

# 多目标约束下的满意容错控制方法

孙新柱<sup>1,2</sup> 胡寿松<sup>1</sup>

**摘要** 对一类不确定性不满足匹配条件的线性系统,研究了圆域极点指标、 $H_\infty$  指标和  $H_2$  指标约束下的满意容错控制器的设计问题. 在连续型的执行器故障的模式下,利用线性矩阵不等式技术,提出了多目标容错控制性能的相容性判别条件,分析了与圆域极点指标相容的  $H_\infty$  指标和  $H_2$  指标的取值范围,并在相容指标约束下给出了有效的满意容错控制器的设计方法. 对歼击机纵向通道控制系统的仿真结果表明,本文提出的方法是有效的.

**关键词** 线性不确定系统, 线性矩阵不等式, 多目标约束, 相容性, 满意容错控制  
**中图分类号** TP273

## Methods of Satisfactory Fault-tolerant Control with Multi-objective Constraint

SUN Xin-Zhu<sup>1,2</sup> HU Shou-Song<sup>1</sup>

**Abstract** For a class of uncertain linear systems with uncertainties which do not meet the match conditions, the problem of satisfactory fault-tolerant control is studied with circle pole index,  $H_\infty$  index, and  $H_2$  index constraints. Under a continuous fault model of the actuator, the consistency conditions of multi-objective fault-tolerant performance are set up by linear matrix inequality approach, and the range constraint indices are analyzed. Furthermore, the effective controller design method for systems with constrains of consistent indices is presented. Simulations for longitude control of an aircraft indicate the validity of the proposed method.

**Key words** Linear uncertain systems, linear matrix inequality, multi-objective constraint, consistency, satisfactory fault-tolerant control

现代工程系统正朝着大规模、复杂化的方向发展,一旦这类系统发生事故,就可能造成人员和财产的巨大损失. 而容错控制的目标是当系统的某些部件出现故障或失效时,基于系统部件功能上的冗余性,在适当降低某些性能指标的前提下,整个系统仍能维持稳定,从而提高系统的可靠性<sup>[1]</sup>. 在实际工程系统设计中,通常要求同时满足多目标约束,只有期望的各项性能指标都能满足的控制系统才是令人满意的. 因此,研究多目标约束下的满意容错控制系统的设计具有重要的理论意义和应用价值.

文献 [2] 首次提出了多指标约束条件下的容错控制系统设计的概念,但具体的理论和方法尚待深入研究;文献 [3] 研究了一类不确定离散系统在同时具有圆域极点指标、 $H_\infty$  指标和方差指标约束下的容错控制器的设计问题,但假设不确定性满足相应的匹配条件;文献 [4-5] 分别利用线性矩阵不等式

(Linear matrix inequality, LMI) 技术,研究了具有区域极点配置的  $H_\infty/H_2$  多目标控制问题,但没有对多目标约束的指标相容性和满足多目标约束控制器的存在性做相应的研究,且没有考虑容错性.

本文对一类不确定性不满足匹配条件的线性系统,研究了圆域极点指标、 $H_\infty$  指标和  $H_2$  指标约束下的满意容错控制器的设计问题. 采用连续型执行器故障模型,利用线性矩阵不等式技术,提出了多目标约束下的满意容错性能的相容性判别条件,并给出了满意容错控制器存在的充分条件、设计方法及步骤. 最后,通过仿真实例验证了文中设计方法的有效性.

### 1 问题描述

设线性不确定系统由下式描述

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (A + \Delta A)\mathbf{x}(t) + (B + \Delta B)\mathbf{u}^f(t) + \\ \quad B_1\mathbf{w}_1(t) + B_2\mathbf{w}_2(t) \\ \mathbf{z}_1(t) = C_1\mathbf{x}(t) + D_1\mathbf{u}^f(t) \\ \mathbf{z}_2(t) = C_2\mathbf{x}(t) + D_2\mathbf{u}^f(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{u}^f(t) \in \mathbf{R}^p$  分别为系统的状态及考虑执行器故障的控制输入;  $\mathbf{z}_1(t) \in \mathbf{R}^{r_1}$  和  $\mathbf{z}_2(t) \in \mathbf{R}^{r_2}$  分别表示与  $H_\infty$  和  $H_2$  指标有关的被调输出;  $\mathbf{w}_1(t) \in \mathbf{R}^{q_1}$  和  $\mathbf{w}_2(t) \in \mathbf{R}^{q_2}$  为外界扰动信号;

收稿日期 2007-04-19 收修改稿日期 2008-03-14  
Received April 19, 2007; in revised form March 14, 2008  
国家自然科学基金 (60234010), 航空科学基金 (05E52031) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60234010) and Aeronautical Science Foundation of China (05E52031)

1. 南京航空航天大学自动化学院 南京 210016 2. 安徽工程科技学院电气工程系 芜湖 241000  
1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016 2. Department of Electrical Engineering, Anhui University of Technology and Science, Wuhu 241000  
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00937

$A, B, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$  为适当维数的常值矩阵. 各  $\Delta$  项为不确定性参数向量产生的矩阵摄动, 摄动矩阵不确定但其范数有界, 即  $\|\Delta A\| \leq a, \|\Delta B\| \leq b$ , 其  $\|\cdot\|$  表示矩阵的谱范数.

设考虑执行器故障的控制输入模型为

$$\mathbf{u}^f(t) = MK\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

式中,  $K$  为待求的状态反馈增益阵.

定义执行器故障矩阵<sup>[6]</sup> 为

$$M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_p\}$$

其中,  $0 \leq m_{li} \leq m_i \leq m_{ui}, i = 1, 2, \dots, p$ . 当  $m_i = 0$  时, 表示执行器第  $i$  条通道完全失效; 当  $m_i = 1$  时, 表示执行器第  $i$  条通道正常工作; 当  $0 \leq m_{li} \leq m_i \leq m_{ui}$  且  $m_i \neq 1$  时, 表示执行器第  $i$  条通道部分失效.

引入如下矩阵

$$M_0 = \text{diag}\{m_{01}, m_{02}, \dots, m_{0p}\}$$

$$L = \text{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_p\}$$

$$|L| = \text{diag}\{|l_1|, |l_2|, \dots, |l_p|\}$$

$$J = \text{diag}\{j_1, j_2, \dots, j_p\}$$

式中,  $m_{0i} = (m_{li} + m_{ui})/2, l_i = (m_i - m_{0i})/m_{0i}, j_i = (m_{ui} - m_{li})/(m_{li} + m_{ui}), i = 1, 2, \dots, p$ .

由此可得

$$M = M_0(I + L) \quad |L| \leq J \leq I$$

因此, 包含执行器故障的闭环系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (A_c + \Delta A_c)\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{w}_1(t) + B_2\mathbf{w}_2(t) \\ \mathbf{z}_1(t) = C_{c1}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}_2(t) = C_{c2}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $A_c = A + BMK, \Delta A_c = \Delta A + \Delta BMK, C_{c1} = C_1 + D_1MK, C_{c2} = C_2 + D_2MK$ .

对于多目标约束下的满意容错控制问题, 引入如下定义.

**定义 1.** 对于故障闭环系统 (3), 给定圆域  $D(-q, r) (q > r > 0)$ 、正常数  $\gamma_\infty$  和  $\gamma_2$ , 若存在状态反馈增益阵  $K$ , 使得故障闭环系统 (3) 同时满足下述条件:

1) 对于所有可能的连续型执行器故障, 故障闭环系统的极点都位于圆域  $D(-q, r)$  内;

2) 从扰动输入  $\mathbf{w}_1(t)$  到被调输出  $\mathbf{z}_1(t)$  的传递函数矩阵的范数  $\|G_{\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1}(s)\|_\infty \leq \gamma_\infty$ ;

3) 从扰动输入  $\mathbf{w}_2(t)$  到被调输出  $\mathbf{z}_2(t)$  的传递函数矩阵的范数  $\|G_{\mathbf{z}_2\mathbf{w}_2}(s)\|_2 \leq \gamma_2$ .

则称圆域极点指标、 $H_\infty$  指标和  $H_2$  指标相对于故障闭环系统 (3) 的状态反馈增益阵  $K$  是相容的, 并称控制器  $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t)$  为不确定系统 (1) 在多目标约束下的满意容错控制器.

**引理 1**<sup>[7]</sup>. 对于适当维数矩阵  $X$  和  $Y$ , 及标量  $\varepsilon > 0$ , 不等式  $X^T Y + Y^T X \leq \varepsilon X^T X + \varepsilon^{-1} Y^T Y$  成立.

**引理 2**<sup>[8]</sup>. 存在状态反馈增益阵  $K$  使故障闭环系统 (3) 所有极点都位于圆域  $D(-q, r)$  内的充要条件是, 存在正定矩阵  $X$  满足

$$(A_c + \Delta A_c + qI)X(A_c + \Delta A_c + qI)^T - r^2 X < 0 \quad (4)$$

**引理 3**<sup>[8]</sup>. 对于给定的正常数  $\gamma_\infty$ , 故障闭环系统 (3) 渐近稳定且  $\|G_{\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1}(s)\|_\infty \leq \gamma_\infty$  的充要条件是, 存在正定矩阵  $X$  满足

$$(A_c + \Delta A_c)X + X(A_c + \Delta A_c)^T + \gamma_\infty^{-2} X C_{c1} C_{c1}^T X + B_1 B_1^T < 0 \quad (5)$$

**引理 4**<sup>[8]</sup>. 对于给定正常数  $\gamma_2$  和故障闭环系统 (3), 假设其是稳定的, 则  $\|G_{\mathbf{z}_2\mathbf{w}_2}(s)\|_2 \leq \gamma_2$  的充要条件是, 存在正定矩阵  $X$  满足

$$(A_c + \Delta A_c)X + X(A_c + \Delta A_c)^T + B_2 B_2^T < 0 \\ \text{tr}(C_{c2} X C_{c2}^T) < \gamma_2^2 \quad (6)$$

## 2 主要结果

**定理 1.** 对故障闭环系统 (3), 存在状态反馈增益阵  $K$  满足约束条件 1) 的充要条件是: 包含正实变量  $\gamma_\infty$  和  $\gamma_2$ 、正定矩阵  $X$  和矩阵  $Y$  的矩阵不等式组 (4) ~ (6) 有可行解. 若  $(X, K, \gamma_\infty, \gamma_2)$  是上述矩阵不等式组的任意可行解, 则状态反馈增益阵  $K$  使得故障闭环系统  $\|G_{\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1}(s)\|_\infty \leq \gamma_\infty$  且  $\|G_{\mathbf{z}_2\mathbf{w}_2}(s)\|_2 \leq \gamma_2$ .

**证明.** 由引理 2 可知, 充分性显然.

必要性证明如下:

若故障闭环系统 (3) 状态反馈极点可配置, 则由引理 2 知矩阵不等式 (4) 必有可行解. 设  $X$  是其任一正定解矩阵, 展开矩阵不等式 (4) 并注意到  $q > r$ , 可得

$$(A_c + \Delta A_c)X + X(A_c + \Delta A_c)^T < 0$$

于是, 对于固定的半正定矩阵  $B_1 B_1^T$ , 存在充分大的正常数  $\lambda_1$  和正变量  $\gamma_\infty$ , 使得

$$\lambda_1 [(A_c + \Delta A_c)X + X(A_c + \Delta A_c)^T] + B_1 B_1^T + \gamma_\infty^{-2} X C_{c1} C_{c1}^T X < 0$$

同理, 对于固定的半正定矩阵  $B_2 B_2^T$ , 存在充分大的正常数  $\lambda_2$  和正变量  $\gamma_2$ , 使得

$$\lambda_2[(A_c + \Delta A_c)X + X(A_c + \Delta A_c)^T] + B_2 B_2^T < 0$$

$$\text{tr}(C_{c2} X C_{c2}^T) < \gamma_2^2$$

若定义  $X_1 = \max(\lambda_1, \lambda_2)X$ , 则  $(X_1, K, \gamma_\infty, \gamma_2)$  是矩阵不等式组 (4) ~ (6) 的一组可行解。□

**推论 1.** 对于故障闭环系统 (3), 存在状态反馈增益阵  $K$  满足约束条件 1) 的充要条件是: 包含正实变量  $\gamma_\infty$ 、正定矩阵  $X$  和矩阵  $K$  的矩阵不等式组 (4) 和 (5) 有可行解。若  $(X, K, \gamma_\infty)$  是上述矩阵不等式组的任意可行解, 则状态反馈增益阵  $K$  使得故障闭环系统  $\|G_{z_1 w_1}(s)\|_\infty \leq \gamma_\infty$ 。

利用矩阵变换、Schur 补定理和引理 1, 可以得到定理 1 的等价 LMI 形式。

**定理 2.** 对于故障闭环系统 (3), 存在状态反馈增益阵  $K$  满足约束条件 1) 的充要条件是: 包含正实变量  $\gamma_\infty$ 、 $\gamma_2$ 、 $\varepsilon_{1i}(i = 1, 2, 3, 4)$ 、 $\varepsilon_{2j}(j = 1, 2, \dots, 5)$  和  $\varepsilon_{3k}(k = 1, 2, \dots, 5)$ , 正定矩阵  $X$  和  $Z$  及矩阵  $Y$  的以下矩阵不等式组有可行解。

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & AX + qX + BY & 0 \\ * & -rX & \Pi_1 \\ * & * & -\Theta_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_2 & B_1 & (C_1 X + D_1 Y)^T & \Pi_2 \\ * & -\gamma_\infty I & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma_\infty I + \varepsilon_{25} D_1 J D_1^T & 0 \\ * & * & * & -\Theta_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_3 & (C_2 X + D_2 Y)^T & \Pi_3 \\ * & -I + \varepsilon_{35} D_2 J D_2^T & 0 \\ * & * & -\Theta_3 \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -Z & B_2^T \\ B_2 & -X \end{bmatrix} < 0 \quad \text{tr}(Z) < \gamma_2^2 \quad (9)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= -rX + \varepsilon_{11} aI + \varepsilon_{12} B J B^T + (\varepsilon_{13} + \varepsilon_{14}) bI \\ \Sigma_m &= AX + BY + (AX + BY)^T + \varepsilon_{m1} B J B^T + \\ &\quad \varepsilon_{m2} aI + (\varepsilon_{m3} + \varepsilon_{m4}) bI \\ \Pi_1 &= [ X \quad Y^T \quad Y^T \quad Y^T ] \\ \Pi_m &= [ Y^T \quad X \quad Y^T \quad Y^T \quad Y^T ] \\ \Theta_1 &= \text{diag}\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12} J^{-1}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14} J^{-1}\} \\ \Theta_m &= \text{diag}\{\varepsilon_{m1} J^{-1}, \varepsilon_{m2}, \varepsilon_{m3}, \varepsilon_{m4} J^{-1}, \varepsilon_{m5} J^{-1}\} \\ &\quad (m = 2, 3) \end{aligned}$$

若  $(X, Y, Z, \varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2j}, \varepsilon_{3k}, \gamma_\infty, \gamma_2)$  是上述矩阵不等式组的任意解, 则状态反馈增益阵  $K = M_0^{-1} Y X^{-1}$  必使故障闭环系统 (3) 满足约束条件 1) ~ 3)。

**证明.** 对于矩阵不等式 (7) 的证明如下:

利用 Schur 补定理, 矩阵不等式 (4) 等价于式 (10), 由 Schur 补定理可知, 矩阵不等式 (15) 的右侧等价于矩阵不等式 (7) 的左侧; 若矩阵不等式 (7) 成立, 则矩阵不等式 (4) 必成立。

对于矩阵不等式 (8) 和 (9) 的证明过程, 类似于矩阵不等式 (7) 的证明, 证明略。□

**推论 2.** 对于故障闭环系统 (3), 存在状态反馈增益阵  $K$  满足约束条件 1) 的充要条件是: 包含正实变量  $\gamma_\infty$ ,  $\varepsilon_{1i}(i = 1, 2, 3, 4)$  和  $\varepsilon_{2j}(j = 1, 2, \dots, 5)$ , 正定矩阵  $X$  和  $Z$  及矩阵  $Y$  的矩阵不等式组 (7) 和 (8) 有可行解; 若  $(X, Y, \varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2j}, \gamma_\infty)$  是上述矩阵不等式组的任意解, 则状态反馈增益阵  $K = M_0^{-1} Y X^{-1}$  必使故障闭环系统 (3) 满足约束条件 1) 和 2)。

对于给定的圆域极点指标  $D(-q, r)$ , 若矩阵不等式 (7) 有解, 则故障闭环系统 (3) 存在满足约束条件 1) ~ 3) 的容错控制器。于是下面的极值问题有意义, 它刻画了在状态反馈下, 故障闭环系统  $H_\infty$  指标上界中与圆域极点指标相容的最小上界。

$$\min(\gamma_\infty) : (X, Y, \varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2j}, \gamma_\infty) \quad \text{s.t. LMIs (7), (8)} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & (A + \Delta A + qI)X + (B + \Delta B)M_0(I + L)KX \\ * & -rX \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

将上式进行和式分解, 得

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -rX & (A + qI)X + B M_0 K X \\ * & -rX \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Delta A X \\ * & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B M_0 L K X \\ * & 0 \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} 0 & \Delta B M_0 K X \\ * & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Delta B M_0 L K X \\ * & 0 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

令  $Y = M_0 K X$ , 并利用引理 1, 可得

$$\begin{bmatrix} 0 & \Delta A X \\ * & 0 \end{bmatrix} \leq \varepsilon_{11} \begin{bmatrix} aI & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_{11}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X X \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & B M_0 L K X \\ * & 0 \end{bmatrix} \leq \varepsilon_{12} \begin{bmatrix} B J B^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_{12}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y^T J Y \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \Delta B M_0 K X \\ * & 0 \end{bmatrix} \leq \varepsilon_{13} \begin{bmatrix} bI & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_{13}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y^T Y \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \Delta B M_0 L K X \\ * & 0 \end{bmatrix} \leq \varepsilon_{14} \begin{bmatrix} bI & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_{14}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y^T J Y \end{bmatrix} \tag{14}$$

则由式 (11) ~ (14) 可得

$$\begin{bmatrix} -rX & (A + \Delta A + qI)X + \\ & (B + \Delta B)M_0(I + L)KX \\ * & -rX \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -rX + \varepsilon_{11}aI + \varepsilon_{12}B J B^T + & AX + qX + BY \\ (\varepsilon_{13} + \varepsilon_{14})bI & \\ * & -rX \end{bmatrix} + \tag{15}$$

$$\varepsilon_{11}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X X \end{bmatrix} + \varepsilon_{13}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y Y^T \end{bmatrix} + (\varepsilon_{12}^{-1} + \varepsilon_{14}^{-1}) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y^T J Y \end{bmatrix}$$

求解极值问题 (16) 得  $\gamma_{\infty \min}$ , 并选取  $\gamma_{\infty} > \gamma_{\infty \min}$ .

极值问题 (17) 刻画了在状态反馈下, 故障闭环系统  $H_2$  指标上界中与圆域极点指标和  $H_{\infty}$  指标相容的最小值.

$$\begin{aligned} \min(\gamma_2) : & (X, Y, Z, \varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2j}, \varepsilon_{3k}, \gamma_2) \\ \text{s.t. LMIs} & (7) \sim (9) \end{aligned} \tag{17}$$

求解极小值问题 (17) 得  $\gamma_{2 \min}$ , 并记相应的极小值点为  $(X_{\min}, Y_{\min}, Z_{\min}, \varepsilon_{1i \min}, \varepsilon_{2j \min}, \varepsilon_{3k \min}, \gamma_{2 \min})$ .

**定理 3.** 对于故障闭环系统 (3), 若其闭环极点可配置在圆域极点指标  $D(-q, r)$  内, 则对于给定  $H_{\infty}$  指标  $\gamma_{\infty} > \gamma_{\infty \min}$  和  $H_2$  指标  $\gamma_2 > \gamma_{2 \min}$ , 关于变量  $(X, Y, Z, \varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2j}, \varepsilon_{3k})$  的矩阵不等式组 (7) ~ (9) 总有可行解, 且若  $(X, Y)$  是其任一可行解, 则圆域极点指标  $D(-q, r)$ 、 $H_{\infty}$  指标  $\gamma_{\infty}$  和  $H_2$  指标  $\gamma_2$  相对于状态反馈增益  $K = M_0^{-1} Y X^{-1}$  是相容的, 并且称控制器  $u(t) = Kx(t)$  为不确定系统 (1) 在多目标约束下的满意容错控制器.

**证明.** 由  $(X_{\min}, Y_{\min}, Z_{\min}, \varepsilon_{1i \min}, \varepsilon_{2j \min}, \varepsilon_{3k \min}, \gamma_{2 \min})$  的定义可知, 矩阵不等式组 (7) ~ (9) 存在一个解系列  $(X^n, Y^n, Z^n, \varepsilon_{1i}^n, \varepsilon_{2j}^n, \varepsilon_{3k}^n, \gamma_2^n) (n = 1, 2, \dots)$ , 使得由此生成的状态反馈增益阵  $K^n$  收敛于  $K_{\min}$ , 而  $H_{\infty}$  指标和  $H_2$  指标是反馈控制律的连续函数, 因此当  $\gamma_{\infty} > \gamma_{\infty \min}$  和  $\gamma_2 > \gamma_{2 \min}$  时, 由极限的保号性可知, 存在充分大的整数  $m$ , 使得  $K^m$  相应的  $\|G_{z_1 w_1}(s)\|_{\infty} \leq \gamma_{\infty}$  和  $\|G_{z_2 w_2}(s)\|_2 \leq \gamma_2$ . 而  $K^m$  是由矩阵不等式组 (7) ~ (9) 的一个可行解

$(X^n, Y^n, Z^n, \varepsilon_{1i}^n, \varepsilon_{2j}^n, \varepsilon_{3k}^n, \gamma_2^n)$  生成的, 因而反馈控制律  $K^m$  必使故障闭环系统 (3) 同时满足约束条件 1) ~ 3); 由定义 1 可知, 圆域极点指标、 $H_{\infty}$  指标和  $H_2$  指标相对于不确定系统 (1) 的状态反馈增益阵  $K$  是相容的.  $\square$

**推论 3.** 对于故障闭环系统 (3), 若其闭环极点可配置在圆域极点指标  $D(-q, r)$  内, 则对于给定  $H_{\infty}$  指标  $\gamma_{\infty} > \gamma_{\infty \min}$ , 关于变量  $(X, Y, \varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2j})$  的矩阵不等式组 (7) 和 (8) 总有可行解, 且若  $(X, Y)$  是其任一可行解, 则圆域极点指标  $D(-q, r)$  和  $H_{\infty}$  指标  $\gamma_{\infty}$  相对于状态反馈增益  $K = M_0^{-1} Y X^{-1}$  是相容的, 并且称控制器  $u(t) = Kx(t)$  为不确定系统 (1) 在圆域极点指标和  $H_{\infty}$  指标约束下的满意容错控制器.

根据定理 2 和定理 3, 给出线性不确定系统在多目标约束下的满意容错控制器设计步骤如下:

1) 对于给定的圆域极点指标  $D(-q, r)$ , 验证关于变量  $(X, Y, \varepsilon_{1i})$  的矩阵不等式 (7) 的可行解问题, 判断不确定系统是否存在满足约束 1) ~ 3) 的容错控制器;

2) 若矩阵不等式 (7) 有可行解, 求解极值问题 (16), 得到  $\gamma_{\infty \min}$ ;

3) 选取  $\gamma_{\infty} > \gamma_{\infty \min}$ , 求解极值问题 (17), 得到  $\gamma_{2 \min}$ ; 由定理 3 可知, 满足  $\gamma_{\infty} > \gamma_{\infty \min}$  和  $\gamma_2 > \gamma_{2 \min}$  的  $H_{\infty}$  指标  $\gamma_{\infty}$  和  $H_2$  指标  $\gamma_2$  与圆域极点指标  $D(-q, r)$  是相容的;

4) 对于给定的相容  $H_{\infty}$  指标  $\gamma_{\infty}$  和  $H_2$  指标  $\gamma_2$

与圆域极点指标  $D(-q, r)$ , 由定理 3 可求解出满足约束条件 1) ~ 3) 的满意容错控制器.

### 3 仿真实例

设某型歼击机在高度为 15 km 和飞行马赫数为 0.8 时, 纵向控制系统描述如式 (1) 所示, 相应的参数如下<sup>[9]</sup>

$$A = \begin{bmatrix} -0.08 & -0.03 & -0.157 & 0 \\ -0.73 & -0.377 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8.65 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.54 & -0.020 \\ -0.10 & -0.056 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.50 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.02 \\ 0.03 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = [0 \quad 0.3 \quad 0.2 \quad 0.05]^T$$

$$C_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0], D_2 = [0 \quad 1]$$

$$\|\Delta A\| \leq 0.03, \|\Delta B\| \leq 0.02, M = \text{diag}\{m_1, m_2\}, 0.2 \leq m_1 \leq 1, 0.4 \leq m_2 \leq 1.$$

式中, 状态向量  $x = [v \quad \alpha \quad \theta \quad q]^T$ ,  $v$  为飞行速度,  $\alpha$  为仰角,  $\theta$  为俯仰角,  $q = \dot{\theta}$  为俯仰角速度; 控制向量  $u = [\delta_p \quad \delta_e]^T$ ,  $\delta_p$  为油门杆输入,  $\delta_e$  为升降舵偏角.

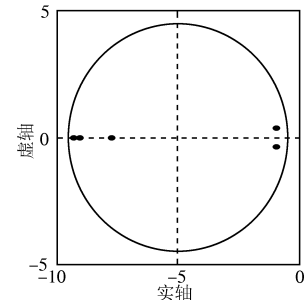
取圆域极点指标为  $D(-5, 4.5)$ , 按上述满意容错控制器的设计步骤, 先求解极值问题 (16), 得  $\gamma_{\infty \min} = 0.7716$ , 取  $\gamma_{\infty} = 0.8 > \gamma_{\infty \min}$ ; 再求解极值问题 (17), 得  $\gamma_{2 \min} = 2.0245$ , 取  $\gamma_2 = 2.1 > \gamma_{2 \min}$ . 根据推论 3 和定理 3 分别求得不确定系统 (1) 在圆域极点和  $H_{\infty}$  指标约束下的状态反馈增益阵  $K_1$ , 以及在多目标约束下的状态反馈增益阵  $K_2$ .

$$K_1 = \begin{bmatrix} -5.9678 & 4.4428 & -4.5160 & -0.0312 \\ 0.0115 & -1.7981 & 2.5142 & 1.4514 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -5.9758 & 4.4035 & -4.3622 & -0.0287 \\ -0.0065 & -1.8898 & 1.8924 & 1.2826 \end{bmatrix}$$

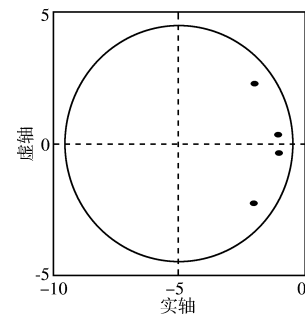
不确定系统 (1) 采用多目标约束下的满意容错控制器后, 系统闭环极点分布如图 1 所示. 其中, 执行器正常时, 如图 1(a) 所示; 执行器故障矩阵  $M = \text{diag}\{0.2, 0.4\}$ , 即执行器第 1 条和第 2 条通道输出信号分别为正常信号的 20% 和 40% 时, 如图 1(b) 所示. 由图 1 可知, 无论执行器是否发生故障, 系统的闭环极点均位于指定的圆域内.

在无干扰信号和执行器故障矩阵  $M = \text{diag}\{0.2, 0.4\}$  时, 控制飞机的升降舵偏角  $\delta_e(t)$ , 飞机俯仰角  $\theta(t)$  的响应曲线, 如图 2 所示. 图中分别对应为不确定系统 (1) 采用圆域极点和  $H_{\infty}$  指标约束下的满意容错控制器 ( $K_1$ ), 以及多目标约束下的满意容错控制器 ( $K_2$ ).



(a) 执行器正常

(a) Actuator normal



(b) 执行器故障 ( $M = \text{diag}\{0.2, 0.4\}$ )

(b) Actuator faults ( $M = \text{diag}\{0.2, 0.4\}$ )

图 1 多目标约束下的满意容错控制系统闭环极点分布图

Fig. 1 Closed-loop pole locations for satisfactory fault-tolerant system with multi-objective constraint

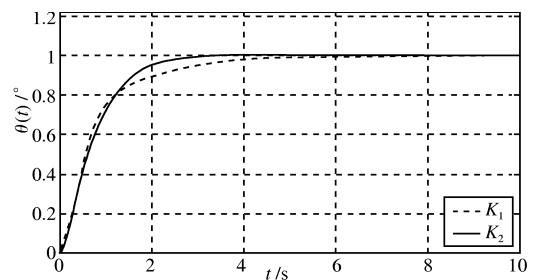


图 2 不同满意容错控制系统的  $\theta(t)$  响应曲线

Fig. 2  $\theta(t)$  responses of different satisfactory fault-tolerant systems

由图 2 可知, 在执行器发生故障时, 不确定系统 (1) 采用上述两种控制器,  $\theta(t)$  输出响应均能稳定, 并满足要求的动态性能; 但从总体的性能来看, 采用  $K_2$  的满意容错控制系统的输出性能明显优于采用  $K_1$  的满意容错控制系统, 其输出响应的调节时间 ( $t_s = 2.42$  s), 约为在圆域极点和  $H_{\infty}$  指标约束下的不确定系统 ( $t_s = 3.86$  s) 的 0.63 倍.

对文献 [5] 中的水泵 - 电动机系统, 根据系统的动态性能要求 ( $\sigma\% \leq 5\%$  和  $t_s \leq 0.5\text{s}$ ), 在执行器正常和执行器故障 ( $m = 0.4$ ) 情况下, 分别采用本文、文献 [4] 和文献 [5] 的方法设计了相应的控制器, 系统的阶跃响应曲线如图 3 和图 4 所示。

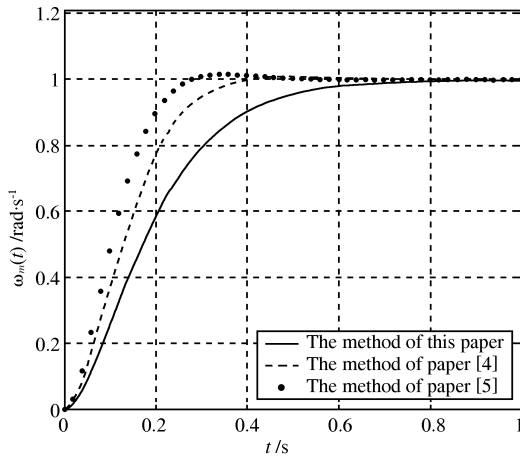


图 3 正常系统的阶跃响应

Fig. 3 Step response of the normal system

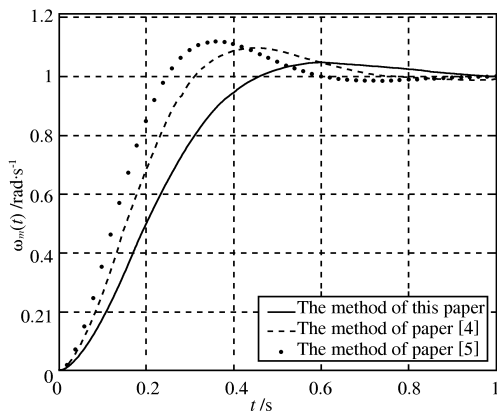


图 4 故障系统的阶跃响应

Fig. 4 Step response of the fault system

由图 3 和图 4 可知, 执行器正常情况下, 采用三种控制方法均能使系统的输出响应满足动态性能要求, 输出响应无超调, 调节时间小于 0.5s; 当执行器发生故障, 即执行器输出信号为正常信号的 40% 时, 采用本文的设计方法仍能使系统的输出响应满足动态性能要求 ( $\sigma\% = 4.4\%$  和  $t_s = 0.41\text{s}$ ), 而文献 [4] 和文献 [5] 的设计方法则失效。

#### 4 结论

对多目标约束下的满意容错控制方法的研究, 使容错控制理论更接近于实际工程系统, 具有深远的理论意义和应用价值. 本文对一类不确定性不满足匹配条件的线性系统, 采用连续型执行器故障模型, 利用线性矩阵不等式方法, 给出了多目标容错的相容性判别条件, 以及在相容指标约束下的满意容错控制器设计方法及步骤. 仿真实例验证了方法的

有效性.

#### References

- Hu Shou-Song, Liu Ya. Reliable control for complex system. *Journal of North China Electric Power University*, 2003, **30**(2): 34-40  
(胡寿松, 刘亚. 复杂工程系统的可靠控制. 华北电力大学学报, 2003, **30**(2): 34-40)
- Zhang G, Wang Z Q, Han X L, Hu S S. Research on satisfactory control theory and its application in fault-tolerant technology. In: *Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Hangzhou, China: IEEE, 2004. 1521-1524
- Zhang D F, Wang Z Q, Hu S S. Robust satisfactory fault-tolerant control of uncertain linear discrete-time systems: an LMI approach. *International Journal of Systems Science*, 2007, **38**(2): 151-165
- Neumann D, de Araujo H X. Mixed  $H_\infty/H_2$  control for uncertain systems under pole placement constraints using genetic algorithms and LMIs. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Taipei, Taiwan: IEEE, 2004. 460-465
- Guo C S, Wang X Z, Wang Y. LMI approach to robust  $H_\infty/H_2$  controller design with regional poles constraint of a pump-motor system. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2006, **15**(1): 61-65
- Wang Fu-Zhong, Yao Bo, Zhang Si-Ying. Reliable control of regional stabilizability for linear systems. *Control Theory and Applications*, 2004, **21**(5): 835-839  
(王福忠, 姚波, 张嗣瀛. 线性系统区域稳定的可靠控制. 控制理论与应用, 2004, **21**(5): 835-839)
- Zhou K M, Khargonekar P P. Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems and Control Letters*, 1988, **10**(1): 17-20
- Yu Li. *Robust Control — Linear Matrix Inequality Method*. Beijing: Tsinghua University Press, 2002  
(俞立. 鲁棒控制 — 线性矩阵不等式处理方法. 北京: 清华大学出版社, 2002)
- Wang Jin-Hua, Shi Zhong-Ke, Cao Li, Dai Guan-Zhong. Application of mixed  $H_\infty/H_2$  robust control to aircraft. *Fight Dynamics*, 2000, **18**(4): 61-64  
(王进华, 史忠科, 曹力, 戴冠中. 混合  $H_\infty/H_2$  鲁棒控制在飞行控制中的应用. 飞行力学, 2000, **18**(4): 61-64)



孙新柱 安徽工程科技学院讲师. 主要研究方向为容错控制, 鲁棒控制.

E-mail: sxz94210@163.com

(SUN Xin-Zhu Lecturer at Anhui University of Technology and Science. His research interest covers fault-tolerant control and robust control.)



胡寿松 南京航空航天大学教授. 主要研究方向为复杂系统故障诊断, 鲁棒控制与智能自修复控制. 本文通信作者.

E-mail: Hushousong\_nuaa@163.com

(HU Shou-Song Professor at Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. His research interest covers fault diagnosis, robust control, and intelligent self-repairing control of complex system. Corresponding author of this paper.)

Corresponding author of this paper.)