

正交距离椭圆拟合法的推广及其实现

张庆丰

ZHANG Qing-feng

暨南大学 计算机科学系,广州 510632

Department of Computer Science, Jinan University, Guangzhou 510632, China

E-mail: zhang.qingfeng135@gmail.com

ZHANG Qing-feng. Extension of orthogonal distance method of ellipse fitting and its implementation. *Computer Engineering and Applications*, 2010, 46(1): 14-17.

Abstract: The fitting problem of concentric elliptical arcs exists in astronomy image processing, computer vision and CAD. To solve the problem, the least-square orthogonal distance method of single ellipse's fitting is extended, and its algorithm is proposed. The steps and pseudocodes of its implementation are also presented. The extended method unifies several ones which are for single circle fitting, single ellipse fitting and multiple concentric circles or ellipses fitting. All these fitting cases can be handled by one procedure. Experimental results show that the extended method is more accurate and stable than single arc fitting one.

Key words: ellipse fitting; multiple arcs fitting; geometric fitting; nonlinear least squares

摘要: 同心圆弧的拟合问题存在于计算机视觉、天文图像处理、CAD 等领域。将椭圆的正交几何距离拟合法推广到多个同心圆弧拟合上, 提出一种同心圆弧拟合的处理方法。文中还给出了该方法实现的具体步骤和伪代码, 该方法将单一圆、椭圆的拟合以及多个同心圆和椭圆的拟合统一了起来。实验表明该方法稳定、有效。

关键词: 椭圆拟合; 多弧拟合; 几何拟合; 非线性最小二乘

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2010.01.005 **文章编号:** 1002-8331(2010)01-0014-04 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP391.41

1 引言

在计算机视觉、图像处理、CAD 等方面有时需要同时探测、拟合多个存在某种相互关联的几何体, 这种相互关联可能是某种代数约束、也可能只是几何体之间的相互平行、垂直、同心等情况。目前大多数的研究都在关注单个几何体的拟合, 对多个几何体的拟合研究还较少。文献[1-4]对多个几何体的拟合法从理论或者应用的角度进行了一定的研究, 总体来说, 这种研究尚有不足。研究了多个同心圆弧的拟合法及其实现。

单个椭圆的拟合法有多种, 如基于 Hough 变换的椭圆拟合法^[5], Kalman 滤波方法^[6], 最小二乘距离拟合法等^[7-13]。其中最小二乘距离拟合法适用范围广、精度高、最为常用, 该方法又分为基于代数距离的拟合法和基于正交几何距离的拟合法, 从文献情况看, 前者的研究远超过后者。事实上, 一般认为基于几何距离的拟合法比基于代数距离的拟合法更准确、更稳定, 但是多数的已有方法还是建立在代数距离的误差估计上, 这主要是因为代数距离的拟合法往往比较容易实现, 而且优化过程较简单, 而几何距离方法中要计算拟合点到椭圆的几何距离, 这有一定困难, 有的涉及四阶方程求解^[8], 有的涉及复杂的坐标变换^[10], 即便绕开了几何距离的计算也要涉及复杂的参数变换等^[12]。总体来看基于几何距离的拟合法应用有限, 其难

点在于程序实现不便。将 Ahn S J, Rau H W 和 Warnecke H J^[10]提出的单个椭圆的正交距离拟合法推广到多个同心圆弧的拟合上, 并将算法的实现过程给出详尽的步骤和伪代码, 希望能有利于基于几何距离的拟合法的推广应用。

2 多个同心圆弧的正交几何距离拟合法

有多个同心圆弧 C_1, C_2, \dots, C_n (可能相交, 也可能不相交), 每个圆弧 C_i 对应一个离散点 (X_i, Y_i) 的集合 S_i 。多个圆弧拟合问题, 就是通过对 n 个离散点集进行拟合计算, 分别求出每个圆弧的几何参数: 长半轴 a , 短半轴 b , 倾斜角度 θ , 以及它们的共同圆心 (X_0, Y_0) 。

文献[10]提出了基于最小二乘正交距离的单椭圆拟合法。将推广该方法来拟合多个同心圆弧。

n 个同心弧涉及到 $3n+2$ 个几何参数, 它们构成向量: $\mathbf{a}^T = [X_0 \ Y_0 \ a_1 \ b_1 \ \theta_1 \ \dots \ a_n \ b_n \ \theta_n]$ 。设某给定离散点 P 的坐标向量是 \mathbf{X} , 它是属于某个圆弧的点, 在该圆弧上的正交近邻点 P' 的坐标向量为 \mathbf{X}' (它是 \mathbf{X} 和 \mathbf{a} 的函数, 即 $\mathbf{X}' = \mathbf{X}'(\mathbf{X}, \mathbf{a})$)。则椭圆弧的最小二乘正交距离几何拟合问题可表述为使式(1)最小化:

$$E = \sum_{k=1}^m (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k')^T (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k') \quad (1)$$

基金项目: 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10573008, No.10778617)。

作者简介: 张庆丰(1970-), 博士, 副教授, 主要研究方向: 计算机图形学, 图像处理。

收稿日期: 2009-08-17 修回日期: 2009-09-17

其中, $X_k \in S, S = \bigcup_{i=1}^n S_i$, 所有椭圆弧的离散点数据为 m 个。

也就是说参数矢量 a 是使式(1)最小的解, 或者说参数矢量 a 所描述的椭圆弧群, 应该使得所有离散点到弧的正交距离的平方和最小。

式(1)的求解可以按照高斯-牛顿迭代的方法来进行计算, 即按照如下的方程迭代求解:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_k'}{\partial a} \Big|_{a_i} \Delta a = X_k - X_k', k=1, 2, \dots, m \\ a_{l+1} = a_l + \Delta a, l \text{ 为迭代次数} \end{array} \right. \quad (2)$$

式(2)的计算存在两个难点, 一个是 X_k' 的计算, 一个是 $\partial X_k' / \partial a$ 的计算。前者是离散点 X_k 对应的正交邻近点计算的问题, 后者是一个 Jacobi 矩阵的计算问题。这两个问题的解决分述如下。

2.1 正交邻近点的求解

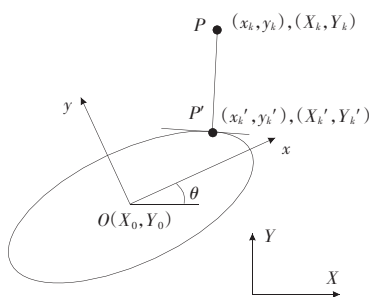


图1 一个离散点 P 及其在椭圆上的正交邻近点 P'

(xy 为该椭圆的局部坐标系, XY 为全局坐标系, θ 为椭圆的倾角)

在全局坐标系 XY 中引入关于某个椭圆弧的局部坐标系 xy , 该坐标系的原点位于椭圆弧中心 (X_0, Y_0) , 并绕该点旋转 θ 角, 让局部坐标和椭圆的长短轴重合。如图1所示。则: 全局坐标和局部坐标之间存在如下的变换:

$$X = R(X - X_0) \quad (4)$$

其中 $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, 对于 R 矩阵有: $R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

从图1可以看出, 椭圆上的正交邻近点满足两个条件, 一个是椭圆方程, 一个是连线 PP' 与点 P' 处的椭圆切线垂直。假定椭圆的长半轴为 a , 短半轴为 b , 在局部坐标系 xy 中, 上面两个条件可以写为:

$$F(a, b, x) = \begin{pmatrix} a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 \\ b^2 x(y_k - y) - a^2 y(x_k - x) \end{pmatrix} = 0 \quad (5)$$

该方程组的解就是正交邻近点的局部坐标, 它是非线性方程组, 可用 Newton 法迭代求解, 具体求解方案见第三章的算法实现。由于整体的计算是在全局坐标中进行的, 所以, 求出的邻近点的局部坐标应该参照式(4)进行变换, 即可得到其全局坐标 X_k' 。

2.2 Jacobi 矩阵的计算

式(2)对应的其实是 m 个方程, 改写为矩阵形式即为:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial X_1'}{\partial a} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_m'}{\partial a} \end{array} \right)_{a_i} \Delta a = \left(\begin{array}{c} X_1 - X_1' \\ \vdots \\ X_m - X_m' \end{array} \right)_{a_i} \quad (6)$$

式(6)中左边第一个矩阵就是 X_k' 关于参数矢量 a 的

Jacobi 矩阵。该矩阵的每一行有 $3n+2$ 个分量。当 X_k' 属于第 i 个椭圆弧(即 $X_k' \in S_i$)时, 由于离散点 X_k 对应的正交邻近点 X_k' 只和该椭圆弧的参数有关, 和其他椭圆弧的参数无关, 因此, 有:

$$\frac{\partial X_k'}{\partial a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_k'}{\partial X_0} & \frac{\partial X_k'}{\partial Y_0} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial X_k'}{\partial a_i} & \frac{\partial X_k'}{\partial b_i} & \frac{\partial X_k'}{\partial \theta_i} & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (7)$$

从式(4)可知, 对于第 i 个椭圆弧, 它的局部坐标和全局坐标之间存在如下关系:

$$x = R_i(X - X_0) \quad (8)$$

其中

$$R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} c_i & s_i \\ -s_i & c_i \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\frac{\partial X_k'}{\partial a} = \frac{\partial X}{\partial a} \Big|_{x=X_k'} = \left(R_i^{-1} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial R_i^{-1}}{\partial a} x + \frac{\partial X_0}{\partial a} \right) \Big|_{x=X_k'} = R_i^{-1} \frac{\partial X}{\partial a} \Big|_{x=X_k'} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-xs_i - yc_i) & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & (xc_i - ys_i) & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (10)$$

式(10)中的关键是求 $\partial x / \partial a$, 具体可以参见周磊[14]的推导。通过一系列的演算, 最后可得:

$$\frac{\partial X_k'}{\partial a} = (R_i^{-1} Q_i^{-1} (B_0^i \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad B_i \quad 0 \quad \dots \quad 0)) \Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} \quad (11)$$

其中:

$$Q_i = \begin{pmatrix} b_i^2 x & a_i^2 y \\ (a_i^2 - b_i^2)y + b_i^2 y_k & (a_i^2 - b_i^2)x - a_i^2 x_k \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$B_0^i = \begin{pmatrix} b_i^2 xc_i - a_i^2 ys_i & b_i^2 xs_i + a_i^2 yc_i \\ b_i^2 (y_k - y)c_i + a_i^2 (x_k - x)s_i & b_i^2 (y_k - y)s_i - a_i^2 (x_k - x)c_i \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$B_i = \begin{pmatrix} a_i (b_i^2 - y^2) & b_i (a_i^2 - x^2) & (a_i^2 - b_i^2)xy \\ 2a_i y(x_k - x) & -2b_i x(y_k - y) & (a_i^2 - b_i^2)(x^2 - y^2 - xx_k + yy_k) \end{pmatrix} \quad (14)$$

注意式(11)中矩阵块 B_i 的位置, 它是第 $i+1$ 个子矩阵, 它和矩阵块 B_0^i 之间有 $i-1$ 个 $0_{2 \times 3}$ 矩阵。矩阵 B_i 的位置是依赖于离散点 X_k 所属的椭圆弧点集编号的。

将式(9)、(12)~(14)代入式(11)即可得到 Jacobi 矩阵中 X_k 对应的元素的值, 对每个离散点 X_k 逐一进行这种计算, 即可得到整个 Jacobi 矩阵。

2.3 同心椭圆弧拟合参数的计算

前面说明了如何确定正交邻近点以及 Jacobi 矩阵的计算, 这样利用式(2)、(3)循环求解, 最终得到一个收敛的参数矢量 a , 就得到了所有同心椭圆弧的拟合参数。注意, 其中的式(2)是一个超定方程, 需要按照最小二乘意义上求解。

另外按照式(2)、(3)来求解时, 涉及到几何参数矢量 a 的初始值设置。初值的选取可分别由单椭圆拟合的方法来获取。最后运用本算法进行同心多椭圆拟合参数的精加工。

3 同心椭圆弧拟合算法的实现

该算法实现的流程图如图2所示。从流程图可以看出主函数比较简单, 其核心在于下面两个函数: GetOrthoPoint 和 GenMatrixJ, 前者是用来计算正交邻近点的, 后者是用来生成 Jaco-

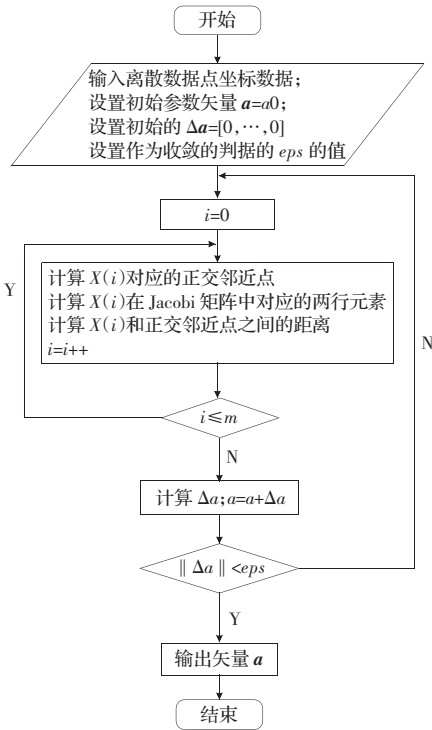


图2 同心椭圆弧拟合算法实现流程图

bi 矩阵的。其伪代码分别如下:

Procedure GetOrthoPoint($X, Y, VecPars, NbX, NbY$)

{ (X, Y) 为数据点的全局坐标, $VecPars$ 是该点所在的椭圆弧上一次计算得到的几何参数, (NbX, NbY) 为对应的正交邻近点全局坐标}

BEGIN

从 $VecPars$ 获取椭圆参数:中心坐标 (X_0, Y_0) 、半长轴 a 、半短轴 b 、倾斜角 θ 。

$(x, y) := G2L(X, Y)$ {全局坐标变换为局部坐标}

{计算初值 (NbX, NbY) 的初值 (xk, yk) }

$x1 = x * a * b / \text{sqrt}(b * b * x * x + a * a * y * y)$

$y1 = x * a * b / \text{sqrt}(b * b * x * x + a * a * y * y)$

IF $|x1| < a$ THEN

$x2 := x$

$y2 := \text{sign}(y) * b / a * \text{sqrt}(a * a - x * x)$

ELSE

$x2 := \text{sign}(x) * a$

$y2 := 0$

ENDIF

$xk := 0.5 * (x1 + x2)$

$yk := 0.5 * (y1 + y2)$

{迭代计算 (NbX, NbY) 的值}

REPEAT

$Q[1][1] := b * b * xk$

$Q[1][2] := a * a * yk$

$Q[2][1] := (a * a - b * b) * yk + b * b * y$

$Q[2][2] := (a * a - b * b) * xk - a * a * x$

$F[1] := 0.5 * (a * a * yk * yk + b * b * xk * xk - a * a * b * b)$

$F[2] := b * b * xk * (y - yk) - a * a * y * (x - xk)$

$\Delta := F / Q$

$xk = xk + \Delta[1]$

$yk = yk + \Delta[2]$

UNTILL ($\Delta[1] < eps \ \&\& \ \Delta[2] < eps$)

$(NbX, NbY) := L2G(xk, yk)$

{局部坐标 (xk, yk) 变为全局坐标 (NbX, NbY) }

END

Procedure GenMatrixJ($X, Y, VecPars, MatrixJ$)

{ (X, Y) 为数据点的全局坐标, $VecPars$ 是该点所在的椭圆弧上一次计算得到的几何参数, $MatrixJ$ 为最后要生成的 Jacobi 矩阵}

BEGIN

确定数据点 (X, Y) 的编号 k 。

确定 (X, Y) 所在的椭圆弧编号 i 。

$VecPar :=$ 椭圆弧 i 的几何参数,

Call GetOrthoPoint($X, Y, VecPars, NbX, NbY$)

计算椭圆弧 i 对应的 R 矩阵

$(x, y) := G2L(X, Y)$ {全局坐标变换为局部坐标}

计算点 (x, y) 对应的 Q 矩阵

计算点 (x, y) 对应的矩阵块 B_0

计算点 (x, y) 对应的矩阵块 B_i

$B[1 \dots 2][1 \dots 3n+2] := 0.0$

$B[1 \dots 2][1 \dots 2] := B_0$

$B[1 \dots 2][3i \dots 3i+2] := B_i$

$MatrixJ[2k-1 \dots 2k][1 \dots 3n+2] := \text{Inverse}(R) * \text{Inverse}(Q) * B$

{对一个点计算了所有 Jacobi 矩阵中的元素, 并放在了相应的位置上}

END

从过程 GenMatrixJ 可以看出, 当所有数据点都只对应一个 i 值 ($i=1$) 时, 该方法处理的就是单个椭圆的拟合, 当参数 $VecPars$ 中的 a 和 b 相等的时候, 拟合的就是圆。可见该算法把单一圆或椭圆的拟合、同心多圆弧或椭圆弧的拟合统一在了一起。

4 同心椭圆弧拟合算例

下面采用人工数据对该算法的有效性和误差情况进行考察。

一个共心的圆弧和椭圆弧, 其几何参数如表 1, 共同的中心坐标为 X_0, Y_0 , 半长轴为 a , 半短轴为 b , 倾斜角为 θ , 采样弧段的起始角度为 α_0 , 终止角度为 α_1 。每个弧段采样 10 个点, 这些数据点均叠加标准差为 $0.05b$ 的高斯噪声(椭圆为半短轴的 5%, 圆弧为半径的 5%)。拟合结果也见表 1。可以看出在叠加 5% 噪声的情况下, 相对误差不超过 3%, 拟合效果较好。C1 的倾角误差较大, 这是因为 C1 是圆, 并不存在倾斜角, 其误差无需考虑。

考虑三个同心椭圆弧, 共同中心为 $(100, 100)$, 椭圆 C1: 长

表 1 圆弧和椭圆弧的真实几何参数及其拟合值

(注: 中心坐标 C1 和 C2 是共同的, 空格表示不计算)

参数类别	C1			C2		
	真实值	拟合值	相对误差	真实值	拟合值	相对误差
X_0	56	56.240 9	0.43%	-	-	-
Y_0	45	44.369 2	1.40%	-	-	-
a	26	26.136 3	0.52%	20	20.673 6	3.37%
b	26	25.264 9	2.83%	8	8.189 8	2.37%
θ	0	0.589 4	-	2.181 7	2.169 4	0.56%
α_0	190°	-	-	30°	-	-
α_1	330°	-	-	170°	-	-

半轴 60,短半轴 35,倾斜角 114.6° ;椭圆 C2:长半轴 80,短半轴 55,倾斜角 171.9° ;椭圆 C3:长半轴 100,短半轴 55,倾斜角 57.3° 。或者说,它们的几何参数矢量为: $a^T=[100, 100, 60, 35, 114.6^\circ, 80, 50, 171.9^\circ, 100, 50, 57.3^\circ]$ 。模拟数据从这三个椭圆上随机采样而得。对于每个椭圆随机选取一个弧长 160° 的椭圆弧段,从中分别采样 40 个、60 个、80 个数据点(弧段越大采样点越多),然后对这些数据叠加标准差为 σ 的零均值随机高斯噪声,从而得到一组拟合计算所用的含有高斯噪声的离散数据点集。为了在统计意义上比较不同噪声程度下拟合计算的误差程度,对于一个给定 σ ,将进行 100 次前述的随机数据取样过程,这样一个 σ 值将对应有 100 组拟合数据,然后对每组数据进行三个同心椭圆弧段的参数拟合,得到 100 组拟合参数值,最后计算这 100 组拟合参数值的相对误差,该值即反映了噪声在 σ 的程度下,多弧段拟合计算的误差情况。需要注意的是,这里 100 组拟合参数的相对误差按式(15)计算:

$$e(a') = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i' - a)^2 / (m-1)}}{a} \quad (15)$$

其中 a 为参数的真实值, a' 是一组参数拟合值。

利用同样的数据、同样的方式,作者进行了单弧拟合,计算了椭圆弧 C3 的几何参数(从几何直观上看,对 C3 进行单弧拟合计算会更准确、稳定一些,比另外两个更好),并将其结果和多弧计算的 C3 的参数进行了比较。比较结果见图 3,其中横坐标表示高斯噪声的标准差 σ 的变化情况,它最小为 0,最大为短半轴的 30%(即 $0.3b$)。纵坐标表示 C3 弧段的几何参数拟合计算的相对误差,其单位是 1%。

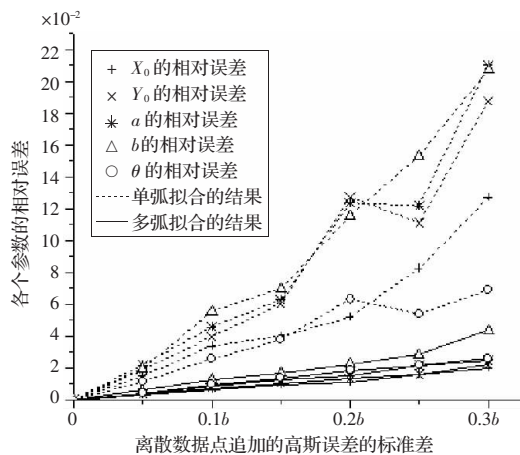


图3 不同高斯噪声干扰下 C3 几何参数单弧拟合和多弧拟合的比较图

从图 3 可以看出,随着叠加噪声的增大,拟合的参数值误差增大(实际上在干扰超过 30%以后,尤其是单弧计算就存在了不稳定的情况),多弧拟合的结果显然比单弧拟合更准确。这个结论应该具有一定代表性的。这和问题本身的物理特性是一致的。

需要说明的是,这些实验表现出来的算法特点,并不都具有普遍性,这里的实验主要是表明该算法是有效的,可以用于

多弧拟合。

5 结论

推广了文献[10]提出的椭圆拟合算法,并给出了该算法实现的流程和伪代码。该推广算法不仅可以进行同心多椭圆弧的拟合,也可以进行同心多圆弧、单一圆和椭圆的拟合,而且所有这些情况只需要使用同一个程序即可处理。实验算例表明同心多弧的计算效果要比多个单弧的计算更准确、稳定,这和物理直观是一致的。该算法的实现对实践应用有一定指导的意义。

参考文献:

- [1] O'Leary P, Harker M, Zsombor-Murray P. Direct and least square fitting of coupled geometric objects for metric vision[J]. IEE Proceedings on Vision, Image and Signal Processing, 2005, 152(6): 687-694.
- [2] 邹益民,汪渤.一种基于最小二乘的不完整椭圆拟合算法[J].仪器仪表学报,2006,27(7):808-812.
- [3] Schleicher D C H, Zagar B G. Image processing to estimate the ellipticity of steel coils using a concentric ellipse fitting algorithm[C]// International Conference on Signal Processing Proceedings, ICSP, 2008: 884-890.
- [4] 张庆丰,彭青玉.双同心椭圆弧的几何拟合方法[J].计算机工程与应用,2009,45(14):22-24.
- [5] Ballard D H. Generalizing the hough transform to detect arbitrary shapes[J]. Pattern Recognition, 1981, 13(2): 111-122.
- [6] Zhang Z, Faugeras O. 3D dynamic scene analysis: A stereo based approach[M]. Berlin: Springer, 1992.
- [7] Gander W, Golub G H, Strebel R. Least-squares fitting of circles and ellipses[J]. BIT, 1994(34): 558-578.
- [8] Zhang Zheng-you. Parameter estimation techniques: A tutorial with application to conic fitting[J]. Image and Vision Computing, 1997, 15(1): 59-76.
- [9] Fitzgibbon A, Pilu M, Fisher R B. Direct least square fitting of ellipses[J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(5): 476-480.
- [10] Ahn S J, Rau H W, Warnecke H J. Least-squares orthogonal distances fitting of circle, sphere, ellipse, hyperbola, and parabola[J]. Pattern Recognition, 2001, 34(12): 2283-2303.
- [11] 彭青玉.木星土星边缘的椭圆拟合[J].云南天文台台刊,2003(4): 43-48.
- [12] Sturm P, Gargallo P. Conic fitting using the geometric distance[C]// 8th Asian Conference on Computer Vision (ACCV 2007), Tokyo, Japan, 2007, 2: 784-795.
- [13] Kanatani K. Compact algorithm for strictly ML ellipse fitting[C]// 19th International Conference on Pattern Recognition (ICPR 2008), 2008: 1-4.
- [14] 周磊.椭圆拟合方法及其应用于土星光环边缘[D].广州:暨南大学,2006.