d_2)\end{aligned}$$

故欧式看涨期权定价公式为 $C(K,T)=SN(d_1)-K\exp\Big\{\frac{1}{2}\sigma_X^2-G(0,T)\Big\}N(d_2)$.

同理可得欧式看跌期权定价公式

$$P(K,T)=K\exp\Big\{\frac{1}{2}\sigma_X^2-G(0,T)\Big\}N(-d_2)-SN(-d_1)$$

由定理 1 的结论可以直接推得:

推论 1 在模型 (1)、(2) 下, 精算定价方法的欧式买权卖权平价关系为:

$$C(K,T)+K\exp\Big\{\frac{1}{2}\sigma_X^2-G(0,T)\Big\}=P(K,T)+S$$

推论 2 考虑模型 (1)、(2) 下有连续红利率 $q(t)$ 的欧式买权卖权, 其在零时刻的精算定价法价值分别为:

$$C'(K,T)=S\exp\Big\{-\int_0^T q(t)\mathrm{d}t\Big\}N(d_1^{'})-K\exp\Big\{\frac{1}{2}\sigma_X^2-G(0,T)\Big\}N(d_2^{'})$$

$$P'(K,T)=K\exp\Big\{\frac{1}{2}\sigma_X^2-G(0,T)\Big\}N(-d_2^{'})-S\exp\Big\{-\int_0^T q(t)\mathrm{d}t\Big\}N(-d_1^{'})$$

其中

$$d_1^{'}=\frac{\ln\frac{S}{K}+G(0,T)-\int_0^T q(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sigma_Y^2+\rho\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y}},\ d_2^{'}=\frac{\ln\frac{S}{K}+G(0,T)-\int_0^T q(t)\mathrm{d}t-\sigma_X^2-\frac{1}{2}\sigma_Y^2-\rho\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y}}.$$

3.2 交换期权定价

交换期权是一种新型的期权, 可以应用于资产组合管理人的绩效报酬定价分析等领域. 它使期权持有人在到期日 T 时刻有权但非必须以一种资产换取另一种资产. 在给定的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},P)$ 下, 设该期权中两种风险资产的价格过程满足下列随机微分方程:

$$\mathrm{d}S_1(t)=(\mu_1(t)-\alpha_1\ln S_1(t))S_1(t)\mathrm{d}t+\sigma_1(t)S_1(t)\mathrm{d}B_1(t),\quad S_1(0)=S_1 \tag{4}$$

$$\mathrm{d}S_2(t)=(\mu_2(t)-\alpha_2\ln S_2(t))S_2(t)\mathrm{d}t+\sigma_2(t)S_2(t)\mathrm{d}B_2(t),\quad S_2(0)=S_2 \tag{5}$$

其中 $S_i(t)$ 为第 i 种资产的价格, $\sigma_i(t)$ 分别表示第 i 种资产的波动率, $\sigma_i(t)$, $\mu_i(t)$ 为 t 的函数, α_i 为常数 $(i$=1, 2). $\{B_1(t),t\geq 0\}$ 和 $\{B_2(t),t\geq 0\}$ 的相关系数为 ρ.

交换期权既可以看作是执行价格为 $S_1(T)$ 的资产 2 的看涨期权, 也可以看作是执行价格为 $S_2(T)$ 的资产 1 的看跌期权. 当且仅当期权期末的收益为正时, 才会被执行. 由精算法价值定义知, 交换期权在 $t=0$ 时刻的价值 $V(0,T)$ 为:

$$V(0,T)=E\Big[\max\Big(S_1(T)\exp\Big\{-\int_0^T\beta_1(t)\mathrm{d}t\Big\}-S_2(T)\exp\Big\{-\int_0^T\beta_2(t)\mathrm{d}t\Big\},0\Big)\Big] \tag{6}$$

定理 2 交换期权在 $t=0$ 时刻的价值 $V(0,T)$ 为:

$$V(0,T)=S_2N(d_3)-S_1N(d_4)$$

其中

$$Y_1=\mathrm{e}^{-\alpha_1T}\int_0^T\sigma_1(t)\mathrm{e}^{\alpha_1t}\mathrm{d}B_1(t),\qquad Y_2=\mathrm{e}^{-\alpha_2T}\int_0^T\sigma_2(t)\mathrm{e}^{\alpha_2t}\mathrm{d}B_2(t),$$

$$\sigma_{Y_1}^2=\mathrm{e}^{-2\alpha_1T}\int_0^T\sigma_1^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha_1t}\mathrm{d}t,\qquad \sigma_{Y_2}^2=\mathrm{e}^{-2\alpha_2T}\int_0^T\sigma_2^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha_2t}\mathrm{d}t,$$

$$d_3=\frac{\ln\frac{S_2}{S_1}+\frac{1}{2}\sigma_{Y_1}^2+\frac{1}{2}\sigma_{Y_2}^2-\rho\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}}{\sqrt{\sigma_{Y_1}^2+\sigma_{Y_2}^2-2\rho\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}}},\qquad d_4=\frac{\ln\frac{S_2}{S_1}-\frac{1}{2}\sigma_{Y_1}^2-\frac{1}{2}\sigma_{Y_2}^2+\rho\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}}{\sqrt{\sigma_{Y_1}^2+\sigma_{Y_2}^2-2\rho\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}}}.$$

证明 由交换期权的精算定价法的定义 (6) 知:

$$\begin{aligned}V(0,T)&=E\Big[\Big(S_2(T)\exp\Big\{-\int_0^T\beta_2(t)\mathrm{d}t\Big\}\cdot\mathbf{1}_{\left(S_2(T)\exp\left\{-\int_0^T\beta_2(t)\mathrm{d}t\right\}>S_1(T)\exp\left\{-\int_0^T\beta_1(t)\mathrm{d}t\right\}\right)}\Big]-\\&\quad S_1(T)\exp\Big\{-\int_0^T\beta_1(t)\mathrm{d}t\Big\}\Big)\cdot\mathbf{1}_{\left(S_2(T)\exp\left\{-\int_0^T\beta_2(t)\mathrm{d}t\right\}>S_1(T)\exp\left\{-\int_0^T\beta_1(t)\mathrm{d}t\right\}\right)}\Big]\\&\triangleq J_1-J_2\end{aligned}$$

要满足条件 $S_2(T)\exp\Big\{-\int_0^T\beta_2(t)\mathrm{d}t\Big\}>S_1(T)\exp\Big\{-\int_0^T\beta_1(t)\mathrm{d}t\Big\}$, 则

$$\begin{aligned}\iff&\exp\Big\{\ln S_2-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha_2T}\int_0^T\sigma_2^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha_2t}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\alpha_2T}\int_0^T\sigma_2(t)\mathrm{e}^{\alpha_2t}\mathrm{d}B_2(t)\Big\}>\\&\quad\exp\Big\{\ln S_1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha_1T}\int_0^T\sigma_1^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha_1t}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\alpha_1T}\int_0^T\sigma_1(t)\mathrm{e}^{\alpha_1t}\mathrm{d}B_1(t)\Big\},\\\iff&Y_2-Y_1>\ln\frac{S_1}{S_2}-\frac{1}{2}\sigma_{Y_1}^2+\frac{1}{2}\sigma_{Y_2}^2.\end{aligned}$$

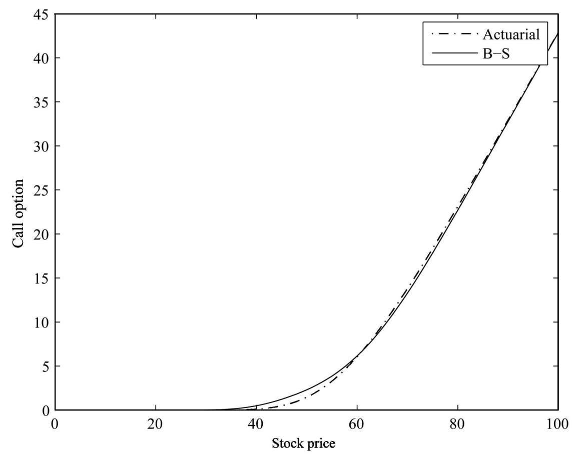
由定义易知 Y_1, Y_2 为与 $\mathcal{F}_t$ 独立的两正态随机变量, 且 $E^Q[Y_1]=E^Q[Y_2]=0, \sigma_{Y_1}^2=\mathrm{e}^{-2\alpha_1 T}\int_0^T \sigma_1^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha_1 t}\mathrm{d}t$, $\sigma_{Y_2}^2=\mathrm{e}^{-2\alpha_2 T}\int_0^T \sigma_2^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha_2 t}\mathrm{d}t$. 进而由引理 1 有

$$\begin{aligned}
J_1 &= E\Big[\exp\Big\{\ln S_2-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha_2 T}\int_0^T \sigma_2^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha_2 t}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\alpha_2 T}\int_0^T \sigma_2(t)\mathrm{e}^{\alpha_2 t}\mathrm{d}B_2(t)\Big\}\cdot \mathbf{1}_{\left(Y_2-Y_1>\ln\frac{S_1}{S_2}-\frac{1}{2}\sigma_{Y_1}^2+\frac{1}{2}\sigma_{Y_2}^2\right)}\Big]\\
&= S_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma_{Y_2}^2}E\Big[\mathrm{e}^{Y_2}\cdot \mathbf{1}_{\left(Y_2-Y_1>\ln\frac{S_1}{S_2}-\frac{1}{2}\sigma_{Y_1}^2+\frac{1}{2}\sigma_{Y_2}^2\right)}\Big]\\
&= S_2N(d_3)\\
J_2 &= E\Big[\exp\Big\{\ln S_1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha_1 T}\int_0^T \sigma_1^2(t)\mathrm{e}^{2\alpha_1 t}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\alpha_1 T}\int_0^T \sigma_1(t)\mathrm{e}^{\alpha_1 t}\mathrm{d}B_1(t)\Big\}\cdot \mathbf{1}_{\left(Y_2-Y_1>\ln\frac{S_1}{S_2}-\frac{1}{2}\sigma_{Y_1}^2+\frac{1}{2}\sigma_{Y_2}^2\right)}\Big]\\
&= S_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma_{Y_1}^2}E\Big[\mathrm{e}^{Y_1}\cdot \mathbf{1}_{\left(Y_2-Y_1>\ln\frac{S_1}{S_2}-\frac{1}{2}\sigma_{Y_1}^2+\frac{1}{2}\sigma_{Y_2}^2\right)}\Big]\\
&= S_1N(d_4)
\end{aligned}$$

故得交换期权定价公式 $V(0,T)=S_2N(d_3)-S_1N(d_4)$.

4　数值模拟算例

基于上述结论, 考虑欧式期权. 参数选择如下: $K=60, a=0.0003852, b=0.0214, \sigma_s=0.2, \sigma_r=0.0008$, $\alpha=0.1$, $r=0.05$, $\rho=-0.25$. 运用 Matlab 工具软件, 获得了以下结果.



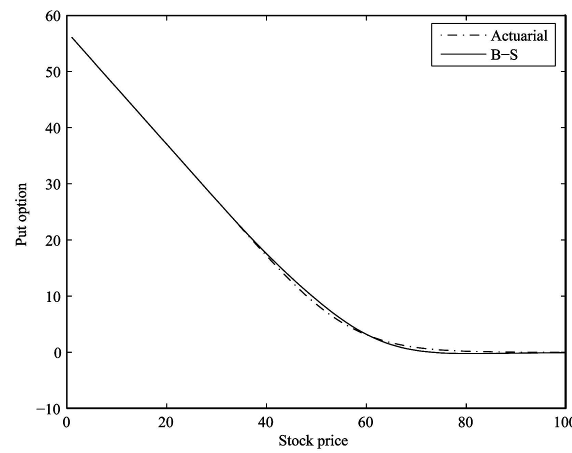


图 1　随机利率和 O-U 过程下的精算法定价与 B-S 公式结果比较

图 1 分别得到了在上述假定参数的情形下, 随着股票现行价格的变化, 欧式看涨期权与看跌期权的精算定价法公式与经典 B-S 公式的比较结果, 在精算定价法中, 考虑了随机利率及股价服从 O-U 过程. 从图形上可以看到, 这两种方法的结果在期权为价外时有一定区别, 而对于价内期权且价内较多时这两者的区别并不明显. 这些区别正是由于运用了精算定价法且考虑了利率的随机性及股价遵循 O-U 过程所产生的. 由于价外期权的行使机会较低, 故模型的改变会较大地影响期权价格, 且这种影响表现出一种负作用. 而在价内较多的期权中, 影响期权价格更多的是股票价格本身的变化, 此时两种方法下的数值差别不大.

表 1　随机利率和常利率下的精算法定价结果比较

模型	40	45	50	55	60	65	70
随机利率	0.1037	0.4721	1.4301	3.2462	5.9985	9.5682	13.7383
常数利率	0.1092	0.4884	1.4620	3.2931	6.0546	9.6272	13.7959

表 1 描述了精算定价法中, 随机利率和常利率下的看涨期权价格结果比较. 由此可知, 两种模型下的看涨期权价格都有随当前股票价格增加而增加的趋势. 但在每一个固定的股票现行价格下, 随机利率下的期权价格均大于固定利率时的价格, 而这两者的差距随着当前股价的增大, 有先增加后缩小的趋势.

考虑一份交换期权, 参数选取如下: $S_1=60, T=2, \sigma_1=0.18, \sigma_2=0.25, \alpha_1=0.12, \alpha_2=0.16, \rho=0.5$, 选取 S_2 为变量, 可得精算定价法与 B-S 定价公式的结果分别如图 2 所示. 从图形中可以看出, 精算定价法下的交换期权价格始终要大于 B-S 模型下的, 这是利率模型和股票价格模型的不同所造成的结果.

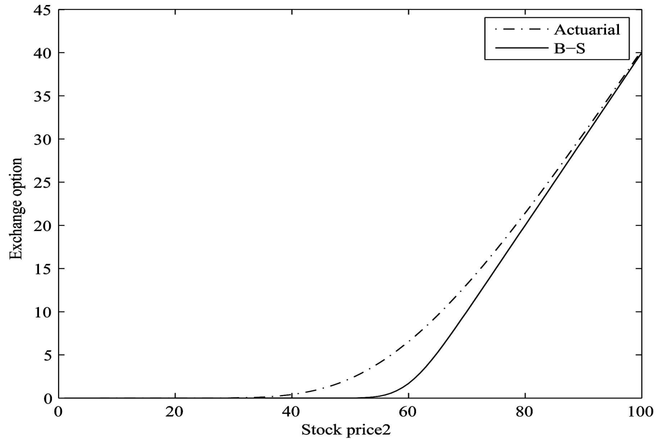


图 2 交换期权的精算法定价与 B-S 公式比较

5 结束语

传统鞅定价方法下, 一种证券（或衍生证券）现在的价格, 即为该证券未来现金流在市场等价鞅测度下折现的期望值. 如金融市场是完备且无套利的, 等价鞅存在且唯一, 鞅定价方法有效. 但如果市场是有套利、不完备的, 这时等价鞅测度不存在或存在而不唯一, 用鞅定价方法就有一定的困难. 在本文所使用的精算定价法中, 金融市场并没有做任何的经济假设, 也就意味着其结果对各类市场均是有效的. 该方法也使得对期权的定价有了不同于经典 B-S 模型的显式解, 相对于传统的鞅方法定价, 由于无需寻找等价鞅, 故方法较为简单. 本文在一般的精算定价法的基础上, 考虑资产价格的实际特点而引入广义 O-U 过程, 由利率的回复特点建立 Hull-White 随机利率模型, 通过利用随机微分方程的相关理论, 得到了一般欧式期权及交换期权的精确解, 并将一般欧式期权定价结果推广到有红利率的情形, 进而给出了欧式买权卖权在上述模型下的平价公式, 最后进行了数值模拟比较分析, 显示出这两种模型下的期权价格确实存在不同程度的差别. 本文所得结果同样适合于复杂的不完全市场.

参考文献

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637–654.

[2] Cox J C, Ross S A, Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach[J]. Journal of Financial Economics, 1979, 7(3): 229–263.

[3] Merton R C. Theory of rational option pricing[J]. Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, 4(1): 141–183.

[4] Bladt M, Rydberg H T. An actuarial approach to option pricing under the physical measure and witout market assumptions[J]. Insurance: Mathmatics and Economics, 1998, 22(1): 65–73.

[5] Cox J, Ingersoll J, Ross S. A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica, 1985, 58: 385–407.

[6] Knopova V P, Pepelyaeva T V. Stochastic models of financial mathematics[J]. Cybernetics and Systems Analysis, 2001, 37(3): 427–433.

[7] Li J L, Clemons C B, Young G W, et al. Solutions of two-factor models with variable interest rates[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 222(1): 30–41.

[8] Johnson R S, Zuber R A, Gandar J M. Binomial pricing of fixed-income securities for increasing and decreasing interest rate cases[J]. Applied Financial Economics, 2006, 16(14): 1029–1046.

[9] 闫海峰, 刘三阳. 广义 Black-Scholes 模型期权定价新方法 —— 保险精算方法 [J]. 应用数学和力学, 2003, 24(7): 730–738.

[10] 刘坚, 邓国和, 杨向群. 利率和股票价格遵循 O-U 过程的再装期权定价 [J]. 工程数学学报, 2007, 24(2): 237–241.

[11] 赵巍, 何建敏. 股票价格遵循分数 Ornstein-Uhlenback 过程的期权定价模型 [J]. 中国管理科学, 2007, 15(3): 1–5.

[12] 陈松男. 金融工程学 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 2002: 106–111, 130–133.