

离散时滞网络化系统 H_∞ 控制

刘自鑫^{1,2}, 吕 恕¹, 钟守铭¹

LIU Zi-xin^{1,2}, LV Shu¹, ZHONG Shou-ming¹

1.电子科技大学 应用数学学院, 成都 610054

2.贵州财经学院 数学与统计学院, 贵阳 550004

1.School of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China

2.School of Mathematics and Statistics, Guizhou College of Finance and Economics, Guiyang 550004, China

E-mail: zixinliu@foxmail.com

LIU Zi-xin, LV Shu, ZHONG Shou-ming. H_∞ control for discrete networked systems with time delays. *Computer Engineering and Applications*, 2010, 46(1): 18-20.

Abstract: The H_∞ controller design problem of a class of non-ideal networked control system with time delay, data packet and wrong-sequence is investigated. For overcoming the fault of previous H_∞ algorithm, by constructing a new difference inequality, a new improved H_∞ algorithm is proposed. In the new algorithm, the upper bound of H_∞ norm is not necessarily previously given and the computation of inverse matrix is not needed. Compared with previous algorithm, new algorithm is less conservative. Numerical simulation example shows that the method proposed is valid.

Key words: networked control systems; time delay; Linear Matrix Inequality (LMI); H_∞ controller; exponential stability

摘 要: 研究了一类包含网络诱导时滞、数据丢包以及错序等非理想网络模型的 H_∞ 控制问题。针对以往 H_∞ 控制器设计算法的缺点, 通过建立新的差分不等式, 提出了一个新的改进算法。新算法具有保守性弱、不需事先给定 H_∞ 范数上界以及不需要计算逆矩阵等特点。数值仿真例子表明, 新算法是有效的。

关键词: 网络控制系统; 时滞; 线性矩阵不等式; H_∞ 控制器; 指数稳定

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2010.01.006 文章编号: 1002-8331(2010)01-0018-03 文献标识码: A 中图分类号: TP13

1 引言

由于网络控制系统^[1](Networked Control Systems, NCS)具有安装维护简便、系统灵活性高、便于进行故障诊断、成本低等优点^[2], 其广泛应用于制造自动化、工业过程控制等领域。考虑到网络动态行为数学建模的需要, 通常将各种复杂的网络行为抽象为信息传输延时、丢包、错序、节点驱动方式以及噪声干扰等因素^[3]。这些因素会降低网络性能, 甚至导致网络的不稳定。这使得基于控制理论的网络控制系统分析成为国内外学术研究的一个热点^[4]。近年来, 人们将系统增益的 H_∞ 控制引入到网络控制系统, 并取得了一定进展^[5-7]。文献[8]研究了一类同时具有网络诱导时延、数据丢包、时序错乱、系统参数扰动以及外部随机扰动下的连续型网络控制问题。文献[9]从离散系统的角度建立了包含变时滞及网络丢包等非理想网络系统统一模型, 并进行了 NCS 的渐近稳定性分析和控制器设计。文献[10]针对文献[9]中模型的不足, 建立了闭环时滞系统模型, 并采用线性矩阵不等式技术设计了 H_∞ 状态反馈控制器。

然而文献[8-10]中所提算法具有以下不足: (1) 判定网络控制系统稳定性时需要事先给出控制增益矩阵和 H_∞ 范数上界。

(2) 没有给出 H_∞ 范数上界的估计准则。(3) H_∞ 控制器无法直接设计, 需要进行逆矩阵计算。针对上述算法缺点, 通过建立一个新的差分不等式, 提出了一个新的改进算法。新算法有效地克服了上述不足。

2 问题描述

考虑如下离散时变网络控制系统^[10]:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_w\mathbf{w}(k)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{w}(k) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}_w, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 表示适当维数的网络连接权矩阵, $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量, $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^m$ 表示控制输入, $\mathbf{z}(k) \in \mathbf{R}^p$ 是控制输出向量, $\mathbf{w}(k) \in \mathbf{R}^r$ 是外部扰动且满足 $\mathbf{w}(k) \in L_2[0, \infty)$ 。在系统状态可测, 采用零阶保持器条件下, 控制输入 $\mathbf{u}(k)$ 可表示为:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k) + \mathbf{K}_\tau\mathbf{x}(k-\tau(k)), 0 < \tau_m \leq \tau(k) \leq \tau_M \quad (2)$$

其中 $\tau(k)$ 表示网络诱导时变时延, τ_m, τ_M 是时延上下界。将控制输入 $\mathbf{u}(k)$ 带入式(1), 则式(1)可表示为:

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_\tau]\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(k-\tau(k)) + \mathbf{B}_w\mathbf{w}(k)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{w}(k), 0 < \tau_m \leq \tau(k) \leq \tau_M \quad (3)$$

基金项目: 国家重点基础研究发展规划(973)(the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2010CB732501)。

作者简介: 刘自鑫(1977-), 男, 博士研究生, 讲师, 主要研究领域为网络化控制系统, 时滞系统; 吕恕(1963-), 女, 博士研究生, 副教授, 主要研究领域为微分动力系统稳定性理论; 钟守铭(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为动力系统稳定性理论。

收稿日期: 2009-09-03

修回日期: 2009-10-09

引理 1^[1] 对任意实向量 $v_i \in R^n, i \in N^+$, 有 $[\sum_{i=1}^n v_i]^T [\sum_{i=1}^n v_i] \leq n \sum_{i=1}^n v_i^T v_i$ 。

定义 1 假设闭环系统式(3)满足如下两个条件:

(1) 在 $w(k) \equiv 0$ 的条件下, 闭环系统式(3)是指数稳定的;

(2) 在零初值条件下, 对给定的 $\gamma > 0$ 及任意外部扰动 $w(k) \in L_2[0, \infty)$, 控制输出向量 $z(k)$ 满足 $\|z(k)\|_2 \leq \gamma \|w(k)\|_2$, 则称闭环系统式(3)具有 H_∞ 范数界, 且是指数稳定的。

3 状态反馈的 H_∞ 控制

为给出系统式(3)的 H_∞ 控制器设计改进算法, 首先给出一个重要的引理。

引理 2 如果存在正数 $\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 以及非负函数 $V(x(k))$ 使得

$$\alpha_2 \|x(k)\|^2 \leq V(x(k)) \leq \alpha_1 \|x(k)\|^2 + \alpha_3 \sum_{i=k-\tau_w}^{k-1} \|x(i)\|^2 \quad (4)$$

$$\Delta V(x(k)) \leq -\varepsilon \|x(k)\|^2$$

则一定存在 $\theta_0 > 1$ 满足

$$\|x(k)\|^2 \leq \frac{1}{\alpha_2 \theta_0^k} [V(x(0)) + (\theta_0 - 1) \alpha_3 \tau_M^2 \theta_0^{\tau_w} \sup_{j \in \mathbb{N}[-\tau_w, 0]} \|x(j)\|^2] \quad (5)$$

证明 对任意 $\theta > 1$, 由不等式(4)可知 $\theta^{j+1} V(x(j+1)) - \theta^j V(x(j)) = \theta^{j+1} \Delta V(x(j)) - \theta^j (\theta - 1) V(x(j)) \leq \theta^j [-\varepsilon \theta \|x(j)\|^2 + (\theta - 1)(\alpha_1 \|x(j)\|^2 + \alpha_3 \sum_{i=j-\tau_w}^{j-1} \|x(i)\|^2)]$ 。对该式两边关于 j 从 0 到 $k-1$ 求和得到

$$\begin{aligned} \theta^k V(x(k)) - V(x(0)) &\leq [\alpha_1 (\theta - 1) - \varepsilon \theta] \sum_{j=0}^{k-1} \theta^j \|x(j)\|^2 + \\ &(\theta - 1) \alpha_3 \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=j-\tau_w}^{j-1} \theta^j \|x(i)\|^2 \leq \\ &[\alpha_1 (\theta - 1) - \varepsilon \theta] \sum_{j=0}^{k-1} \theta^j \|x(j)\|^2 + \\ &(\theta - 1) \alpha_3 \left[\sum_{i=-\tau_w}^{-1} \sum_{j=0}^{i+\tau_w} + \sum_{i=0}^{k-1+\tau_w} \sum_{j=i+1}^{i+\tau_w} + \sum_{i=k-\tau_w}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k-1} \right] \theta^j \|x(i)\|^2 \leq \\ &(\theta - 1) \alpha_3 \tau_M^2 \theta^{\tau_w} \sup_{j \in \mathbb{N}[-\tau_w, 0]} \|x(j)\|^2 + \\ &[\alpha_1 (\theta - 1) - \varepsilon \theta + (\theta - 1) \alpha_3 \tau_M \theta^{\tau_w}] \sum_{j=0}^k \theta^j \|x(j)\|^2 \quad (6) \end{aligned}$$

令 $\omega(\theta) = \alpha_1 (\theta - 1) - \varepsilon \theta + (\theta - 1) \alpha_3 \tau_M \theta^{\tau_w}$ 。因为 $\omega(1) < 0$, 由连续性可知一定存在 $\theta_0 > 1$ 使得 $\omega(\theta_0) < 0$ 。由式(6)可得:

$$V(x(k)) \leq \theta_0^{-k} [V(x(0)) + (\theta_0 - 1) \alpha_3 \tau_M^2 \theta_0^{\tau_w} \sup_{j \in \mathbb{N}[-\tau_w, 0]} \|x(j)\|^2]$$

从而不等式(5)成立。

基于引理 2 的结论, 容易得到如下 H_∞ 控制器设计改进算法。

定理 1 闭环系统式(3)具有 H_∞ 范数上界 γ , 并且是指数稳定的, 如果存在正定矩阵 P, H, Q, R , 正定对角矩阵 Z_1, Z_2 , 以及任意矩阵 M_1, P_1, P_2, G_1, G_2 使得如下线性矩阵不等式成立

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & \Xi_{15} & 0 & 0 & \Xi_{18} & B_w & C^T \\ * & \Xi_{22} & K_2^T B^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} & \Xi_{35} & \Xi_{36} & \Xi_{37} & \Xi_{38} & B_w & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & \Xi_{45} & \Xi_{46} & \Xi_{47} & \Xi_{48} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & \Xi_{56} & \Xi_{57} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Xi_{77} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{88} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & D^T \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

$$\text{其中 } Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ * & Q_{22} & Q_{23} \\ * & * & Q_{33} \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= M_1 + M_1^T + A + A^T + BK_1 + K_1^T B^T - \\ &2I + [1 + (\tau_M - \tau_m)^{-1}] [R + P_1 + P_1^T + G_1 + G_1^T] \\ \Xi_{12} &= -M_1 + BK_2 + P_2 - P_1 - G_1 + G_2 \\ \Xi_{13} &= Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} - 2I + A^T + K_1^T B^T + P_1^T \\ \Xi_{14} &= -Q_{12} - Q_{13} - Q_{13}^T - P_2^T + G_2^T - P_1^T - G_1^T - M_1 \\ \Xi_{22} &= -(\tau_M - \tau_m)^{-1} R - P_2 - P_2^T - G_2 - G_2^T \\ \Xi_{33} &= Q_{12} + Q_{12}^T + Q_{13} + Q_{13}^T + Q_{23} + Q_{23}^T + Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} + \\ &H + P + \tau_m Z_2 + \tau_M Z_1 - 2I \\ \Xi_{34} &= -Q_{12} - Q_{22} - Q_{23}^T, \Xi_{35} = -Q_{13} - Q_{23} - Q_{23}^T \\ \Xi_{36} &= Q_{12} + Q_{22} + Q_{23}^T, \Xi_{37} = Q_{13} + Q_{23} + Q_{23}^T \\ \Xi_{38} &= -P_2 - P_2^T - G_2 - G_2^T, \Xi_{44} = Q_{22} - H, \Xi_{45} = Q_{23} \\ \Xi_{46} &= -Q_{22}, \Xi_{47} = -Q_{23}, \Xi_{48} = -P_1, \Xi_{55} = Q_{33} - P \\ \Xi_{56} &= -Q_{23}, \Xi_{57} = -Q_{33}, \Xi_{66} = -\tau_m^{-1} Z_1, \Xi_{77} = -\tau_M^{-1} Z_2 \\ \Xi_{88} &= -P_2^T - G_2^T - P_2 - G_2 \end{aligned}$$

证明 令构造如下 Lyapunov-Krasovk 泛函 $V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k) + V_5(k)$ 其中

$$V_1(k) = \hat{X}^T(k) Q \hat{X}(k), \eta(k) = x(k+1) - x(k)$$

$$\hat{X}^T(k) = [x^T(k), \sum_{i=k-\tau_m}^{k-1} \eta^T(i), \sum_{i=k-\tau_w}^{k-1} \eta^T(i)]$$

$$V_2(k) = \sum_{i=k-\tau_m}^{k-1} \eta^T(i) H \eta(i) + \sum_{i=k-\tau_w}^{k-1} \eta^T(i) P \eta(i)$$

$$V_3(k) = \sum_{j=-\tau_w}^{-1} \sum_{i=j+k}^{k-1} \eta^T(i) Z_1 \eta(i) + \sum_{j=-\tau_m}^{-1} \sum_{i=j+k}^{k-1} \eta^T(i) Z_2 \eta(i)$$

$$V_4(k) = (\tau_M - \tau_m)^{-1} \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} x^T(i) R x(i)$$

$$V_5(k) = (\tau_M - \tau_m)^{-1} \sum_{j=k+1-\tau_w}^{k-1} \sum_{i=j}^{k-1} x^T(i) R x(i)$$

$$\text{令 } x^T(k) = [x^T(k), x^T(k-\tau(k)), \eta^T(k), \eta^T(k-\tau_m), \eta^T(k-\tau_M)],$$

$$\sum_{i=k-\tau_m}^{k-1} \eta^T(i), \sum_{i=k-\tau_w}^{k-1} \eta^T(i)]$$

由引理 1, 则沿闭环系统式(3)的解可得差分不等式 $\Delta V_1(k) = X^T(k) [\tilde{I}_1^T Q \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2^T Q \tilde{I}_2] X(k)$, 其中

$$\tilde{\mathbf{I}}_1^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{I}}_2^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\Delta V_2(k) = \boldsymbol{\eta}^T(k)(\mathbf{H}+\mathbf{P})\boldsymbol{\eta}(k) - \boldsymbol{\eta}^T(k-\tau_m)\mathbf{H}\boldsymbol{\eta}(k-\tau_m) - \boldsymbol{\eta}^T(k-\tau_m)\mathbf{P}\boldsymbol{\eta}(k-\tau_m)$$

$$\Delta V_3(k) \leq \tau_m \boldsymbol{\eta}^T(k)\mathbf{Z}_1\boldsymbol{\eta}(k) - \tau_m^{-1} \left(\sum_{i=k-\tau_m}^{k-1} \boldsymbol{\eta}(i) \right)^T \mathbf{Z}_1 \left(\sum_{i=k-\tau_m}^{k-1} \boldsymbol{\eta}(i) \right) +$$

$$\tau_m \boldsymbol{\eta}^T(k)\mathbf{Z}_2\boldsymbol{\eta}(k) - \tau_m^{-1} \left(\sum_{i=k-\tau_m}^{k-1} \boldsymbol{\eta}(i) \right)^T \mathbf{Z}_2 \left(\sum_{i=k-\tau_m}^{k-1} \boldsymbol{\eta}(i) \right)$$

$$\Delta V_4(k) \leq (\tau_M - \tau_m)^{-1} [\mathbf{x}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k-\tau(k))\mathbf{R}\mathbf{x}(k-\tau(k))] +$$

$$(\tau_M - \tau_m)^{-1} \left[\sum_{i=k+1-\tau_m}^{k-\tau_m} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{R}\mathbf{x}(i) \right]$$

$$\Delta V_5(k) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{x}(k) - (\tau_M - \tau_m)^{-1} \left[\sum_{i=k+1-\tau_m}^{k-\tau_m} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{R}\mathbf{x}(i) \right] \quad (8)$$

由式(3)及 $\boldsymbol{\eta}(k) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)$ 可得:

$$2\mathbf{x}^T(k)[(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1 - \mathbf{I})\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{K}_2\mathbf{x}(k-\tau(k)) + \mathbf{B}\mathbf{w}(k) - \boldsymbol{\eta}(k)] = 0$$

$$2\boldsymbol{\eta}^T(k)[(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1 - \mathbf{I})\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{K}_2\mathbf{x}(k-\tau(k)) + \mathbf{B}\mathbf{w}(k) - \boldsymbol{\eta}(k)] = 0$$

$$2\mathbf{x}^T(k)\mathbf{M}_1[\mathbf{x}(k) - \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} \boldsymbol{\eta}(i) - \mathbf{x}(k-\tau(k))] = 0 \quad (9)$$

另一方面,注意到

$$\tilde{\mathbf{X}}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_1 \\ 0 & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{X}}_2 = \tilde{\mathbf{X}}_1^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{G}_1 \\ 0 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{X}}_2 = 0 \quad (10)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{X}}_1^T(k) = [\boldsymbol{\eta}^T(k) + \mathbf{x}^T(k), \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} \boldsymbol{\eta}^T(i) + \mathbf{x}^T(k-\tau(k))]$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_2^T(k) = [\boldsymbol{\eta}^T(k) + \mathbf{x}^T(k), \mathbf{x}^T(k) - \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} \boldsymbol{\eta}^T(i) - \mathbf{x}^T(k-\tau(k))]$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_1^T(k) = [\mathbf{x}^T(k), \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} \boldsymbol{\eta}^T(i) + \mathbf{x}^T(k-\tau(k))] \quad (11)$$

当 $\mathbf{w}(k) = 0$ 时,由式(7)~(11)及 Schur 定理,容易知道一定存在充分小的正数 ε 满足

$$\Delta V(k) \leq -\varepsilon \|\mathbf{x}(k)\|^2 \quad (12)$$

根据 $V(k)$ 的构造方式易得:

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}(k)\|^2 \leq V(k) \leq \alpha_2 \|\mathbf{x}(k)\|^2 + \alpha_3 \sum_{i=k-\tau_M}^{k-1} \|\mathbf{x}(i)\|^2$$

其中 $\alpha_1 = \lambda_{\min}(\mathbf{Q})$, $\alpha_2 = \lambda_{\max}(\mathbf{Q})(1 + \tau_m + \tau_M) + \lambda_{\max}(\mathbf{H}) + \lambda_{\max}(\mathbf{P}) + \tau_M \lambda_{\max}(\mathbf{Z}_1) + \tau_m \lambda_{\max}(\mathbf{Z}_2)$, $\alpha_3 = \alpha_1 + \lambda_{\max}(\mathbf{R})[1 + (\tau_M - \tau_m)^{-1}]$ 。由引理2 易得 $\|\mathbf{x}(k)\|^2 \leq \alpha_2^{-1} \theta_0^{-k} [V(0) + (\theta_0 - 1)\alpha_3 \tau_M \theta_0^{\tau_M} \sup_{j \in \mathbb{N}[-\tau_M, 0]} \|\mathbf{x}(j)\|^2]$ 。

即当 $\mathbf{w}(k) = 0$ 时系统式(3)是指数稳定的。另一方面,在零初值条件下,令 $\tilde{\mathbf{I}} = [C, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, D]$, 则 $\Delta V(k) + \mathbf{z}^T(k)\mathbf{z}(k) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(k)\mathbf{w}(k) = \Delta V(k) + \tilde{\mathbf{X}}^T(k)\tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{X}}(k) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(k)\mathbf{w}(k) = \tilde{\mathbf{X}}^T(k)[\Xi_2 + \tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{X}}(k)]$, 其中 $\tilde{\mathbf{X}}^T(k) = [\mathbf{X}^T(k), \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} \boldsymbol{\eta}^T(i), \mathbf{w}^T(k)]$, Ξ_2 为矩阵 Ξ 的前九行前九列元素组成的矩阵。由 Schur 定理,线性矩阵

不等式(7)成立则 $\Xi_2 + \tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{X}}(k) < 0$ 于是

$$\Delta V(k) + \mathbf{z}^T(k)\mathbf{z}(k) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(k)\mathbf{w}(k) < 0 \quad (13)$$

对式(13)两边关于 k 从 0 到 ∞ 求和得到 $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{z}^T(i)\mathbf{z}(i) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(k)\mathbf{w}(k) < V(0) - V(\infty)$, 由于零初值条件即 $V(0) = 0$ 可知

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{z}^T(i)\mathbf{z}(i) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(k)\mathbf{w}(k) < 0 \quad (14)$$

即 $\|\mathbf{z}\|_2 < \gamma \|\mathbf{w}\|_2$, 定理证毕。

注1 文献[10]对系统式(3)的 H_∞ 性能进行了分析,并给出了 H_∞ 控制器设计算法,其算法所给条件不是一个严格的线性矩阵不等式条件。并且求解不等式条件时要事先给定 H_∞ 范数上界 γ 和控制增益矩阵 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ 。 H_∞ 控制器设计时需要在给定 H_∞ 范数上界 γ 条件下求解一个线性矩阵不等式。另外文献[8, 10]中算法需要进行逆矩阵运算,当系统维数较大时计算量大,实用性不强。定理1 所给算法是一个严格的线性矩阵不等式条件,求解时不必事先给出 H_∞ 范数上界 γ 和控制增益矩阵 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ 。 H_∞ 控制器 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ 的设计以及 H_∞ 范数上界 γ 可以通过式(7)直接求解出来,这给 H_∞ 控制带来方便。

注2 广义李亚普诺夫函数 $V(k)$ 的构造充分利用了离散

网络状态变量 $\mathbf{x}^T(k), \sum_{i=k-\tau_m}^{k-1} \mathbf{x}^T(i), \sum_{i=k-\tau_m}^{k-1} \boldsymbol{\eta}^T(i)$ 之间的关系,其有利于降低判据的保守性。

注3 通过式(10)中的零方程引入的自由矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ 有利于判据保守性的进一步降低。

注4 不等式条件(7)表明, H_∞ 范数上界 γ 仅和矩阵 \mathbf{B}_w 直接相关,且 H_∞ 范数上界 γ 可由 $\mathbf{B}_w - \gamma^2 \mathbf{I} < 0$ 进行估计。

4 仿真例子

为比较需要,考虑离散化网络控制系统^[10]式(3),其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.10 \\ -0.53 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [-0.1 \ 0.2], \mathbf{D} = [0.1 \ 0]$$

可以验证,在此给定参数下的系统式(3)是不稳定的。利用 Matlab LMI 工具箱以及式(7),可以直接设计出 H_∞ 控制器 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$, 并找到 H_∞ 范数上界 γ 。假设网络诱导时延上下界为 $\tau_m = 1, \tau_M = 4$ 时,根据定理1,可以直接解得 H_∞ 控制器反馈增益矩阵以及 H_∞ 范数上界 γ 为 $\mathbf{K}_1 = [-0.800 \ 0, -3.206 \ 9], \mathbf{K}_2 = [1.196 \ 8, 3.542 \ 4], \gamma = 3.376 \ 7$ 。给定初始状态 $\mathbf{x}(0) = [3, -1]^T$, 干扰输入 $\mathbf{w}(k)$ 为当 $2 \leq k \leq 3$ 时 $w_1(k) = w_2(k) = 0.3$, 否则 $\mathbf{w}(k) = \mathbf{0}$ 。在上述反馈增益矩阵条件下,系统的状态反应如图1所示,由图1可

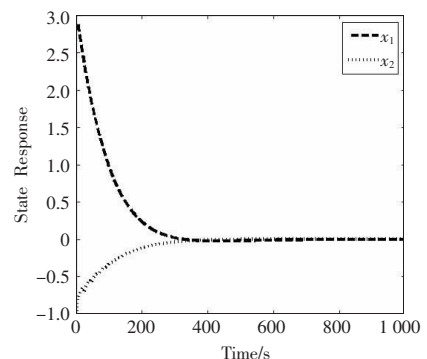


图1 系统的状态响应