不确定时变时滞系统的保成本 H_∞ 鲁棒可靠控制

滕青芳[1,2],范多旺[1]
TENG Qing-fang[1,2],FAN Duo-wang[1]

1.兰州交通大学 自动化与电气工程学院,兰州 730070
2.光电技术与智能控制教育部重点实验室(兰州交通大学),兰州 730070
1.School of Automation & Electrical Engineering,Lanzhou Jiaotong University,Lanzhou 730070,China
2.Key Lab of Opto-Electronic Technology and Intelligent Control(Lanzhou Jiaotong University),Ministry of Education,Lanzhou 730070,China
E-mail:tengqf@mail.lzjtu.cn

TENG Qing-fang,FAN Duo-wang.Guaranteed cost H_∞ robust reliable control for uncertain time-varying delayed systems against actuator failure.Computer Engineering and Applications,2009,45(36):207-211.

Abstract: The problem of guaranteed cost H_∞ robust reliable control is investigated for time-varying delayed uncertain systems against actuator failure.Based on Lyapunov stability theory,a sufficient condition for the existence of guaranteed cost H_∞ robust reliable controller is derived and transformed to a Linear Matrix Inequality(LMI).At the same time,the associated designing approach of the state-feedback controller is provided.This sufficient condition has relevance to time delay.The resultant robust reliable control systems not only retain asymptotic stability and disturbance attenuation with H_∞-norm bounds but also possess the performance index of guaranteed cost despite any outages within a prespecified subset of actuators.

Key words: guaranteed cost;H_∞ control;robust reliable control;uncertain time-varying delayed system;actuator failure;linear matrix inequality

摘 要:针对一类含有时变时滞的不确定线性系统,研究了在执行器发生故障情况下系统具有保成本 H_∞ 鲁棒可靠控制器设计问题。根据 Lyapunov 稳定性理论,得到了系统存在保成本 H_∞ 鲁棒可靠控制器应满足的一个矩阵不等式,进一步将这个矩阵不等式转化为线性矩阵不等式(LMI),并给出了系统状态反馈控制器的设计方法,所得的结果是时滞相关的。利用论文方法设计的鲁棒可靠控制器能够使得时变时滞系统对于任意允许的不确定量以及一个预先指定执行器子集中任意执行器失效不仅具有鲁棒容错性,并且使系统存在保成本上界以及具有指定 H_∞ 范数的干扰抑制能力。

关键词:保成本;H_∞ 控制;鲁棒可靠控制;不确定时变时滞系统;执行器失效;线性矩阵不等式
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.36.059 **文章编号:**1002-8331(2009)36-0207-05 **文献标识码:**A **中图分类号:**TP391

1 引言

在实际工程应用中,可靠性是控制系统能够正常运行的关键因素之一。可靠控制指在设计控制器时将系统部件可能发生的故障考虑在设计过程中,所得到的可靠控制器可使闭环系统无论是否出现故障都能保持渐近稳定且满足一定的性能指标。关于可靠控制问题,近几年来得到了广泛的重视和研究[1-2]。考虑 H_∞ 性能指标,文献[3]用代数 Ricatti 不等式方法研究了不确定系统的可靠 H_∞ 控制问题,文献[4]运用 Razumikhin 定理研究了不确定时滞系统的时滞相关鲁棒 H_∞ 可靠控制问题。考虑系统状态的响应速度,文献[5]研究了不确定时滞系统具有指定衰减度的鲁棒可靠控制问题。考虑系统保成本(guaranteed cost control)的性能要求,文献[6-11]研究了系统保成本可靠控制问题。上述可靠控制研究都是针对一项性能指标而言。同时考虑两项性能指标要求,文献[12-13]研究了不确定时滞系统的可靠控制问题。考虑到响应速度和保代价要求,文献[12]研究了不确定时滞系统的指定衰减度保代价可靠控制;考虑到响应速度和 H_∞ 性能指标要求,文献[13]研究了传感器失效不确定时滞系统指数稳定 H_∞ 可靠控制。

考虑实际工程控制中被控对象参数的不确定性、状态时变时滞的存在性,研究不确定时滞系统的鲁棒可靠控制具有较强的实际背景。在确保系统具有鲁棒容错能力的前提下,要求系统对干扰具有较强的抑制能力,同时对系统二次型性能指标需考虑保成本的要求,即在保证系统鲁棒容错性的前提下,同时要求系统具有干扰抑制能力和保成本这两项鲁棒性能,显然,研究不确定时滞系统的保成本 H_∞ 鲁棒可靠控制有理论意义和应用价值。目前对于同时考虑上述两项性能指标的可靠控制的报道还不多,该文将就该类问题进行讨论。

基金项目:长江学者和创新团队发展计划资助(the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University No.IRT0629);甘肃省自然科学基金(the Natural Science Foundation of Gansu Province of China under Grant No.3ZS061-A25-044)。
作者简介:滕青芳(1964-),女,博士,教授,研究方向为控制理论与控制工程。
收稿日期:2009-09-07 **修回日期:**2009-10-26

2 问题描述及定义

考虑如下的不确定时变时滞受扰线性系统：

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A(t))x(t)+(A_d+\Delta A_d(t))x(t-d(t))+Bu(t)+Cw(t) \tag{1}$$
$$z(t)=Dx(t)$$

$$x(t)=\phi(t),\ \forall t\in[-\tau,0] \tag{2}$$

其中，$x(t)\in R^n$为系统状态变量，$u(t)\in R^m$为控制输入，$w(t)\in R^r$为干扰输入，且$w(t)\in L_2[0,\infty)$，$z(t)\in R^p$为被控输出，A、A_d、B、C、D为已知的适维定常矩阵，$\Delta A(t)$和$\Delta A_d(t)$为范数有界时变不确定矩阵，并且具有如下广义匹配形式：

$$[\Delta A(t)\quad \Delta A_d(t)]=GF(t)[H\quad H_d] \tag{3}$$

其中，G、H、H_d为已知的适维定常实矩阵，$F(t)$为未知的时变实函数矩阵，且其元素Lebegus可测，满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I \tag{4}$$

时变时滞$d(t)$满足

$$0\leqslant d(t)\leqslant\tau,\ 0\leqslant\dot{d}(t)\leqslant\bar{d}<1$$

系统初始值$\phi(t)$为连续光滑的向量函数。

考虑到执行器可能失效，采用如下一类执行器故障集合模型：$\Omega\subseteq\{1,2,\cdots,dim(u)\}$表示执行器集合中容易失效的子集，该子集对镇定系统是冗余的，另一部分记为$\bar{\Omega}=\{1,2,\cdots,dim(u)\}-\Omega$，表示执行器集合中不会失效的子集。将控制矩阵$B$按照以上划分的两类执行器子集进行分解：

$$B=B_{\Omega}+B_{\bar{\Omega}} \tag{5}$$

其中，B_{Ω}和$B_{\bar{\Omega}}$分别是用零向量取代B中下标对应于集合Ω和$\bar{\Omega}$中的列向量后得到的矩阵。

令$\omega\subseteq\Omega$表示执行器集合中实际失效的子集，引入与前类似的分解：

$$B=B_{\omega}+B_{\bar{\omega}} \tag{6}$$

其中，对于B_{ω}和$B_{\bar{\omega}}$的分解类似于对B进行的B_{Ω}和$B_{\bar{\Omega}}$分解，于是可得

$$\begin{aligned}&B_{\bar{\omega}}B_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}}=B_{\bar{\Omega}}B_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}}+B_{\Omega\omega}B_{\Omega\omega}^{\mathrm{T}}\\&B_{\Omega}B_{\Omega}^{\mathrm{T}}=B_{\omega}B_{\omega}^{\mathrm{T}}+B_{\Omega\omega}B_{\Omega\omega}^{\mathrm{T}}\\&BB^{\mathrm{T}}=B_{\omega}B_{\omega}^{\mathrm{T}}+B_{\bar{\omega}}B_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{7}$$

从而有以下不等式成立：

$$B_{\bar{\omega}}B_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}}\geqslant B_{\bar{\Omega}}B_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}},\quad BB^{\mathrm{T}}\geqslant B_{\bar{\omega}}B_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

针对系统(1)，取状态反馈控制律为：

$$u(t)=-\frac{1}{2\varepsilon}B^{\mathrm{T}}Px(t) \tag{9}$$

式中，ε为正实数，P为需要设计的对称正定阵。

针对系统(1)，考虑到执行器失效情况，选取如下的二次型性能函数：

$$\begin{aligned}J=&\int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t=\\&\int_0^{\infty}x^{\mathrm{T}}(t)[Q+\frac{1}{4\varepsilon^2}PB_{\bar{\omega}}RB_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}}P]x(t)\mathrm{d}t\leqslant\\&\int_0^{\infty}x^{\mathrm{T}}(t)[Q+\frac{1}{4\varepsilon^2}PBRB^{\mathrm{T}}P]x(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{10}$$

式中，Q是已知的适维定常对称正定阵，R是已知的适维定常对角正定阵。

考虑存在执行器失效情况，在控制器(9)作用下，有下列故障闭环系统：

$$\dot{x}(t)=(A(t)-\frac{1}{2\varepsilon}B_{\bar{\omega}}B_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}}P)x(t)+A_d(t)x(t-d(t))+Cw(t) \tag{11}$$

式中，

$$A(t)=A+\Delta A(t),\ A_d(t)=A_d+\Delta A_d(t) \tag{12}$$

定义1 考虑含有执行器失效的时变时滞不确定系统(1)，对于给定的对称正定阵Q、对角正定阵R，如果存在状态反馈控制器(9)和正常数J^*，使得对所有允许的不确定量(3)，故障闭环系统(11)具有鲁棒容错性，并且满足以下条件：

(1)给定$\gamma>0$，在零初始条件下，存在

$$\|z(t)\|_2<\gamma\|w(t)\|_2 \tag{13}$$

(2)性能函数(成本函数)$J\leqslant J^*$。

则称J^*是一个保性能，而称不确定时滞系统(11)是保成本H_∞鲁棒可靠控制系统。

引理1 设$x\in R^n$，$y\in R^n$，M和N是适维的常数矩阵，则对任意满足$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$的时变适维实函数矩阵$F(t)$，有

$$2x^{\mathrm{T}}MF(t)Ny\leqslant\xi x^{\mathrm{T}}MM^{\mathrm{T}}x+\xi^{-1}y^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}Ny$$

成立，其中，ξ是任意正实数。

该文的目标就是设计状态反馈控制律(9)，使得时变时滞不确定系统(1)是保成本H_∞鲁棒可靠控制系统。

3 主要结果与证明

定理1 考虑具有状态时滞的不确定受扰系统(1)，给定对称正定阵Q、对角正定阵R以及正实数$\gamma>0$和$\varepsilon>0$，对于任意执行器失效情况$\omega\subseteq\Omega$，若存在对称正定矩阵P、S以及正实数$\xi>0$，使得下列矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\Theta & PA_d & PC & H^{\mathrm{T}}\\ A_d^{\mathrm{T}}P & -(1-\bar{d})S & 0 & H_d^{\mathrm{T}}\\ C^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma^2I & 0\\ H & H_d & 0 & -\xi I\end{bmatrix}<0 \tag{14}$$

其中，

$$\begin{aligned}\Theta=&Q+\frac{1}{4\varepsilon^2}PBRB^{\mathrm{T}}P+A^{\mathrm{T}}P+PA-\frac{1}{\varepsilon}PB_{\bar{\Omega}}B_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}}P+\\&\xi PGG^{\mathrm{T}}P+S+D^{\mathrm{T}}D\end{aligned} \tag{15}$$

则存在一个鲁棒可靠控制器(9)使系统(11)是保成本H_∞鲁棒可靠控制系统，其成本函数的上界为：

$$J\leqslant J^*=x^{\mathrm{T}}(0)Px(0)+\int_{-\tau}^{0}x^{\mathrm{T}}(\theta)Sx(\theta)\mathrm{d}\theta$$

证明 (1)首先证明当$w(t)=0$时，矩阵不等式(14)的成立能够保证系统(11)一致渐近稳定的。引入如下Lyapunov函数：

$$V(x,t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-d(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)Sx(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{16}$$

显然$V(x(t),t)$是正定的。式(16)沿方程(11)的解轨迹的导数为：

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t),t)=&2x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t)+x^{\mathrm{T}}(t)Sx(t)-\\&(1-\dot{d}(t))x^{\mathrm{T}}(t-d(t))Sx(t-d(t))=V_1+V_2+V_3\end{aligned} \tag{17}$$

其中，

$$\begin{aligned}V_1=&2x^{\mathrm{T}}(t)P[(A-\frac{1}{2\varepsilon}B_{\bar{\omega}}B_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}}P)x(t)+A_dx(t-d(t))]\leqslant\\&2x^{\mathrm{T}}(t)P[(A-\frac{1}{2\varepsilon}B_{\bar{\Omega}}B_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}}P)x(t)+A_dx(t-d(t))]\end{aligned} \tag{18}$$

$$V_2=2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{P}[\Delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\Delta\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-d(t))]\leqslant\xi\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{PGG}^{\mathrm T}\boldsymbol{Px}(t)+\xi^{-1}[\boldsymbol{Hx}(t)+\boldsymbol{H}_d\boldsymbol{x}(t-d(t))]^{\mathrm T}[\boldsymbol{Hx}(t)+\boldsymbol{H}_d\boldsymbol{x}(t-d(t))] \tag{19}$$

式中，$\xi>0$。

$$V_3=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{Sx}(t)-(1-\dot d(t))\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-d(t))\boldsymbol{Sx}(t-d(t))\leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{Sx}(t)-(1-\bar d)\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-d(t))\boldsymbol{Sx}(t-d(t)) \tag{20}$$

令

$$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-d(t))]^{\mathrm T} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\Xi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_1 & \boldsymbol{PA}_d\\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & -(1-\bar d)\boldsymbol{S}\end{bmatrix}+\xi^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{H}_d^{\mathrm T}\end{bmatrix}[\boldsymbol{H}\quad \boldsymbol{H}_d]$$

式中，$\boldsymbol{\Theta}_1=\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}-\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{PB}_\Omega\boldsymbol{B}_\Omega^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\xi\boldsymbol{PGG}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S}$，因而有

$$\dot V(\boldsymbol{x}(t),t)\leqslant\boldsymbol{Y}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Xi}Y$$

因为定理 1 中的式(14)隐含以下不等式：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_1 & \boldsymbol{PA}_d & \boldsymbol{H}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & -(1-\bar d)\boldsymbol{S} & \boldsymbol{H}_d^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{H}_d & -\xi\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{22}$$

所以根据 Schur 补引理，有

$$\boldsymbol{\Xi}<0 \tag{23}$$

因而 $\dot V(\boldsymbol{x}(t),t)\leqslant\boldsymbol{Y}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{Y}<0$。根据 Lyapunov 稳定性理论，故障闭环系统(11)是一致渐近稳定的，即系统具有鲁棒容错性。

(2)其次，证明故障闭环系统(11)的成本函数满足 $J\leqslant J^*$，即存在一个保性能 J^*。事实上根据定理 1 中的不等式(14)，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_2 & \boldsymbol{PA}_d & \boldsymbol{H}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & -(1-\bar d)\boldsymbol{S} & \boldsymbol{H}_d^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{H}_d & -\xi\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{24}$$

式中，

$$\boldsymbol{\Theta}_2=\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}-\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{PB}_\Omega\boldsymbol{B}_\Omega^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\xi\boldsymbol{PGG}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{Q}+\frac{1}{4\varepsilon^2}\boldsymbol{PBRB}^{\mathrm T}\boldsymbol{P} \tag{25}$$

而由式(24)可得以下不等式：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_2 & \boldsymbol{PA}_d & \boldsymbol{H}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & -(1-\bar d)\boldsymbol{S} & \boldsymbol{H}_d^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{H}_d & -\xi\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<\begin{bmatrix}-\boldsymbol{Q}-\frac{1}{4\varepsilon^2}\boldsymbol{PBRB}^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0 \tag{26}$$

所以有

$$\dot V(\boldsymbol{x}(t),t)\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)(-\boldsymbol{Q}-\frac{1}{4\varepsilon^2}\boldsymbol{PBRB}^{\mathrm T}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}(t)<0 \tag{27}$$

或等价地，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)(\boldsymbol{Q}+\frac{1}{4\varepsilon^2}\boldsymbol{PBRB}^{\mathrm T}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}(t)<-\dot V(\boldsymbol{x}(t),t) \tag{28}$$

对不等式(28)两边从 0 到 ∞ 积分，得

$$J=\int_0^\infty\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)[\boldsymbol{Q}+\frac{1}{4\varepsilon^2}\boldsymbol{PBRB}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}]\boldsymbol{x}(t)\mathrm dt\leqslant \boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{P\phi}(0)+\int_{-d(t)}^0\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(\theta)\boldsymbol{S\phi}(\theta)\mathrm d\theta\leqslant \boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{P\phi}(0)+\int_{-\tau}^0\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(\theta)\boldsymbol{S\phi}(\theta)\mathrm d\theta$$

取 $J^*=\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{P\phi}(0)+\int_{-\tau}^0\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(\theta)\boldsymbol{S\phi}(\theta)\mathrm d\theta$，显然，有 $J\leqslant J^*$。

(3)最后进行 H_∞ 性能分析。为了建立 $z(t)$ 的 $L_2[0,\infty)$ 范数的上界 $\gamma\|\boldsymbol{w}(t)\|_2$，引进性能函数：

$$J_{zw}=\int_0^\infty[\boldsymbol{z}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{z}(t)-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{w}(t)]\mathrm dt \tag{29}$$

注意到由于故障闭环系统的鲁棒稳定性保证了 $\|z(t)\|_2$ 有界性和 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=0$，因此在零初始条件下，对任意的 $\boldsymbol{w}(t)\in L_2[0,\infty)$，有

$$J_{zw}=\int_0^\infty[\boldsymbol{z}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{z}(t)-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{w}(t)]\mathrm dt=\int_0^\infty[\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm T}\boldsymbol{D}^{\mathrm T}\boldsymbol{Dx}(t)-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{w}(t)+\dot V(\boldsymbol{x}(t),t)]\mathrm dt+V(\boldsymbol{x}(t),t)|_{t=0}-V(\boldsymbol{x}(t),t)|_{t=\infty}=\int_0^\infty[\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm T}\boldsymbol{D}^{\mathrm T}\boldsymbol{Dx}(t)-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{w}(t)+\dot V]\mathrm dt$$

考虑干扰 $\boldsymbol{w}(t)$ 的存在，$V(\boldsymbol{x}(t),t)$ 沿方程(11)的解轨迹的导数为：

$$\dot V(\boldsymbol{x}(t),t)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{Sx}(t)-(1-\dot d(t))\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-d(t))\boldsymbol{Sx}(t-d(t))=V_4+V_5+V_6$$

式中，

$$V_4=2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{P}[(\boldsymbol{A}-\frac{1}{2\varepsilon}\boldsymbol{B}_{\bar\omega}\boldsymbol{B}_{\bar\omega}^{\mathrm T}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-d(t))+\boldsymbol{Cw}(t)]\leqslant 2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{P}[(\boldsymbol{A}-\frac{1}{2\varepsilon}\boldsymbol{B}_\Omega\boldsymbol{B}_\Omega^{\mathrm T}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-d(t))+\boldsymbol{Cw}(t)] \tag{30}$$

$$V_5=2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{P}[\Delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\Delta\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-d(t))]\leqslant\xi\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{PGG}^{\mathrm T}\boldsymbol{Px}(t)+\xi^{-1}[\boldsymbol{Hx}(t)+\boldsymbol{H}_d\boldsymbol{x}(t-d(t))]^{\mathrm T}[\boldsymbol{Hx}(t)+\boldsymbol{H}_d\boldsymbol{x}(t-d(t))] \tag{31}$$

式中，$\xi>0$。

$$V_6=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{Sx}(t)-(1-\dot d(t))\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-d(t))\boldsymbol{Sx}(t-d(t))\leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{Sx}(t)-(1-\bar d)\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-d(t))\boldsymbol{Sx}(t-d(t)) \tag{32}$$

令

$$\boldsymbol{W}^{\mathrm T}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-d(t))\quad \boldsymbol{w}^{\mathrm T}(t)]$$

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_3 & \boldsymbol{PA}_d & \boldsymbol{PC}\\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & -(1-\bar d)\boldsymbol{S} & 0\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}+\xi^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{H}_d^{\mathrm T}\\ 0\end{bmatrix}[\boldsymbol{H}\quad \boldsymbol{H}_d\quad 0]$$

式中，

$$\boldsymbol{\Theta}_3=\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}-\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{PB}_\Omega\boldsymbol{B}_\Omega^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\xi\boldsymbol{PGG}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{D}^{\mathrm T}\boldsymbol{D}$$

考虑干扰 $\boldsymbol{w}(t)$ 的存在，因而有

$$J_{zw}=\int_0^\infty[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{D}^{\mathrm T}\boldsymbol{Dx}(t)-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{w}(t)+\dot V]\mathrm dt\leqslant\int_0^\infty\boldsymbol{W}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Psi W}\mathrm dt$$

从定理 1 中的式(14)可推出

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_3 & \boldsymbol{PA}_d & \boldsymbol{PC} & \boldsymbol{H}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & -(1-\bar d)\boldsymbol{S} & 0 & \boldsymbol{H}_d^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I} & 0\\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{H}_d & 0 & -\xi\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{33}$$

根据 Schur 补引理，因而有

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_3 & \boldsymbol{PA}_d & \boldsymbol{PC}\\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & -(1-\bar d)\boldsymbol{S} & 0\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}+\xi^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{H}_d^{\mathrm T}\\ 0\end{bmatrix}[\boldsymbol{H}\quad \boldsymbol{H}_d\quad 0]<0$$

所以 $J_{zw}=\int_0^\infty \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{W}\mathrm{d}t<0$，从而有

$$\int_0^\infty \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)\mathrm{d}t<\int_0^\infty \gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)\mathrm{d}t$$

即 $\|\boldsymbol{z}(t)\|_2<\gamma\|\boldsymbol{w}(t)\|_2$。

综合以上证明过程，根据定义 1，定理 1 的结论成立。

定理 1 中的式(14)不是线性矩阵不等式，为了便于数值计算，下面的定理 2 将其转化为线性矩阵不等式(LMI)。

定理 2 考虑具有状态时变时滞的不确定受扰系统(1)，给定对称正定阵 $\boldsymbol{Q}$、对角正定阵 $\boldsymbol{R}$ 以及正实数 $\gamma>0,\varepsilon>0$，对于任意执行器失效情况 $\omega\subseteq\Omega$，若存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 以及正实数 $\xi>0$，使得下列线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_5 & \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X} & \boldsymbol{X} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}} & -(1-\bar{d})\boldsymbol{Y} & 0 & \boldsymbol{Y}\boldsymbol{H}_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{H}_d\boldsymbol{Y} & 0 & -\xi\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{X} & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{Q}^{-1} & 0 & 0\\ \boldsymbol{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{Y} & 0\\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \quad (34)$$

式中，

$$\boldsymbol{\Theta}_5=\frac{1}{4\varepsilon^2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{B}_{\bar{\Omega}}\boldsymbol{B}_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}}+\xi\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \quad (35)$$

则存在控制律

$$\boldsymbol{u}(t)=-\frac{1}{2\varepsilon}\boldsymbol{B}_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$$

使系统(11)为保成本 H_∞ 鲁棒可靠控制系统，其成本上界为：

$$J^*=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}(0)+\int_{-\tau}^0\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

证明 根据 Schur 补引理，定理 1 中的式(14)等价于下列不等式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_4 & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{P}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -(1-\bar{d})\boldsymbol{S} & 0 & \boldsymbol{H}_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{H}_d & 0 & -\xi\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{Q}^{-1} & 0 & 0\\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{S}^{-1} & 0\\ \boldsymbol{D} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \quad (36)$$

式中，

$$\boldsymbol{\Theta}_4=\frac{1}{4\varepsilon^2}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{\bar{\Omega}}\boldsymbol{B}_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\xi\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \quad (37)$$

用 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}^{-1}\ \ \boldsymbol{S}^{-1}\ \ \boldsymbol{I}\ \ \boldsymbol{I}\ \ \boldsymbol{I}\ \ \boldsymbol{I}\ \ \boldsymbol{I}\}$ 分别左乘和右乘式(36)，并令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{S}^{-1}$，可得式(34)和(35)，于是定理 2 得证。

4 数值算例

考虑式(1)系统，各参数为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-6 & 0.5 & 1\\ 0 & -2.5 & 1\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_d=\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1.5 & 1\\ 0.5 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1.5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0.5 & 0.2 & 0\\ 1 & 0 & 0.5\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0.2\end{bmatrix},\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0.2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0.1 & 0\\ 0 & 0 & 0.2\end{bmatrix},\boldsymbol{H}_d=\begin{bmatrix}0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0.1 & 0\\ 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_\Omega=\begin{bmatrix}1.5 & 1.5 & 0\\ 0.5 & 1 & 0\\ 1.2 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_{\bar{\Omega}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1.5\end{bmatrix}$$

时变时滞 $d(t)$ 满足：

$$0\leqslant d(t)\leqslant\tau=0.3,\ 0\leqslant\dot{d}(t)\leqslant\bar{d}=0.5$$

初始条件：

$$\boldsymbol{\phi}(t)=[\mathrm{e}^t\ \ \mathrm{e}^{-t}\ \ \mathrm{e}^t]^{\mathrm{T}}\quad\forall t\in[-\tau,0]$$

要求系统具有 H_∞ 性能指标 $\gamma=0.1$，且具有一个保性能 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix},\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0.1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，取参数 $\varepsilon=0.5,\xi=0.2$。用 MATLAB-LMI 解定理 2 中的式(34)，得以下结果：

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1.6529 & -0.2388 & -0.0694\\ -0.2388 & 0.3690 & 0.0443\\ -0.0694 & 0.0443 & 0.1914\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1.4673 & -0.0548 & 0.2470\\ -0.0548 & 0.5811 & 0.0471\\ 0.2470 & 0.0471 & 0.1251\end{bmatrix}$$

以下考虑执行器的四种情况，按照定理 2 所得到的控制器分别为：

情况 1 三个执行器全部正常：

$$\boldsymbol{u}(t)=-\frac{1}{2\varepsilon}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}=-\begin{bmatrix}1.8451 & 1.2490 & 10.8293\\ 1.5709 & 3.1176 & 5.0727\\ 0.8918 & -0.4140 & 8.2562\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

情况 2 第一个执行器失效，而其他两个执行器正常：

$$\boldsymbol{u}^*(t)=-\frac{1}{2\varepsilon}\begin{bmatrix}0 & 1.5 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1.5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}*\begin{bmatrix}1.6529 & -0.2388 & -0.0694\\ -0.2388 & 0.3690 & 0.0443\\ -0.0694 & 0.0443 & 0.1914\end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{x}(t)=$$

$$-\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1.5708 & 3.1168 & 5.0728\\ 0.8916 & -0.4151 & 8.2577\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

情况 3 第二个执行器失效，而其他两个执行器正常：

$$\boldsymbol{u}^*(t)=-\frac{1}{2\varepsilon}\begin{bmatrix}1.5 & 0 & 1\\ 0.5 & 0 & 0\\ 1.2 & 0 & 1.5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}*\begin{bmatrix}1.6529 & -0.2388 & -0.0694\\ -0.2388 & 0.3690 & 0.0443\\ -0.0694 & 0.0443 & 0.1914\end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{x}(t)=$$

$$-\begin{bmatrix}1.3917 & 1.4828 & 6.4316\\ 0 & 0 & 0\\ 0.8916 & -0.4151 & 8.2577\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

情况 4 第一和第二个执行器同时失效，而第三个执行器正常：

$$\boldsymbol{u}^*(t)=-\frac{1}{2\varepsilon}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1.5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}*\begin{bmatrix}1.6529 & -0.2388 & -0.0694\\ -0.2388 & 0.3690 & 0.0443\\ -0.0694 & 0.0443 & 0.1914\end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{x}(t)=$$

$$-\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0.8916 & -0.4151 & 8.2577\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

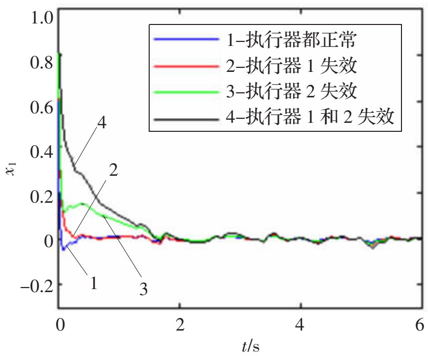

图 1　系统状态 x_1 的零输入响应

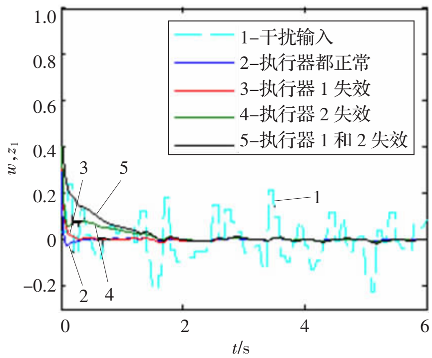

图 2　系统被控输出 z_1 的零输入响应

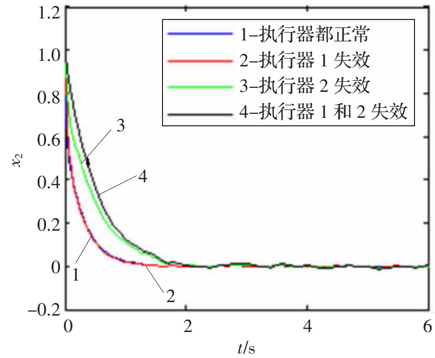

图 3　系统状态 x_2 的零输入响应

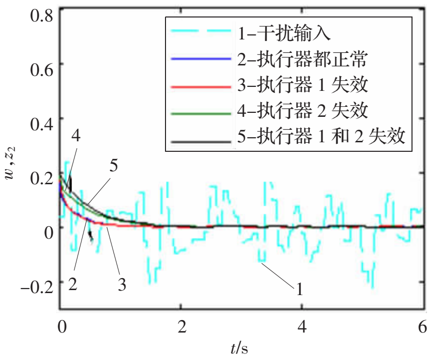

图 4　系统被控输出 z_2 的零输入响应

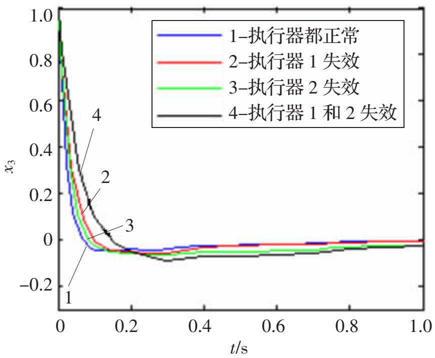

图 5　系统状态 x_3 的零输入响应

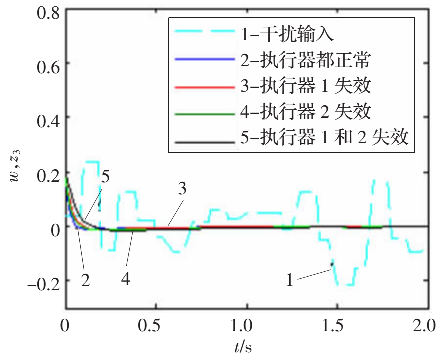

图 6　系统被控输出 z_3 的零输入响应

系统的保成本为：

$$J^*=10.012\ 6$$

系统响应曲线如图 1~图 6。图 1、图 3、图 5 分别为执行器的四种情况下系统状态 x_1、x_2、x_3 的零输入响应；而图 2、图 4、图 6 分别为执行器的四种情况下系统被控输出 z_1、z_2、z_3 的零输入响应。仿真结果表明，所设计的可靠控制器使时变时滞不确定参数系统对指定执行器子集中的任意执行器失效具有鲁棒容错性，对外界扰动具有很好的抑制能力，且系统存在保成本上界。

5　结论

考虑执行器故障模型，研究了一类参数不确定时变时滞受扰系统的保成本 H_∞ 鲁棒可靠控制问题。给出了系统保成本 H_∞ 鲁棒可靠控制器设计方法，所得的结果以线性矩阵不等式(LMI)形式给出，并且是时滞相关的。利用该方法设计的可靠控制器能够使得时变时滞系统对于任意允许的不确定性以及指定执行器子集中的任意执行器失效不仅具有鲁棒容错性，并且使系统存在保成本上界以及具有指定 H_∞ 范数的干扰抑制能力。

参考文献：

[1] Ackermann J.Robustness against sensor failures[J].Automatica，1984，20(2)：211–215.

[2] Veillette R J，Medanic J V，Perkins W R.Design of reliable control systems[J].IEEE Trans on Automatic Control，1992，37(3)：290–304.

[3] Seo C J，Kim B K.Robust and reliable H_∞ control for linear systems with parameter uncertainty and actuator failure[J].Automatica，1996，32(3)：465–467.

[4] 王景成，邵惠鹤.不确定时滞系统的基于 Razumikhin 定理的鲁棒 H_∞ 可靠控制[J].自动化学报，2002，28(3)：262–266.

[5] 谢立.执行器失效不确定时滞系统的指定衰减度鲁棒可靠控制[J].传感技术学报，2005，18(3)：460–465.

[6] Hu Gang，Ren Jun–chao，Liu Cen–feng.Robust guaranteed cost reliable control for uncertain discrete–time linear systems[C]//Proc of the Fourth International Conference on Control and Automation，2003：208–212.

[7] 贾新春，郑南宁，张元林.线性不确定时滞系统的可靠保性能鲁棒控制[J].自动化学报，2003，29(6)：971–975.

[8] 胡何丽，张庆灵.时变时滞不确定组合系统的可靠保性能鲁棒控制[J].系统工程与电子技术，2006，28(2)：275–279.

[9] Yao Bo，He Xin.Guaranteed cost reliable control for discrete–time linear systems[C]//Proc of the Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation，Dalian，China，2006，1：1294–1298.

[10] Qian Zheng–wei，Zhang Guo–shan.Robust fault–tolerant guaranteed cost control for a class of uncertain discrete time–delay systems[C]//Proc of the 25th Chinese Control Conference，2006：1238–1242.

[11] Liu Hong–Liang，Duan Guang–Ren，Zhang Ying.Robust reliable guaranteed cost control of linear descriptor time–delay systems with actuator failures [C]//Proc of the International Conference on Machine Learning and Cybernetics，2006：422–427.

[12] 滕青芳，范多旺.不确定时滞系统的指定衰减度保代价可靠控制[J].计算机工程与应用，2007，43(34)：192–195.

[13] 滕青芳，范多旺.传感器失效不确定时滞系统指数稳定 H_∞ 可靠控制[J].电机与控制学报，2008，12(2)：195–201.