

王光辉,沈学顺,胡江林等. GRAPES 全球非静力大气模式的正规模分析. 地球物理学报, 2009, 52(12): 2964~2972, DOI: 10.3969/j. issn. 0001-5733. 2009. 12. 005

Wang G H, Shen X S, Hu J L, et al. Normal mode analysis of the GRAPES global non-hydrostatic atmospheric model. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2009, 52(12): 2964~2972, DOI: 10.3969/j. issn. 0001-5733. 2009. 12. 005

# GRAPES 全球非静力大气模式的正规模分析

王光辉, 沈学顺, 胡江林, 陈峰峰

中国气象科学研究院数值预报研究中心, 北京 100081

**摘 要** 为分析数值模式动力学框架中不同波动的特性及对数值天气预报模式计算稳定性的影响, 文章对 GRAPES(Global/Regional Assimilation and PrEdiction System)全球非静力大气模式进行了正规模分析. 首先, 建立了静止大气状态下模式的线性化系统, 并在适当的边界条件下将线性化系统分解成具有垂直与水平结构方程的本征值、本征函数耦合问题. 然后在等温大气条件下, 利用耦合问题的数值结果分析得出: GRAPES 非静力模式除了有几乎和对应的静力模式一致的向东、向西传播的重力惯性波及向西传播的 Rossby 波外, 还有一个向东、向西传播的声惯性波; 特别是, 只有当纵横比较大时, 非静力模式对重力惯性波才会有显著影响.

**关键词** 正规模, GRAPES 非静力大气模式, 重力惯性波, 声惯性波, Rossby 波

DOI: 10.3969/j. issn. 0001-5733. 2009. 12. 005

中图分类号 P435

收稿日期 2008-09-22, 2009-11-02 收修定稿

## Normal mode analysis of the GRAPES global non-hydrostatic atmospheric model

WANG Guang-Hui, SHEN Xue-Shun, HU Jiang-Lin, CHEN Feng-Feng

Center for Numerical Weather Prediction, Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081, China

**Abstract** In order to analyze the effects of different atmospheric modes on dynamic procedures and the computational stability in numerical weather prediction, this paper gave a normal mode analysis of the GRAPES (Global/Regional Assimilation and PrEdiction System) global non-hydrostatic atmospheric model. First of all, a system of linearized equations was set up with respect to an atmosphere at rest, and a couple eigenvalue-eigenfunction problem was formulated, which consists of horizontal and vertical structure equations with suitable boundary conditions. By means of numerical analysis for the couple problem under isothermal atmosphere, we arrived at the following conclusion: for the non-hydrostatic model, there is an additional kind of eastward and westward propagating acoustic-inertial oscillation besides eastward and westward propagating gravity-inertial oscillation and westward propagating Rossby oscillation are identical to those in the hydrostatic version of the model. Especially, the non-hydrostatic effect on the gravity-inertial oscillation becomes significant only when the aspect ratio is large.

**Keywords** Normal mode, GRAPES non-hydrostatic atmospheric model, Gravity-inertial wave, Acoustic-inertial wave, Rossby wave

**基金项目** 国家自然科学基金(40675063, 40745033, 40675062)和“十一五”国家科技支撑项目“灾害天气精细数值预报系统及短期气候集合预测研究”第二课题(2006BAC02B02)共同资助.

**作者简介** 王光辉, 男, 研究员, 主要从事数值天气预报研究. E-mail: wanggh@cma. gov. cn

## 1 引言

随着全球大气模式分辨率的不断提高,其动力框架的技术也不断发展.非静力、高分辨率的、物理过程完善的多尺度通用动力框架不仅是业务技术发展的需要,同时也是降低业务运行成本、密切科研与业务之间的合作、加速研究成果业务化的现实需要.在国家科技部和中国气象局的支持下,中国气象科学研究院数值研究中心研究发展了新一代多尺度通用大气数值模式和资料同化系统<sup>[1]</sup>,简称 GRAPES. GRAPES 模式是一个格点模式,它的动力框架使用一套含完全动力学过程的非静力、全可压的方程组;是中国科学家在充分吸收国内外数值预报与相关学科的最新科技成果的基础上,自主设计、研究、开发的新一代多尺度通用大气数值模式.考虑到计算复杂度,与其他模式不同,该模式采用了以水平、垂直三个速度分量( $u, v, w$ ),位温( $\theta$ )及与压力有关的中间变量( $\pi$ )作为基本的预报变量.为深入了解大气中各种波动在 GRAPES 模式中的特征及对计算稳定性的影响,对 GRAPES 全球非静力模式进行正规模分析是十分重要的.

实际大气中,不同类型的波不仅传播的物理机制不同,而且其性质及对天气的影响也有很大的差异.通常快波对天气的影响较小,慢波对天气的影响较大.而且,不同尺度的运动,起主要作用的波也不一样.实际计算表明:快波的存在会增加计算次数和容易造成计算不稳定<sup>[2]</sup>.研究大气波动,需利用描述大气运动的基本方程组,但方程组是非线性的,不加简化求解有着几乎不可克服的困难,用扰动分析法可以将非线性方程组线性化.利用波动方程的标准形式求解线性波动的方法称为正规模方法,即:正规模是线性化原始方程组的正规波解,是原始方程组的特征函数.根据它,可以确定模式大气中各种不同类型的快波、慢波和研究大气运动的动力学过程,也可以用作初值处理和客观分析中某些气象要素场的展开函数.特别是,能对控制方程的不同逼近效果进行量化;为数值模式提供有价值的实验例子,是分析数值格式稳定性的有用工具<sup>[3]</sup>.

有关可压缩、非静力和斜压大气正规模的研究有比较丰富的成果.早期的文献<sup>[2]</sup>提出了非静力大气模式的正规模在切平面上的分类. Eckart(1960)讨论了可压、非静力、斜压各种逼近球坐标系下大气的正规模.特别是等温基本状态下,切线逼近的正规

模分析.文献<sup>[6]</sup>提出了用正规模从模式中过滤声波的方法.基于文献<sup>[6]</sup>的某些结果,文献<sup>[7]</sup>提出了获得非静力、可压缩斜压全球大气模式正规模的统一方法.为了利用模式的正规模设计有效的时间积分格式,文献<sup>[8]</sup>基于非线性正规模初始化理论发展了一个能使模式积分取较大时间步长的技巧,这个技巧几乎能回避半隐式方法的所有缺点.文献<sup>[9]</sup>提出了用三维正规模函数同时表示风场和质量场.正规模函数由全球原始方程模式的本征解构造,实现了用正规模函数的展开式对三维全球数据的谱表示.文献<sup>[10]</sup>将垂直正规模的展开式应用到斜压不稳定问题.为了得到大气方程组的数值解,该文探索了用正规模作为离散变量的基函数谱方法的应用.类似的工作有<sup>[11~16]</sup>等.对于带地形参数的旋转球状大气,浅薄大气逼近对线性、非受迫正规模的频率影响非常小;在几乎所有情况下,对正规模的结构仅有较小的影响,但对经向内声波是个例外.因为在深厚球面大气里,使正规模的频率在数量上系统减少的是几何影响,而不是科氏力项<sup>[17~19]</sup>.

本文采用文献<sup>[7]</sup>的方法对 GRAPES 全球非静力模式进行正规模分析.首先,用小扰动方法对原始方程进行线性化处理,获得比较简洁的线性系统.然后,用分离变量法将线性系统分解为具有水平和垂直结构的耦合方程组.在等温状态下,结合一定的边界条件分析各种波的垂直结构和运动趋势.最后,给出各种波随经向波数变化的频率图.

## 2 GRAPES 模式的基本方程组

GRAPES 模式采用完全非静力可压的大气动力学方程组,不考虑湿度、摩擦和其他非绝热过程;并假设大气的厚度和地球的半径比非常小(即浅薄大气), $g$ 是常数.旋转球坐标系下,大气运动基本方程组为<sup>[1,7,20]</sup>

$$\frac{du}{dt} = -\frac{C_p \theta}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + f_v + \frac{uv \tan \varphi}{a}, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{C_p \theta}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} - f_u - \frac{u^2 \tan \varphi}{a}, \quad (2)$$

$$\delta \frac{dw}{dt} = -C_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial z} - g, \quad (3)$$

$$(\gamma - 1) \frac{d\pi}{dt} = -\pi \left[ \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial (v \cos \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right], \quad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (5)$$

这里  $\theta = T(P_0/P)^{R/C_p}$ ,  $\pi = (P/P_0)^{R/C_p}$ ,  $\gamma = C_p/R$ .  $P_0 = 1000$  hPa 是参考气压,  $a$  为地球半径,  $z$  是海拔高度,  $R$  是气体常数.  $\delta$  是非静力 ( $\delta = 1$ ) / 静力 ( $\delta = 0$ ) 选项开关, 其他为气象上的常用符号.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial z},$$

$$f = 2\Omega \sin \varphi.$$

方程(1)~(5)包含 5 个预报变量:  $u, v, w, \pi, \theta$ .

### 3 控制方程组的线性化

按照文献[5]的方法, 我们对方程组(1)~(5)做线性化分析. 定义静止状态为基本状态, 则基本状态下的变量满足静力方程. 为此, 我们定义基本状态为

$$u_s = v_s = w_s = 0, \quad \pi_s = \pi_s(z), \quad (6)$$

$$\theta_s = \theta_s(z), \quad T_s = T_s(z).$$

满足:

$$\frac{\partial \pi_s}{\partial z} = -\frac{g}{C_p \theta_s}$$

引入扰动量  $u', v', w', \pi', \theta'$ , 并设它们与原始变量有如下关系:

$$u = C_p \theta_s u', \quad v = C_p \theta_s v', \quad w = C_p \theta_s w',$$

$$\pi = \pi_s + \pi', \quad \theta = \theta_s + \frac{C_p \theta_s^2}{g} \theta'. \quad (7)$$

将方程(7)代入方程组(1)~(5), 并且略去二阶和高阶量, 获得下面的线性系统:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi'}{\partial \lambda} - f v' = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial \pi'}{\partial \varphi} + f u' = 0, \quad (9)$$

$$\delta \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial \pi'}{\partial z} - \theta' = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \pi'}{\partial t} + \frac{T_s C_p}{\gamma - 1} \left[ \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u'}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial (v' \cos \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right] + \left[ \frac{T_s C_p N_s^2}{g(\gamma - 1)} - g \right] w' = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + N_s^2 w' = 0, \quad (12)$$

这里

$$N_s^2 = \frac{g}{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \quad (13)$$

是 Brunt-Väisälä 频率的平方.

### 4 变量分离过程

由于线性方程组的系数不依赖于时间  $t$  和经度  $\lambda$ , 根据 Eckart<sup>[5]</sup> 的方法及方程组的特点, 可假设

$$\begin{cases} u' \\ v' \\ \pi' \\ w' \\ \theta' \end{cases} = \begin{cases} U(\varphi)A(z) \\ iV(\varphi)A(z) \\ B(\varphi)A(z) \\ iB(\varphi)W(z) \\ B(\varphi)\Theta(z) \end{cases} \exp(im\lambda - i\sigma t), \quad (14)$$

这里  $m$  和  $\sigma$  分别表示波数和频率, 将方程(14)代入方程组(8)~(12), 获得:

$$U\sigma + fV - \frac{Bm}{a \cos \varphi} = 0, \quad (15)$$

$$\sigma V + fU + \frac{1}{a} \frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0, \quad (16)$$

$$\delta W\sigma + \frac{\partial A}{\partial z} - \Theta = 0, \quad (17)$$

$$-A\sigma + \frac{T_s C_p}{\gamma - 1} \left\{ \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ Um + \frac{d}{d\varphi} (V \cos \varphi) \right] AB^{-1} + \frac{\partial W}{\partial z} \right\} + \left[ \frac{T_s C_p N_s^2}{g(\gamma - 1)} - g \right] W = 0, \quad (18)$$

$$-\Theta\sigma + N_s^2 W = 0. \quad (19)$$

方程(15)和(16)仅包含  $\varphi$  的函数, 没有垂直函数. 而方程组(17)~(19)除了方程(18)中包含有水平散度项外, 只含有垂直函数.

由方程(15)和(16), 可求得:

$$U = \frac{1}{\sigma^2 - f^2} \frac{1}{a} \left( \frac{Bm\sigma}{\cos \varphi} + f \frac{\partial B}{\partial \varphi} \right), \quad (20)$$

$$V = \frac{-1}{\sigma^2 - f^2} \frac{1}{a} \left( \frac{Bmf}{\cos \varphi} + \sigma \frac{\partial B}{\partial \varphi} \right). \quad (21)$$

应用方程(20), (21)及  $f = 2\Omega \sin \varphi$ , 计算方程(18)中的水平散度项

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \left[ Um + \frac{d}{d\varphi} (V \cos \varphi) \right] = \sigma H_L(B), \quad (22)$$

这里

$$H_L \equiv \frac{-1}{\sigma a \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\sigma^2 - f^2} \left( \frac{2\Omega \sin \varphi m}{a} + \sigma \cos \varphi \frac{d}{ad\varphi} \right) \right] + \frac{m}{\sigma a \cos(\sigma^2 - f^2)} \left( \frac{m\sigma}{a \cos \varphi} + 2\Omega \sin \varphi \frac{d}{ad\varphi} \right), \quad (23)$$

这里  $H_L(\cdot)$  被称为 Laplace 潮汐算子<sup>[12,21]</sup>, 则方程(18)中的水平散度算子就可以表示为  $B$  的函数. 我们可以通过引入一个分离参数  $h$ , 定义如下:

$$H_L(B) = \frac{1}{gh}B, \quad (24)$$

消去方程(18)对水平函数  $B$  的依赖. 由方程组(22)~(24), 我们将方程(18)写成如下简洁形式:

$$\left(\frac{T_s}{\gamma-1} \frac{C_p}{gh} - 1\right)\sigma A = L_1(W), \quad (25)$$

这里

$$L_1(W) = -\frac{T_s C_p}{\gamma-1} \frac{dW}{dz} - \left[\frac{T_s C_p N_s^2}{g(\gamma-1)} - g\right]W. \quad (26)$$

根据方程(13),  $L_1(W)$  中的第二项在大气的振荡理论中起着十分重要的作用. 通过方程(17)和(19)消去  $\Theta$ , 得

$$(N_s^2 - \delta\sigma^2)W = \sigma L_2(A), \quad (27)$$

这里

$$L_2(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dz}. \quad (28)$$

由方程(25)和(27)消去  $A$ , 获得

$$L_2\left[\left(\frac{T_s}{\gamma-1} \frac{C_p}{gh} - 1\right)^{-1} L_1(W)\right] = (N_s^2 - \delta\sigma^2)W. \quad (29)$$

这是一个描述依赖于垂直坐标  $z$  的垂直速度方程.

## 5 本征值与本征函数问题

线性系统(15)~(19)在适当的边界条件下, 构成一个耦合本征值与本征函数问题, 在这个耦合问题里, 系统分别由具有水平结构的方程和垂直结构的方程组成.

首先考虑带有垂直结构的方程(24)的本征值与本征函数问题. 这里本征函数为  $B(\varphi)$ , 本征值为  $\sigma$  出现在方程(23)所定义的  $H_L(\cdot)$  中. 如果指定参数  $h$ , 则通过下列侧边界条件

$$B(\varphi) = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ 和 } -\frac{\pi}{2} \quad (30)$$

可求出本征函数  $B(\varphi)$  和本征值  $\sigma$ . 在全球浅水理论背景里, 方程(24)定义的  $h$  表示基本状态下水的深度. 事实上, 线性化非静力系统(24)与(30)的本征值、本征函数问题和线性化浅水方程系统是相同的. 在线性化浅水方程系统里, 对于一个给定的  $h$ , 频率  $\sigma$  被唯一确定. 由文献[7]的分析, 存在两种类型的本征解: 第一类是向东西方向传播的惯性重力波; 第二类是向西传播的 Rossby-Haurwitz 波.

其次, 我们考虑正规波问题的垂直部分. 方程(14)中定义的垂直结构函数  $W(z)$  可以在合适的垂

直方向边界条件下从垂直结构方程(29)获得. 由于预报模式要求系统中整体质量是守恒的, 所以假定上边界是刚性的, 即: 在模式的顶部垂直速度为零, 也就是当  $z = z_T$  时,  $w' = 0$ . 关于下边界条件, 人们习惯于假设当  $z = 0$  时,  $w' = 0$ . 于是, 垂直结构方程(29)的边界条件定义为

$$W(z) = 0, \quad z = 0 \text{ 和 } z_T \quad (31)$$

虽然刚性边界条件(31)会产生振荡内波, 根据文献[7]的分析, 这里不必反映大气的实际情况. 然而, 它已显示根据内波垂直结构函数所表示的模式变量对大气数据分析非常有用, 特别是对于非线性正规波的初始化应用[8].

对于一个给定的波数值  $m$ , 一旦  $\sigma, h, B(\varphi)$  和  $W(z)$  被确定, 我们可由方程(20)和(21)求出速度分量函数  $U(\varphi)$  和  $V(\varphi)$ . 方程(14)中所定义的垂直结构函数  $A(z)$  和  $\Theta(z)$  则由方程(25)和(27)求出.

## 6 等温大气状态

在等温情况下, 基本状态  $T_s = \text{const.}$ , 则

$$N^2 = \frac{g^2}{T_s C_p}, \quad C_s^2 = \frac{RT_s \gamma}{\gamma-1}, \quad (32)$$

$C_s$  被称为基本状态下的声速. 于是, 垂直结构方程(29)被简化为

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + 2\Gamma \frac{dW}{dz} + \lambda W = 0, \quad (33)$$

这里

$$\lambda = \left(\frac{1}{gh} - \frac{1}{C_s^2}\right)(N^2 - \delta\sigma^2), \quad (34a)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{C_s^2} - \frac{N^2}{g}\right). \quad (34b)$$

常微分方程(33)的特征根为

$$x_{1,2} = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \lambda}.$$

于是, 微分边值问题(33)与(31)的特征函数可设为

$$W(z) = c_k e^{-\Gamma z} \sin \hat{k} z, \quad (35)$$

这里

$$\hat{k} = \frac{k\pi}{z_T}, \quad (36)$$

$k$  是整数, 垂直方向波的下指标. 将方程(35)代入方程(33)得

$$\lambda_k = \hat{k}^2 + \Gamma^2, \quad (37)$$

将方程(35)代入方程(25)得

$$A(z) = \left(1 - \frac{C_s^2}{gh}\right)^{-1} \left\{ C_s^2 [-\Gamma \sin(\hat{k}z) + \hat{k} \cos(\hat{k}z)] + \right.$$

$$\left(\frac{C_s^2 N_s^2}{g} - g\right) \sin(\hat{k}z) \Bigg| \frac{c_k}{\sigma} e^{-\Gamma z}. \quad (38)$$

因此, 根据表面值  $A(0)$ , 从方程(38)我们能求出  $c_k$ ,

$$c_k = A(0) \left(\frac{1}{C_s^2} - \frac{1}{gh}\right) \frac{\sigma}{\hat{k}}, \quad (39)$$

表面值  $A(0)$  由  $\pi'$  的已知表面值分布所决定. 于是

$$W(z) = A(0) \left(\frac{1}{C_s^2} - \frac{1}{gh}\right) \frac{\sigma}{\hat{k}} e^{-\Gamma z} \sin(\hat{k}z), \quad (40)$$

与位温有关的垂直结构函数  $\Theta(z)$  则由方程(19)求得

$$\Theta(z) = \frac{1}{\sigma} N_s^2 W(z). \quad (41)$$

从微分方程边值问题(33)可看出, 它除了通解(35)外, 还有一个特解  $W(z)=0$ , 则方程(25)中的等价高度必须为下面的常数

$$h_0 = \frac{C_s^2}{g}. \quad (42)$$

当然  $W(z)=0$  也是方程(27)的解, 因此, 从(27)式获得

$$A(z) = A(0) e^{-\Gamma z}. \quad (43)$$

由于在  $W(z)=0$  情况下, 垂直运动分量等于零, 这个特殊的振荡波也出现在静力模式中( $\delta=0$ ), 这个振荡由第5节所讨论的第一类和第二类振荡组成, 沿水平方向传播.

### 6.1 静力情况下确定等价高度与频率

在静力模式中,  $\delta=0$ , 于是, 方程(34a)简化为

$$\lambda = \left(\frac{1}{gh_{\text{ed}}} - \frac{1}{C_s^2}\right) N_s^2, \quad (44)$$

这里  $h_{\text{ed}}$  表示静力模式中的等价高度. 由于  $\lambda$  的值由方程(37)给出, 对于每一个垂直指标  $k=1, 2, \dots$ , 静力模式中的等价高度可由方程(44)确定为

$$h_{\text{ed}} = \frac{C_s^2}{g} \left(1 + \frac{C_s^2 \lambda_k}{N_s^2}\right)^{-1}. \quad (45)$$

由于内波的  $h_{\text{ed}}$  取决于假定的模式顶端的高度, 故在无界大气里,  $h_{\text{ed}}$  形成一个连续谱. 然而, 一旦选择一个模式顶端的高度,  $h_{\text{ed}}$  形成的是离散谱.

离散谱的内波由垂直指标  $k$  来表示. 然而对应于  $\hat{k}=0$ , 有一个特殊解, 从方程(40), 通过取极限  $\hat{k} \rightarrow 0$ , 可求得这个特殊解为

$$W(z) = A(0) \left(1 - \frac{C_s^2}{gh}\right) e^{-\Gamma z} \sigma z, \quad (46)$$

即, 扰动变量  $w'$  随高度  $z$  并非线性变化.

对于每一个非零的垂直波指标  $k$ , 当模式顶端高度  $z_T$  趋于无穷大时, 垂直波数  $\hat{k}$  趋于零. 因此,  $\hat{k}=0$  对应于无限大气里内波的极限情况. 从方程(40), 在  $\hat{k}=0$  的情况下, 可以定义

$$\lambda_0 = \Gamma^2, \quad \kappa = R/C_p, \quad H = RT_s/g. \quad (47)$$

从方程(45), 可获得<sup>[7]</sup>

$$h_{\text{ed}}(\hat{k}=0) = 4\kappa H = 4\kappa(1-\kappa) \frac{C_p^2}{g}, \quad (48)$$

它是等温静力大气模式内波中  $h_{\text{ed}}$  的最大值.

在静力情况下, 我们能够用  $h_{\text{ed}}$  来识别不同的垂直波; 无论是内波还是外波, 频率  $\sigma$  能够从(24)与(30)组成的微分边值问题求出. 然而, 在非静力情况下, 并非如此. 因为方程(34)中的本征值  $\lambda$  含有  $\sigma$  和  $h$  两个量.

### 6.2 非静力情况下确定等价高度与频率

重写方程(34a), 得到

$$\delta\sigma^2 = N_s^2 - \frac{C_s^2 gh \lambda_k}{C_s^2 - gh}, \quad (49)$$

这里  $\lambda_k$  由方程(37)确定. 对于给定的  $h$  和波数  $m$ , 由边界条件(30)和方程(24), 我们可求出作为特征值的频率  $\sigma$ ,

$$\sigma = F(h, m), \quad (50)$$

这个方程称为 Hough 频率方程<sup>[14, 21]</sup>.

现在的任务是由方程(49)和(50)联立求解  $\sigma$  和  $h$ . 虽然  $h$  不再是一个刻画非静力正规波的常数参数, 但它对识别正规波的模式仍是很有用的. 在  $h$  满足

$$C_s^2 > gh, \quad (51)$$

从方程(49)发现

$$\delta\sigma^2 < N_s^2, \quad (52)$$

这意味着在  $h$  的这个范围内, 非静力频率  $\sigma$  比 B-V 振荡频率小. 另一方面, 在  $h$  满足

$$C_s^2 < gh, \quad (53)$$

发现

$$\delta\sigma^2 > N_s^2, \quad (54)$$

与方程(52)相反. 从方程(42)我们看到, 外波的等价高度由  $C_s^2/g$  给定. 从下面的讨论中, 我们将发现在这两种频率模式下的意义将变得很清楚. 下面我们将讨论频率和等价高度的逼近值.

从方程(49)和(50)求解  $\sigma$  和  $h$ , 需用迭代法, 而且需要一个好的迭代初始值. 虽然还没有好的方法获得方程(50)的解析表达式, 但对于一个大的  $h$  值, 文献[7]给出了方程(50)一个逼近形式

$$\sigma^2 + \frac{2\Omega m}{n(n+1)} \sigma - \frac{n(n+1)}{a^2} gh = 0, \quad (55)$$

这里  $m$  是纬向波数,  $n$  是相关 Legendre 函数  $P_n^m(\cos\varphi)$  的阶数, 而且有  $n \geq m$ .  $n$  在经线方向波的表示中起着很重要的作用. 第一个波从  $n=m$  开始, 然后, 第二个波相应于  $n=m+1$ , 如此等等.

二次方程(55)能给出第一类振荡重力惯性波的逼近频率

$$\sigma = -\frac{2\Omega m}{n(n+1)}. \quad (56)$$

但对于第二类振荡, 方程(56)并不能作为迭代求解的初始值, 由文献[5]的研究结果, 相应于静力模式的频率能提供非常好的迭代初始值, 重写方程(49), 获得

$$h = \frac{C_s^2}{g} \left( 1 + \frac{C_s^2 \lambda_k}{N_s^2 - \delta\sigma^2} \right)^{-1}. \quad (57)$$

由于第二类振荡的频率比  $N_s$  要小得多, 所以由方程(57)确定的等价高度近似表示为

$$h = \frac{C_s^2}{g} \left( 1 + \frac{C_s^2 \lambda_k}{N_s^2} \right)^{-1}. \quad (58)$$

由方程(55)和(56)消去  $h$ , 获得四次代数方程

$$\delta\sigma^4 + \delta A\sigma^3 + B\sigma^2 + C\sigma + D = 0, \quad (59)$$

其中

$$A = \frac{2\Omega m}{n(n+1)}, B = -(\lambda_k C_s^2 + N^2 + \delta Q),$$

$$C = -A(\lambda_k C_s^2 + N^2), D = QN^2, Q = \frac{n(n+1)}{a^2} C_s^2.$$

方程(59)有两对复数根, 一旦得到了频率, 其相应的等价高度就能通过方程(57)求出. 一对相应于向东西方向传播的高频振荡, 其频率和等价高度满足方程(53)和(54), 它们代表声惯性波, 仅出现在非静力模式中. 其等价高度值也非常大. 另一对复数根对应于向东西方向传播的高频振荡, 其频率和等价高度满足方程(51)和(52), 它们代表的是类似于静力模式中的重力惯性波.

下面我们将用等价高度  $h$  作为参数来迭代求解方程(49)和(50). 具体做法是: 首先从  $h$  一个初始假设值出发, 然后改变  $h$  的值, 直到由方程(49)和(50)所得的  $\sigma$  值的差在一个指定的范围内为止.

在频率方程(50)中, 对于一个给定的波数  $m$ ,  $\sigma$  的振幅随  $h$  的增加而增加. 这个结论可以通过数值求解 Laplace 潮汐方程而获得验证<sup>[14]</sup>. 为了找出  $\sigma$  作为  $h$  的函数的有关性质, 我们在方程(49)两边对  $h$  进行求导得

$$\frac{d(\delta\sigma^2)}{dh} = -\frac{C_s^4 g \lambda_k}{(C_s^2 - gh)^2}, \quad (60)$$

由于  $\lambda_k$  是正的, 所以方程(60)表明方程(49)中  $\sigma$  的振幅随  $h$  的增加而增加. 画出方程(49)和(50)随  $h$  变化的曲线, 其相交点就是满足两个方程的  $\sigma$  与  $h$  (图 1). 图 1 表示从 Hough 频率方程及非静力频率方程得到的随等价高度  $h$  变化的频率幅度示意图.

图中的纵坐标是频率的绝对值, 不是频率本身的值. 两条直线的交点就是耦合本征值问题的解.

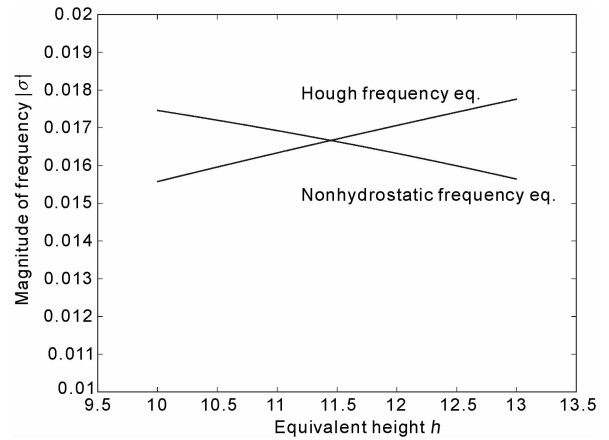


图 1 从 Hough 频率方程及非静力频率方程得到的随等价高度  $h$  变化的频率幅度示意图

Fig.1 Schematic diagram showing how the magnitude of frequencies from Hough frequency equation and non-hydrostatic frequency equation vary as functions of equivalent height  $h$

## 7 非静力全球模式中各种波的频率曲线图

由方程(49)和(50)组成耦合本征值问题.  $F$  是 Hough 函数, 方程(50)是 Laplace 潮汐方程的形式表达. 从上述耦合问题, 我们可求解出频率及等价高度与纬向波数之间的关系. 求解这个耦合本征值问题有两个困难: 一是 Hough 函数  $F$  的选取; 二是该方程组是非线性的, 需选用一个合适的迭代方法求解. 我们用下面的迭代法求解该耦合本征值问题.

设:

$$f(\sigma) = \delta\sigma^4 + \delta A\sigma^3 + B\sigma^2 + C\sigma + D$$

用牛顿迭代法求解四次方程(59)

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k - \frac{f(\sigma_k)}{f'(\sigma_k)}$$

方程(59)有 4 个根, 其中 2 个对应于向东和向西传播的高频振荡, 它们代表仅在非静力模式中的声惯性波, 并且对应的等价高度也非常大. 另 2 个根对应于频率幅度小于 Brunt-Väisäiä 频率的向东与向西传播的高频振荡, 它们类似于静力模式中的重力惯性波. 见图 2~图 5.

图 2 表示无限顶端时向东传播的非静力波的频率图. 图中直线 B 为 Brunt-Väisäiä 频率. A, G 两组曲线分别表示声波与重力波, 每组中的 3 条曲线分别对应经向指数为 0, 9, 19. 曲线组 E 表示当等价高

度为 10 km 时对应经向指数 0, 9, 19 的 3 条外重力波动曲线.

图 3 表示无限顶端时向东传播的静力重力波(H)与外重力波(E)的频率图, 这里的外重力波 E 与图 2 中的 E 是一致的. 比较图 2 与图 3, 我们发

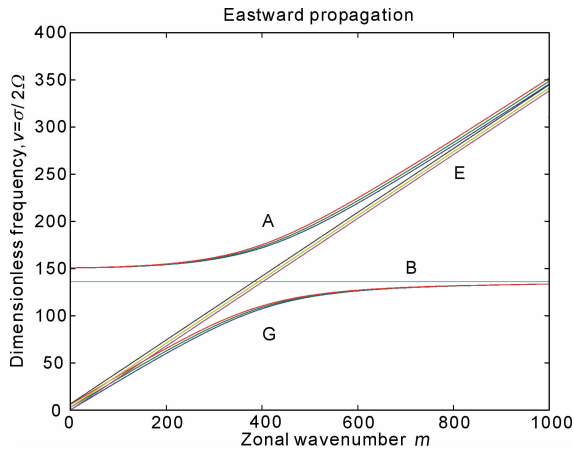


图 2  $Z_T = \infty$  (顶端为无穷) 的非静力模式向东传播波的频率图

A 和 G 分别表示经向指数为  $L=0, 9, 19$  时的声波和重力波; B 是区分声波和重力波的 Brunt-Väisälä 频率; E 表示等价高度为 10 km 时的外重力波.

Fig. 2 Frequency diagram for eastward propagating wave of non-hydrostatic model with infinite top,  $Z_T = \infty$ . Groups of three curves, denoted by A and G, are for acoustic and gravity modes, respectively, for meridional index  $L=0, 9, 19$ . B represents the Brunt-Väisälä frequency that divides acoustic and gravity mode regimes. E represents external gravity modes for equivalent height of 10 km.

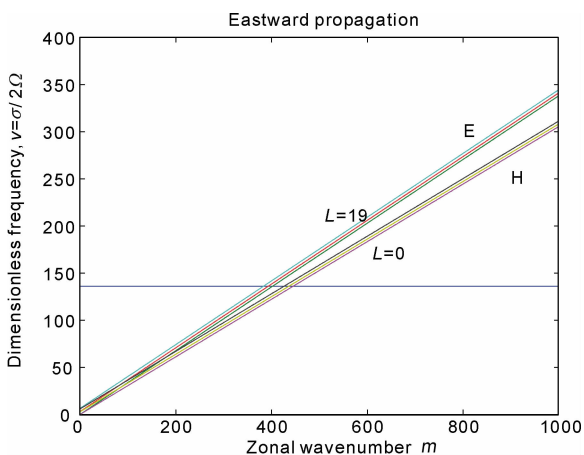


图 3 静力模式中的重力波(H)与外重力波(E)频率, 三直线分别对应  $L=0, 9, 19$

Fig. 3 Groups of three lines, denoted by H and E, represent, respectively, the hydrostatic gravity mode frequencies and the external hydrostatic gravity mode frequencies for  $L=0, 9, 19$

现: 图 2 中声波的频率  $G$  随波数的增加靠近、但不会超出 Brunt-Väisälä 频率, 而图 3 中重力波 H 的频率则会随波数的增加而线性增大. 图 3 中没有了图 2 中的声波, 也就是说静力模式没有声波.

图 4 除了波的传播方向是向西以外, 其他与图 2 一样. 比较图 2 与图 4, 对应的 A, B, G 和 E 除了传播方向相反外, 量级似乎是相等的; 然而, 数值结果表明: 相同的纬向波数与经向指数, 向西方向传播的波的频率幅度要大些; 对于重力波频率  $G$ , 这种差异在较大的纬向波数与经向指数情况下会变得非常小. 相反, 对声波频率 A, 这种差异要在较大纬向波数时才会有所显现.

图 5 除了波的传播方向是向西以外, 其他与图 3 一样.

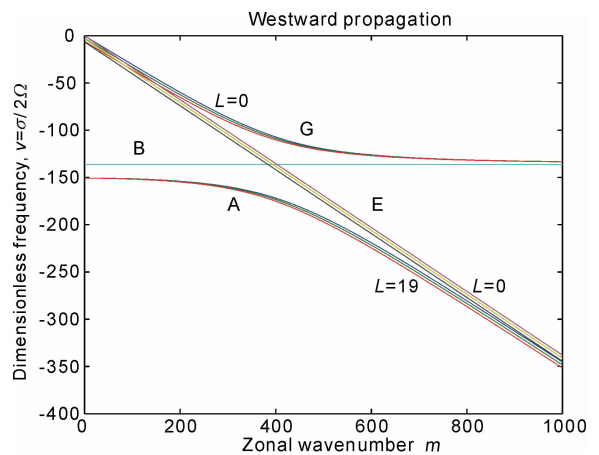


图 4 向西传播波的频率图, 这里频率的值是负的, 除了传播方向外, 类似于图 2

Fig. 4 Same as Fig. 2, except that is for westward propagating waves so that frequencies are negative

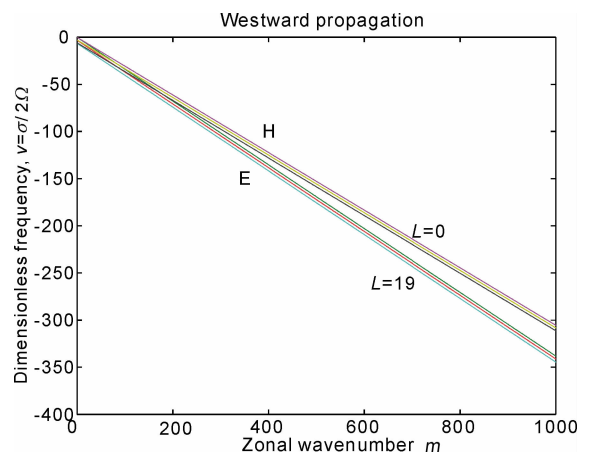


图 5 静力模式中向西传播的重力波(H)与外重力波(E)频率图

Fig. 5 Westward propagating the gravity mode frequencies (H) and the external gravity mode frequencies (E) in hydrostatic model

图 6 中的曲线表示向西传播的旋转波,即第二类型的振荡.其中  $L=0$  对应的曲线为混合 Rossby 重力波.频率值几乎和静力模式中的一致.因此,非静力模式对旋转波的影响几乎可以忽略不计.

图 7 和图 8 表示等价高度  $h$  随纬向波数  $m$  变化的曲线图.由于声波和重力波的水平结构由等价高度的值来区分,所以等价高度是区分重力波和声波

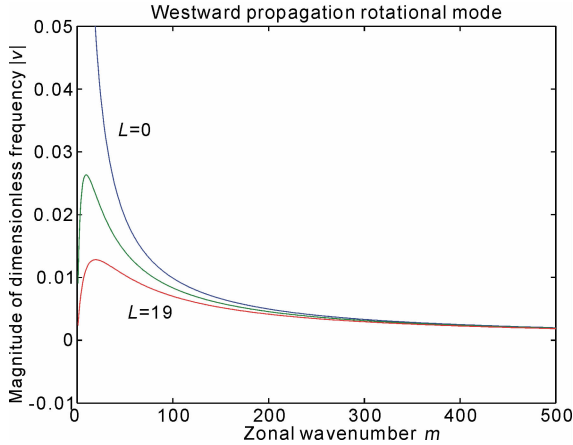


图 6 上边界为无穷 ( $Z_T = \infty$ ) 的非静力模式向西传播的旋转波频率图  
三曲线分别对应  $L=0, 9, 19$ .

Fig. 6 Frequency diagram for westward propagating rotational waves of non-hydrostatic model with infinite top,  $Z_T = \infty$   
Three curves for  $L=0, 9$  and  $19$  are shown.

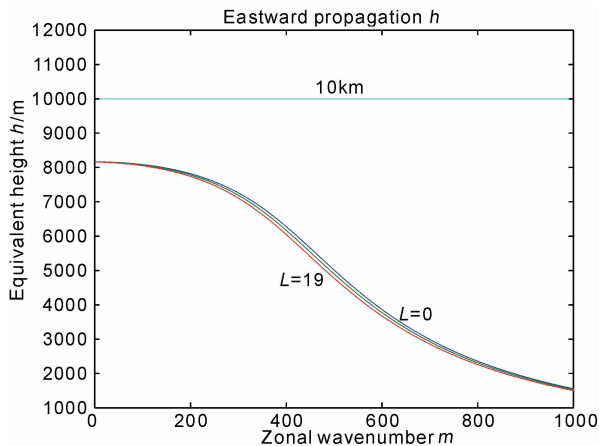


图 7 上边界为无穷 ( $Z_T = \infty$ ) 的非静力模式向东传播的重力波对应的等价高度曲线  
三曲线分别对应经向指数  $L=0, 9, 19$ . 直线为分割声波与重力波区域的 10 km 等价高度.

Fig. 7 Equivalent-height diagram for eastward propagating waves of non-hydrostatic model with infinite top,  $Z_T = \infty$   
Groups of three curves are gravity modes for meridional index  $L=0, 9, 19$ . Straight line shows equivalent height of 10 km.

的重要信息.图 8 中的曲线对应于声波,当  $m$  较小时,  $h$  非常大;当  $m$  增大时,  $h$  迅速减小而趋近于外波对应的等价高度 10 km.图 7 的曲线对应于重力波.当  $m$  较小时,  $h$  接近于静力模式中的等价高度,但随着  $m$  的增大而减小.

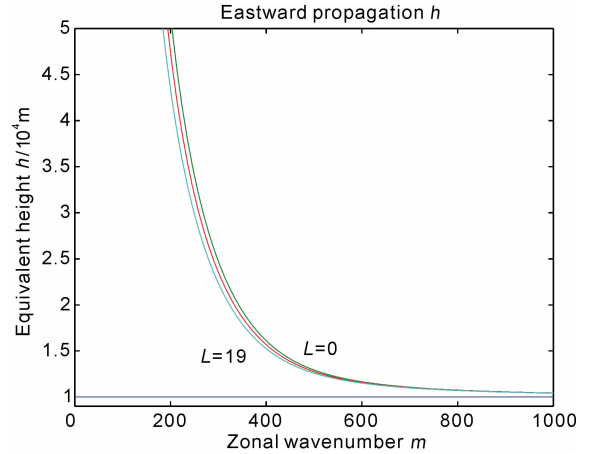


图 8 上边界为无穷 ( $Z_T = \infty$ ) 的非静力模式向东传播的声波对应的等价高度曲线  
三曲线分别对应经向指数  $L=0, 9, 19$ . 直线为分割声波与重力波区域的 10 km 等价高度.

Fig. 8 Equivalent-height diagram for eastward propagating waves of non-hydrostatic model with infinite top,  $Z_T = \infty$   
Groups of three curves are acoustic modes for meridional index  $L=0, 9, 19$ . Straight line shows equivalent height of 10 km.

## 8 结论与分析

本文在不考虑湿度、摩擦和其他非绝热过程的情况下对 GRAPES 全球非静力大气模式作了正规模分析.

(1) 用小扰动理论建立了 GRAPES 模式对应的线性化系统.

(2) 用变量分离方法将线性系统分解为含有水平与垂直变量的两组本征值与本征函数方程,形成以波的频率与“等价高度”为未知量的耦合方程组.

(3) 在等温大气下,分析了静力与非静力模式中波的种类,得到如下结论:在静力条件下存在两种波——向东和向西传播的重力惯性波及向西传播的 Rossby 波.在非静力条件下除了上述两种波外还存在向东和向西传播的声惯性波.向西传播的 Rossby 波和静力条件下的几乎一样,不受非静力作用的影响.对于向东和向西传播的重力惯性波只有当运动的水平尺度较小和垂直尺度较大时才会明显受非静力作用的影响.浅层大气逼近的基本原理是



基于简单的尺度分析或要求被忽略的项对线性正规模的频率影响较小. 它有 Coriolis 力的方向被错误地描述和垂直变量对角动量的贡献被忽略等弱点. 无论是大气还是海洋, 更详细的尺度分析表明: 对于多尺度的运动, 浅薄大气逼近比静力逼近存在更多的问题. 因此, 对于 GRAPES 模式深层大气的正规模分析是非常必要的. 另外, 非等温状态更近于实际, 在这种情况下, Brunt-Väisälä 频率与声速就与垂直变量  $z$  相关, 对应的本征函数不再容易求得, 通常需利用数值方法或按照文献[6]的高频逼近方法求解. 有关 GRAPES 模式的这些工作将在另文报告.

### 参考文献(References)

- [1] Yang X S, Chen J B, Hu J L, et al. A semi-implicit semi-Lagrangian global non-hydrostatic model and the polar discretization scheme. *Science in China (Series D, Earth Sciences)*, 2007, **50**(12):1885~1891
- [2] 季仲贞. 计算地球物理流体力学中的非线性不稳定问题. *力学进展*, 1986, **16**(3):305~318  
Ji Z Z. On the nonlinear computational instability in computational geophysical fluid dynamics. *Advances in Mechanics* (in Chinese), 1986, **16**(3):305~318
- [3] 季仲贞, 王 斌. 再论发展方程差分格式的构造和应用. *大气科学*, 1991, **15**(2):1~10  
Ji Z Z, Wang B. Further discussion on the construction and application of difference scheme of evolution equations. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 1991, **15**(2):1~10
- [4] Monin A S, Obukhov A M. A note on general classification of motions in a baroclinic atmosphere. *Tellus*, 1959, **11**:159~162
- [5] Eckart C. *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres*. Pergamon Press, 1960. 245~279
- [6] Daley R. The normal mode of the spherical non-hydrostatic equations with applications to the filtering of acoustic modes. *Tellus*, 1988, **40A**:96~106
- [7] Kasahara A, Qian J H. Normal models of a global non-hydrostatic atmospheric model. *Mon. Wea. Rev.*, 2000, **128**(10):3357~3375
- [8] Daley R. The development of efficient time integration schemes using model normal modes. *Mon. Wea. Rev.*, 1980, **108**(1):100~108
- [9] Kasahara A, Kamal Puri. Spectral representation of three-dimensional global data by expansion in normal mode functions. *Mon. Wea. Rev.*, 1981, **109**(1):37~51
- [10] Kasahara A. Application of vertical normal mode expansion to problems of baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, 1989, **46**(4):489~510
- [11] Kasahara A. Normal modes of ultra-long wave in the atmosphere. *Mon. Wea. Rev.*, 1976, **104**(6):669~690
- [12] Kasahara A. Numerical integration of the global barotropic primitive equations with Hough harmonic expressions. *J. Atmos. Sci.*, 1977, **34**(5):687~701
- [13] Kasahara A. Further studies on a spectral model of the global barotropic primitive equations with Hough harmonic expressions. *J. Atmos. Sci.*, 1977, **35**(11):2043~2051
- [14] Longuet-Higgins M S. The eigenfunctions of Laplace's tidal equations over a sphere. *Philos. Trans. Roy. Soc. London (Series A: Mathematical and Physical Series)*, 1968, **262**:511~607
- [15] Tanaka H L. On the normal modes of Laplace's tidal equations for zonal wave-number zero. *Tellus*, 1992, **44A**:18~32
- [16] Tanaka H L, Kung E C. Energetic analysis of the observed and simulated general circulation using three-dimensional normal mode expansions. *Tellus*, 1986, **38A**:412~428
- [17] Staniforth A, Nigel Wood. The deep-atmosphere Euler equations in a generalized vertical coordinate. *Mon. Wea. Rev.*, 2003, **131**(8):1931~1938
- [18] Thuburn J, Wood N, Staniforth A. Normal modes of deep atmospheres. II: spherical geometry. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 2002, **128**:1793~1806
- [19] Thuburn J, Wood N, Staniforth A. Normal modes of deep atmospheres. I: spherical geometry. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 2002, **128**:1771~1792
- [20] Norman A P. The equations of motion for a shallow rotating atmosphere and the "traditional approximation". *J. Atmos. Sci.*, 1966, **23**(5):626~628
- [21] 陈泽宇, 吕达仁. 面向大气热力潮汐结构分析的 Hough 函数计算. *地球物理学报*, 2009, **52**(6):1444~1450  
Chen Z Y, Lü D R. On the calculation of Hough functions for resolving atmospheric thermal tidal structure. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2009, **52**(6):1444~1450

(本文编辑 何 燕)