

# 基于矢量差分的未标定摄像机 P5P 问题的求解

许海霞<sup>1,2</sup> 王耀南<sup>1</sup> 袁小芳<sup>1</sup> 朱江<sup>1</sup> 周维<sup>2</sup>

**摘要** 针对 PnP 问题的方程建立与求解, 提出一种基于矢量差分的未标定摄像机 P5P 问题的线性求解算法. 将 5 个控制点组成非共面的 4 点集合, 按照成像过程, 通过两个集合间的控制点矢量差分逐步构建摄像机姿态及相机矩阵的线性约束方程. 再依据线性理论与旋转阵  $R$  的正交性化简约束方程, 利用矢量积运算给出未标定 P5P 问题摄像机姿态及相机矩阵的解析解. 模拟和真实实验都验证了该方法的有效性.

**关键词** 计算机视觉, 摄像机姿态与标定, P5P 问题, 矢量差分  
**中图分类号** TP391

## Solution to the P5P Problem with Un-calibrated Camera Based on Vector Difference

XU Hai-Xia<sup>1,2</sup> WANG Yao-Nan<sup>1</sup> YUAN Xiao-Fang<sup>1</sup>  
ZHU Jiang<sup>1</sup> ZHOU Wei<sup>2</sup>

**Abstract** The establishment and solution of a PnP problem are investigated here, and a vector difference based solution algorithm for linear P5P problem with an un-calibrated camera is proposed. Five control points are divided into collections containing four points of non-planar. According to the process of image formation, the constraint equations are set up between two collections of vector differences of control points. Then, these equations are simplified and determined in terms of linear theory and the orthogonal relation of rotation  $R$ . As a result, the analytic solutions of camera pose and intrinsic parameter matrix are obtained via vector cross or inner product operation. Simulated and real experiments illustrate that the proposed algorithm is effective.

**Key words** Computer vision, camera pose and calibration, P5P problem, vector difference

近年来, 在计算机视觉领域中, 动态场景分析<sup>[1]</sup>、运动恢复结构 (Structure from motion, SFM)<sup>[2]</sup>、增强现实 (Augmented reality, AR)<sup>[3]</sup>、机器人视觉导航<sup>[4]</sup> 等应用方面, 摄像机姿态的确定是最基础、核心的问题之一. 典型的摄像机姿态确定方法有: 基于 2D 图像特征的 8 点法<sup>[5]</sup>、基于 3D 空间特征的刚体变换<sup>[6-7]</sup>、Kalman 估计法<sup>[8]</sup>, 及  $n$  点/线透视定位 (Perspective- $n$ -point, PnP) 等. PnP 问题是 Fishler 和 Bolles<sup>[9]</sup> 于 1981 年首次提出, 最初是在已标定摄像机的基础上确定姿态, 而对于摄像机未标定的 PnP 问题

的研究更具有实际意义, 其主要目的是尽可能采用少的控制点设计出简洁、有效的姿态定位算法. 一个有效的 PnP 求解算法主要把握两点: 1) 发掘约束条件及信息, 构建 PnP 问题约束方程; 2) 求解约束方程.

关于建立约束方程, 目前大致有两类: 1) 利用距离、空间角度等信息建立深度信息约束方程, 再作刚体变换得到摄像机姿态, 如已标定的 PnP 问题, P3P<sup>[10]</sup> 和 P4P<sup>[11]</sup>, PnP<sup>[12-13]</sup>, 以及线性加权表示控制点的 EPnP 算法<sup>[14]</sup>; 未标定的 PnP 问题, 焦距未知的 P4P 算法<sup>[15]</sup>. 这样的约束方程通常会转化为距离度量的二次方程, 系统会具有高的复杂度, 带来很大的计算量. 2) 直接由成像过程建立约束方程, 如未标定的 P3P 及 P4P 问题<sup>[16]</sup>, 未标定的 P5P 问题<sup>[17-18]</sup>, 以及典型的标定算法, Tsai<sup>[19]</sup> 两步法, Zhang<sup>[20]</sup> 的平面模板法等. 列写方程简单, 但整合整个过程与系统需仔细考虑. 对于未标定的 PnP 问题, 目前的文献还不是很多, 若要得到内参数的四个元素, 单幅图像至少需 5 个控制点. 若多于 6 个点, 有足够约束, 所有参数可以唯一确定.

关于求解, 对于非线性方程, 求解是个难点, 一般采用非线性迭代数值解法<sup>[21]</sup>, 其解对噪声、初值敏感; Bujnak<sup>[15]</sup> 采用隐变量、Gröbner 基. 而线性方程的求解相对简单一些, Quan<sup>[12]</sup>, Ansar<sup>[13]</sup> 给出非常经典的  $n$  点/线的 PnP 问题线性求解算法, 为以后建立约束及求解算法的研究奠定了基础.

本文提出一种基于矢量差分的未标定摄像机 P5P 的线性求解算法 VDP5P (Vector difference P5P), 建立了摄像机姿态的线性约束方程. 给出一种新的求解思路, 根据广义逆矩阵与线性方程组求解理论及利用正交性化简、表达方程解, 用模拟与真实实验进行了方案的可行性验证与性能分析.

### 1 P5P 问题的表述

给定 5 个控制点在世界坐标系及图像坐标系下的对应点对  $\{P_i, m_i\}_{i=1}^5$ , 线性确定摄像机姿态  $R, t$  及标定摄像机内参数  $K$  的 4 个元素. 如图 1 所示, 点  $P_i = [x_i, y_i, z_i]^T$  在姿态  $R, t$  下成像于点  $m_i = [u_i, v_i]^T$ , 其齐次坐标  $\tilde{m}_i = [u_i, v_i, 1]^T$ ,  $\tilde{P}_i = [x_i, y_i, z_i, 1]^T$ . 任一空间点  $P_i$  与图像点  $m_i$  的投影成像关系为

$$\lambda \tilde{m}_i = K [R \ t] \tilde{P}_i \quad (1)$$

式中,  $\lambda$  是空间点  $P_i$  的深度值. 摄像机内参数矩阵  $K$ , 采用

$$K = \begin{bmatrix} f_u & 0 & u_0 \\ 0 & f_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中,  $f_u, f_v$  分别为图像平面上  $u$  轴和  $v$  轴上的尺度因子,  $u_0, v_0$  为主点坐标, 是图像平面与光轴的交点. 摄像机姿态的旋转阵  $R$  用行向量表示为  $R = [r_1, r_2, r_3]^T$ , 平移向量  $t = [t_1, t_2, t_3]^T$  用三个正交方向的长度表示.

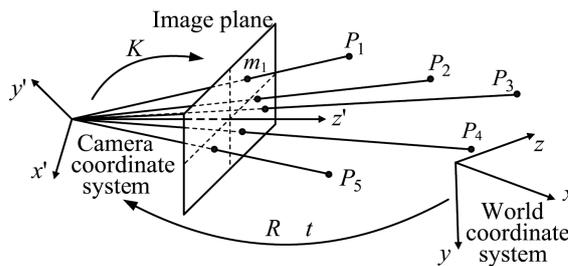


图 1 P5P 问题图示

Fig. 1 The representation of P5P problem

收稿日期 2008-06-10 收修改稿日期 2008-11-24  
Received June 10, 2008; in revised form November 24, 2008  
国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2007AA04Z244, 2008AA04Z214),  
国家自然科学基金 (60835004, 60775047) 资助  
Supported by National High Technology Research and Development  
Program of China (863 Program) (2007AA04Z244, 2008AA04Z214),  
and National Natural Science Foundation of China (60835004,  
60775047)

1. 湖南大学电气与信息工程学院 长沙 410082 2. 湘潭大学信息工程学院 湘潭 411105

1. School of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha 410082 2. School of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105

DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.01140

## 2 基于矢量差分的约束方程的建立

下面首先分析矢量差分的相关性, 再讨论约束方程的建立与求解.

### 2.1 控制点组成的矢量差分及相关性分析

给定一个点集  $Set = \{\mathbf{P}_n\}_{n=1}^N$ ,  $\mathbf{P}_n \in \mathbf{R}^3$ , 任两点间的矢量  $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j$  ( $i \neq j$ ). 当  $N = 4$  时,  $C_4^2$  个矢量中, 存在 3 个独立的矢量, 令任意三个独立矢量组成三阶矩阵  $A = [\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{14}]$ . 在任意非共面的 5 个点中, 至多有四个点共面, 不妨设点集  $\{1, 2, 3, 4\}$  为共面点,  $S = \{\{1, 2, 3, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{3, 1, 4, 5\}, \{4, 1, 2, 5\}\}$  为四组 4 点非共面的点集,  $\{n\}$  表示第  $n$  个点  $\mathbf{P}_n$ . 点集  $S_1 = \{1, 2, 3, 5\}$  内的独立矢量构成的可逆阵记为  $S_1 = [\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{15}]$ , 相应的其他 4 点非共面的点集构成可逆阵  $S_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ).

设点集  $\{S_i\}_{i=1}^4$  之间矢量差分为  $S_{ij} = S_i - S_j$  ( $i \neq j$ ) 且  $i, j \in [1, 4]$ , 及点集  $\{S_i\}_{i=1}^4$  之间的控制点和对应像点组合的矢量差分为  $Su_{ij} = S_i u_{si} - S_j u_{sj}$ ,  $Sv_{ij} = S_i v_{si} - S_j v_{sj}$  ( $u, v$  是像点的纵横坐标), 且  $S_i x_{si} = [P_{im}, P_{in}, P_{ik}] x_{si} = [P_i x_i - P_m x_m, P_i x_i - P_n x_n, P_i x_i - P_k x_k]$ . 分析计算易知其秩  $\text{rank}[Su_{ij}] = 1$ ,  $\text{rank}[Sv_{ij}] = 1$ . 即利用两个点集之间的矢量差分在图像点的横、纵坐标上可建立 2 个独立方程.

### 2.2 基于控制点矢量差分的约束方程

为了线性求解摄像机的位姿及标定摄像机, 对于给定的 5 个非共面的控制点, 任意选择两组 4 点非共面点集  $S_1, S_2$ , 不妨设  $S_1 = \{1, 2, 3, 5\}$ ,  $S_2 = \{2, 3, 4, 5\}$ . 每个空间点  $\mathbf{P}_i$  与像点  $\mathbf{m}_i$  的对应关系如式 (1), 将式 (1) 展开为

$$\begin{aligned} \lambda_i u_i &= (f_u \mathbf{r}_1 + u_0 \mathbf{r}_3) \mathbf{P}_i + (f_u t_1 + u_0 t_3) \\ \lambda_i v_i &= (f_v \mathbf{r}_2 + v_0 \mathbf{r}_3) \mathbf{P}_i + (f_v t_2 + v_0 t_3) \\ \lambda_i &= \mathbf{r}_3 \mathbf{P}_i + t_3 \end{aligned} \quad (2)$$

由式 (1), 空间点  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  的矢量, 与其对应像点的关系有

$$\lambda_1 \tilde{\mathbf{m}}_1 - \lambda_2 \tilde{\mathbf{m}}_2 = KR(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \quad (3)$$

将式 (2) 代入式 (1) 和 (3) 消去深度值  $\lambda_i$ , 整理可得

$$\mathbf{r}_3(\mathbf{P}_1 u_1 - \mathbf{P}_2 u_2) + t_3(u_1 - u_2) = (f_u \mathbf{r}_1 + u_0 \mathbf{r}_3)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_3(\mathbf{P}_1 v_1 - \mathbf{P}_2 v_2) + t_3(v_1 - v_2) = (f_v \mathbf{r}_2 + v_0 \mathbf{r}_3)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \quad (5)$$

由非共面点集  $S_1, S_2$  的矢量可构造下述可逆矩阵  $A_x, B_x$  及向量  $\mathbf{C}_x$ .

点集  $S_1$  内的矢量构成可逆矩阵

$$\begin{aligned} A_1 &= [\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_5] \\ B_{u1} &= [\mathbf{P}_1 u_1 - \mathbf{P}_2 u_2, \mathbf{P}_1 u_1 - \mathbf{P}_3 u_3, \mathbf{P}_1 u_1 - \mathbf{P}_5 u_5] \\ B_{v1} &= [\mathbf{P}_1 v_1 - \mathbf{P}_2 v_2, \mathbf{P}_1 v_1 - \mathbf{P}_3 v_3, \mathbf{P}_1 v_1 - \mathbf{P}_5 v_5] \end{aligned}$$

及向量

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{u1} &= [u_1 - u_2, u_1 - u_3, u_1 - u_5] \\ \mathbf{C}_{v1} &= [v_1 - v_2, v_1 - v_3, v_1 - v_5] \end{aligned}$$

点集  $S_2$  内的矢量构成可逆矩阵  $A_2 = [\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_5]$ , 类推  $B_{u2}, B_{v2}$  及向量  $\mathbf{C}_{u2}, \mathbf{C}_{v2}$ .

令

$$\mathbf{F}_1 = f_u \mathbf{r}_1 + u_0 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{F}_2 = f_v \mathbf{r}_2 + v_0 \mathbf{r}_3 \quad (6)$$

则式 (4) 成像关系建立在点集  $S_1, S_2$  内的矢量上, 分别存在以下关系

$$\mathbf{r}_3 B_{u1} + t_3 \mathbf{C}_{u1} = \mathbf{F}_1 A_1, \quad \mathbf{r}_3 B_{u2} + t_3 \mathbf{C}_{u2} = \mathbf{F}_1 A_2 \quad (7)$$

若  $t_3 \neq 0$ , 将式 (7) 中两式化简消去  $\mathbf{F}_1$ , 整理可得

$$\frac{\mathbf{r}_3}{t_3} (B_{u1} A_1^{-1} - B_{u2} A_2^{-1}) = -(\mathbf{C}_{u1} A_1^{-1} - \mathbf{C}_{u2} A_2^{-1}) \quad (8)$$

同理, 式 (5) 成像关系存在

$$\mathbf{r}_3 B_{v1} + t_3 \mathbf{C}_{v1} = \mathbf{F}_2 A_1, \quad \mathbf{r}_3 B_{v2} + t_3 \mathbf{C}_{v2} = \mathbf{F}_2 A_2 \quad (9)$$

若  $t_3 \neq 0$ , 将式 (9) 中两式化简消去  $\mathbf{F}_2$ , 整理可得

$$\frac{\mathbf{r}_3}{t_3} (B_{v1} A_1^{-1} - B_{v2} A_2^{-1}) = -(\mathbf{C}_{v1} A_1^{-1} - \mathbf{C}_{v2} A_2^{-1}) \quad (10)$$

将式 (8) 和 (10) 联立, 建立关于  $\mathbf{r}_3$  的线性方程组

$$M\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (11)$$

其中,  $M = \begin{bmatrix} (B_{u1} A_1^{-1} - B_{u2} A_2^{-1})^T \\ (B_{v1} A_1^{-1} - B_{v2} A_2^{-1})^T \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X} = \mathbf{r}_3^T / t_3$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{C}_{u1} A_1^{-1} - \mathbf{C}_{u2} A_2^{-1})^T \\ -(\mathbf{C}_{v1} A_1^{-1} - \mathbf{C}_{v2} A_2^{-1})^T \end{bmatrix}$ .

至此, 点集  $S_1, S_2$  间的矢量差分建立了  $\mathbf{r}_3^T / t_3$  的约束方程, 其系数矩阵  $M$  的秩及增广矩阵  $[M, \mathbf{b}]$  的秩等于 2. 由线性理论知, 方程的解含有一项齐次项. 在其他点集之间的矢量差分仍可得到如同式 (8) 和 (10) 两个方程, 联立后系数矩阵  $M$  及增广矩阵  $[M, \mathbf{b}]$  的秩等于 4, 那么方程式的解仍含有一项齐次项. 若再增加方程, 秩等于 6, 会含有 3 项齐次项, 更不利于求解方程. 因此只采用一组点集之间的差分矢量求解, 即式 (11) 进行求解.

由广义逆矩阵与线性方程组求解理论, 该线性方程组的解由齐次解及特解两部分构成, 即

$$\frac{\mathbf{r}_3^T}{t_3} = \mathbf{X}_s + \xi \mathbf{X}_g \quad (12)$$

特解  $\mathbf{X}_s = M^+ \mathbf{b}$ , 其中  $M^+$  为系数矩阵  $M$  经过满秩分解, 求得的其伪逆. 齐次解  $\mathbf{X}_g$  为系数矩阵  $M$  的零空间的三维特征向量, 齐次解常数  $\xi$  待进一步确定.

### 2.3 关于 $\xi$ 的约束方程

利用旋转矩阵  $R$  的正交性, 结合式 (12) 重新表达行向量  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  与  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  的关系, 按照如下过程构建  $\xi$  的约束方程. 由式 (7) 得

$$\frac{\mathbf{F}_1}{t_3} = \frac{\mathbf{r}_3}{t_3} B_{u1} A_1^{-1} + \mathbf{C}_{u1} A_1^{-1} \quad (13)$$

将式 (12) 式代入式 (13) 式中计算, 可得  $\mathbf{F}_1 / t_3$  是一个关于  $\xi$  的一次二项式, 简记作

$$\frac{\mathbf{F}_1}{t_3} = \mathbf{a}_1 \xi + \mathbf{a}_0 \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0$  是三维行向量, 又由式 (6), 有  $\frac{\mathbf{F}_1}{t_3} = \frac{f_u}{t_3} \mathbf{r}_1 + u_0 \frac{\mathbf{r}_3}{t_3}$ , 利用  $R$  的正交性, 则向量  $\mathbf{r}_2$  可通过向量  $\mathbf{r}_3 / t_3$  与  $\mathbf{F}_1 / t_3$  又积运算表示, 必得到一个关于  $\xi$  的二次三项式, 为

$$\frac{f_u}{t_3^2} \mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{F}_1}{t_3} \times \frac{\mathbf{r}_3}{t_3} = \mathbf{a}'_2 \xi^2 + \mathbf{a}'_1 \xi + \mathbf{a}'_0 \quad (15)$$

同理, 向量  $\mathbf{r}_1$  可得到关于  $\xi$  的二次三项式

$$\frac{f_v}{t_3^2} \mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{F}_2}{t_3} \times \frac{\mathbf{r}_3}{t_3} = \mathbf{a}''_2 \xi^2 + \mathbf{a}''_1 \xi + \mathbf{a}''_0 \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{a}'_i, \mathbf{a}''_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) 是  $\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_g$  及  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0$  化简运算后的三维行向量.

显然, 向量  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  是由向量  $\mathbf{r}_3$  经过矢量运算导出, 与  $\mathbf{r}_3$  正交是必然的, 故对  $\xi$  无约束作用. 只有式 (15) 和 (16) 的正交关系可建立一个关于  $\xi$  的四次约束方程式

$$\frac{f_u}{t_3^2} \frac{f_v}{t_3^2} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2^T = \sum_{i=0}^4 \mathbf{a}_i^{(3)} \xi^i = 0 \quad (17)$$

其中,  $\mathbf{a}_i^{(3)}$  是由向量  $\mathbf{a}'_i, \mathbf{a}''_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) 得到的三维行向量.

### 2.4 P5P 问题的解析解

采用控制点矢量差分建立了  $\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3/t_3$  的约束方程, 进一步化简为  $\xi$  的四次约束方程, 当式 (17) 系数  $\mathbf{a}_i^{(3)}$  不全为零时, 关于  $\xi$  的方程最多有四个实数解, 求得  $\xi$  后, 如文献 [17] 指出的, 对应最多存在摄像机姿态的旋转矩阵  $R$ , 平移量  $\mathbf{t}$  及内参数  $K$  的 4 组解析解.

#### 1) 确定 $t_3, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$

将式 (17) 的四个实解  $\xi_i$  (若存在) 分别代入式 (12) 中, 得到

$$t_3 = \frac{\pm 1}{|\mathbf{X}_s + \xi_i \mathbf{X}_g|} \quad (18)$$

$$\mathbf{r}_3 = t_3 (\mathbf{X}_s + \xi_i \mathbf{X}_g) \quad (19)$$

将  $\xi_i$  代入式 (15) 和 (16), 并将其模单位化, 可得到  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ .

#### 2) 确定 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, K$

$$\mathbf{F}_1 = t_3 (\mathbf{a}_1 \xi_i + \mathbf{a}_0) \quad (20)$$

同理可得到  $\mathbf{F}_2$ , 将式 (6) 分别与  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  作向量点积, 可以得到内参数矩阵  $K$  各元素为

$$f_u = \mathbf{F}_1 \mathbf{r}_1^T, f_v = \mathbf{F}_2 \mathbf{r}_2^T, u_0 = f_u = \mathbf{F}_1 \mathbf{r}_3^T, v_0 = f_v = \mathbf{F}_2 \mathbf{r}_3^T \quad (21)$$

#### 3) 确定平移矢量 $\mathbf{t}$ 的分量 $t_1, t_2$

对于任一空间点  $\mathbf{P}_i$  及像点  $\mathbf{m}_i$ , 将式 (2) 中的三式化简, 得到  $t_1, t_2$  为

$$t_1 = \frac{(\mathbf{r}_3 \mathbf{P}_i + t_3)(u_i - u_0)}{f_u} - \mathbf{r}_1 \mathbf{P}_i \quad (22)$$

$$t_2 = \frac{(\mathbf{r}_3 \mathbf{P}_i + t_3)(v_i - v_0)}{f_v} - \mathbf{r}_2 \mathbf{P}_i \quad (23)$$

取 5 个控制点计算结果的均值为最后的  $t_1, t_2$ .

#### 4) 关于参数 $t_3$ 符号的确定

所有参数中首先可以确定  $t_3, \mathbf{r}_3$ .  $t_3$  可能为正, 可能为负,  $t_3$  的正负影响  $\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3$  又影响  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ , 又进一步影响  $f_u, f_v$ . 需保证内参数  $K$  的元素  $f_u, f_v > 0$  来确定  $t_3$  的符号. 相应地也就确定了  $\mathbf{r}_3$  的符号. 从上面式子的导出过程分析可知  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, u_0, v_0$  的符号可以唯一确定.

### 2.5 当 $t_3 = 0$ 时 P5P 问题的解析解

当摄像机姿态的平移矢量  $\mathbf{t}$  的第三个分量  $t_3 = 0$  时,  $\mathbf{r}_3$  的约束方程演变为齐次方程组, 求解过程也就简化了, 且摄像机姿态  $R, \mathbf{t}$  及内参数  $K$  有唯一解.

若  $t_3 = 0$ , 将式 (7) 和 (9) 化简, 得

$$M \mathbf{r}_3 = \mathbf{0} \quad (24)$$

则

$$\mathbf{r}_3 = \pm \mathbf{X}_g \quad (25)$$

那么  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_3 B_{u1} A_1^{-1}, \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_3 B_{v1} A_1^{-1}$ , 求得  $\mathbf{r}_3$  与  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  后, 如同上文通过向量积运算求得其他参数, 并且保证内参数  $K$  的元素  $f_u, f_v > 0, \mathbf{r}_3$  只能取正或负一种情况, 相应的所有参数存在唯一解.

## 3 实验结果及分析

### 3.1 可行性分析

采用模拟数据分析验证本算法 VDP5P 求解摄像机姿态  $R, \mathbf{t}$  及内参数  $K$  的可行性、有效性. 在模拟实验中, 图像大小为 480 像素  $\times$  640 像素, 摄像机内参数的理论值设为:  $f_u = 800, f_v = 600, u_0 = 400, v_0 = 280$ , 摄像机姿态旋转阵  $R$ , 用三个旋转角表示  $R = [0.6283, 1.0472, 0.5236]$ , 平移量  $\mathbf{t} = [20.21, -43.57, -77.83]^T$ . 设定空间场景, 在姿态  $R, \mathbf{t}$  下成像, 计算机模拟生成 5 个空间点与对应图像点数据对  $\{\mathbf{P}_i, \mathbf{m}_i\}_{i=1}^5$ .

$P =$

$$\begin{Bmatrix} -1.1699 & -7.0508 & 2.2913 & 7.4454 & -2.3614 \\ 1.6849 & 5.0816 & -9.5950 & -8.9050 & -0.7546 \\ -5.0121 & -4.2092 & -1.4604 & 1.3906 & -3.5857 \end{Bmatrix}$$

$m =$

$$\begin{Bmatrix} 244.2820 & 249.2988 & 212.1885 & 174.2414 & 235.4643 \\ 597.4838 & 612.0665 & 654.3830 & 630.5166 & 623.2501 \end{Bmatrix}$$

将 5 个控制点组成 4 点非共面的点集, 取任意两个点集, 建立约束方程如式 (11), 运用线性理论求其解如式 (12), 进一步根据  $R$  的正交性化简为式 (17), 得到  $\xi$  的四个解, 相应地计算  $R, \mathbf{t}, K$ , 得到四组实数解如表 1 所示.

表 1 P5P 问题的四组解

Table 1 Four solutions of P5P problem

$K$	$R$	$\mathbf{t}$
$\begin{bmatrix} 800 & 0 & 400 \\ 0 & 600 & 280 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.4330 & 0.0363 & 0.9007 \\ 0.2500 & 0.9551 & -0.1587 \\ -0.8660 & 0.2939 & 0.4045 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20.2100 \\ -43.5700 \\ -77.8300 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 638.9481 & 0 & 692.6294 \\ 0 & 686.8879 & 504.0637 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.6566 & -0.2870 & 0.6976 \\ 0.5723 & 0.7919 & -0.2129 \\ -0.4913 & 0.5390 & 0.6842 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 60.1220 \\ -12.4646 \\ -76.9686 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 17.2648 & 0 & 202.9665 \\ 0 & 21.8237 & 657.4271 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.7257 & -0.5221 & -0.4482 \\ 0.0720 & 0.7054 & -0.7051 \\ 0.6843 & 0.4794 & 0.5495 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -10.0305 \\ 6.2801 \\ -1.2281 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 25.945 & 0 & 190.207 \\ 0 & 10.9188 & 648.2654 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.6748 & -0.1883 & -0.7136 \\ -0.2344 & 0.8622 & -0.4492 \\ 0.6998 & 0.4704 & 0.5377 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -7.1037 \\ 6.3622 \\ 0.4976 \end{bmatrix}$

3.2 鲁棒性分析

分析图像点受噪声干扰时算法 VDP5P 的鲁棒性. 对图像点  $m$  加入大小为  $0 \sim 3$  个像素、间隔 0.15 像素的噪声进行实验, 每种噪声水平下随机实验 200 次, 计算每个参数的相对或绝对误差, 取其平均值的统计结果. 摄像机姿态旋转矩阵  $R$  的相对误差  $E_R = |q_{true} - q|/|q_{true}|$  ( $q$  是  $R$  的四元素表示), 平移向量  $t$  的相对误差  $E_R = |t_{true} - t|/|t_{true}|$ .

摄像机姿态  $R$ 、 $t$  对噪声敏感性的分析, 其相对误差分别如图 2(a) 和图 2(b) 所示, 可以看出本文算法 VDP5P 性能优于已标定 PnP 问题 EPnP 算法<sup>[14]</sup>. 与未标定 P5P 问题 WFC 算法<sup>[17]</sup> 相比, 两者都是建立起线性约束方程, 给出解析解, 确定的输入有确定的输出, WFC 点曲线和 VDP5P 圆圈曲线重合为一条线. 未标定 P5P 问题 WFC 与 VDP5P 算法, 标定内参数  $K$  四个元素随噪声的变化曲线如图 2(c) 和图 2(d) 所示, 两种算法所示的四个元素  $f_u, f_v, u_0, v_0$  的绝对误差曲线是重合的. 在求解技术思路, WFC 算法是基于点成像并通过对内参数矩阵变量  $K$  中寻找可以相互表示、相互合并的元素来建立和求解约束方程, 本文 VDP5P 算法是基于矢量差分建立线性约束方程, 利用旋转矩阵  $R$  的正交性、线性理论求解约束方程. 简言之, 本文给出一种新的未标定 P5P 问题的求解思路, 其性能优于已标定的 EPnP 算法.

当存在约束条件  $t_3 = 0$  时, 求解未标定 P5P 问题的 WFC、VDP5P 算法都存在唯一解. 我们进一步分析对比存在约束条件  $t_3 = 0$  对算法性能的影响, 同样以参数  $R$ 、 $t$ 、 $K$  对噪声敏感性来说明, 噪声条件与过程同上, 实验结果如图 3 所示, 图 3(a) 和图 3(b) 是摄像机姿态  $R$ 、 $t$  对噪声的敏感性分析, 三条曲线分别表示: 棱形实线是 EPnP 算法, 实心点线是 WFC 算法没有利用/施加该条件, 圆圈点线是 VDP5P 与利用了该条件的 WFC 算法的相对误差变化曲线. 摄像机内参数  $K$  矩阵各元素随噪声的变化关系如图 3(c) 和图 3(d) 所示, 标记为“o”和“x”的是 WFC 算法没有利用该条件时  $f_u, f_v, u_0, v_0$  绝对误差变化曲线, 标记为“.”和“+”的是 VDP5P 和利用了该条件的 WFC 算法各元素的绝对误差变

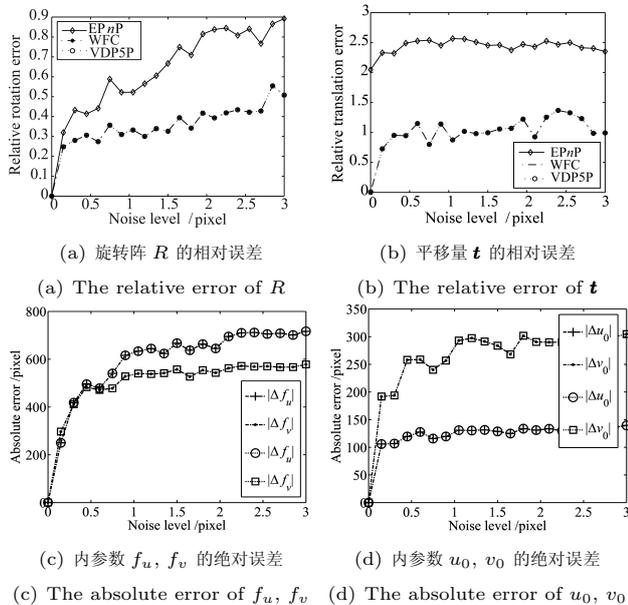


图 2 EPnP, WFC, VDP5P 算法鲁棒性能分析

Fig. 2 Robust performance evaluation of EPnP, WFC, and VDP5P algorithms

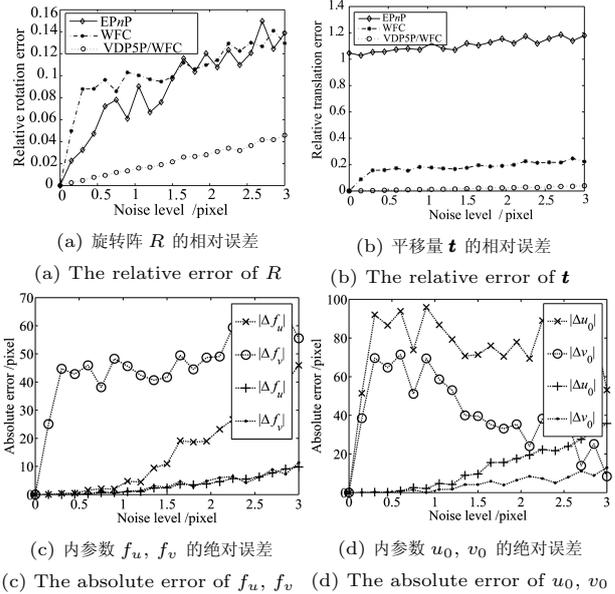


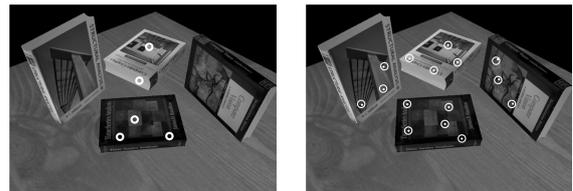
图 3 EPnP, WFC, VDP5P 算法鲁棒性能分析 ( $t_3 = 0$ )

Fig. 3 Robust performance evaluation of EPnP, WFC and VDP5P algorithms ( $t_3 = 0$ )

化曲线. 分析算法过程及对比图 2、图 3 可知, 当存在约束条件  $t_3 = 0$  时性能较优. EPnP 虽没有利用条件, 只要存在这个条件, 性能仍会提高, VDP5P 和利用了该条件的 WFC 算法, 性能提高程度自然会更大. 当满足这个条件时, 建立与求解约束方程, 过程简洁及运算量小, 避免了中间计算造成的误差. 而在实际设定场景, 不一定满足这个条件, 那么可以先按常规步骤计算出平移量, 再通过坐标系平移使得条件成立.

3.3 真实实验

在真实实验中, 数据源于 www.caip.rutgers.edu/riul/robust.html, 计算机生成三维图像, 提供了图像及每个像素点对应的三维空间点. 三维点空间数据是通过深度值与相机参数恢复的. 手工提取 5 个非共面空间点及对应的图像点, 如图 4(a) 所示, 利用第 2 节所描述的算法求解出摄像机姿态  $R$ 、 $t$  及内参数  $K$ . 提取多组图像/空间点数据对, 重复多次计算, 经过 MS 优化<sup>[22]</sup>, 得到优化后的参数  $R$ 、 $t$  及  $K$ . 为了进一步验证与测试 VDP5P 算法的有效性, 运用得到的参数对其他空间点成像, 成像结果如图 4(b) 所示, 圆圈是实际像点, 圆点是用成像参数投影计算出的像点. 由图可看出, 用参数成像的像点与实际像点一致, 说明本算法是可行的、有效的.



(a) 提取的五对点

(a) Five extracted correspondences

(b) 成像点与真实像点

(b) Projected and true image points

图 4 验证与测试 VDP5P 算法有效性的真实实验

Fig. 4 Real experiment for verifying VDP5P algorithm

## 4 结 论

本文对未标定 P5P 问题约束方程的建立与求解进行了研究, 运用矢量差分构建线性约束方程, 给出一种新的解析解. 通过多次实验, 分别与已标定 PnP 问题及未标定 P5P 问题两种算法进行比较, 分析了本算法的可行性和鲁棒性, 用真实数据测试了算法的有效性. 贡献在于: 1) 提出一种基于矢量差分的未标定 P5P 线性求解算法, 采用控制点的矢量差分构造约束方程, 与采用距离信息相比, 方程是一次线性方程, 复杂度低; 2) 从线性理论的角度求解 PnP 问题, 运用  $R$  的正交化简方程并逐步求解出  $R$ 、 $t$ 、 $K$ , 性能优于 EPnP 算法. 若  $t_3 = 0$ , 未标定、已标定 PnP 姿态确定算法的精度会得到提高.

## References

- Pollefeys M, Nister D, Frahm J M, Akbarzadeh A, Mordohai P, Clipp B. Detailed real time urban 3D reconstruction from video. *International Journal of Computer Vision*, 2008, **78**(2-3): 143–167
  - Hartley R, Zisserman A. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. London: Cambridge University Press, 2000
  - Siegl H, Hanheide M, Wrede S, Pinz A. An augmented reality human-computer interface for object localization in a cognitive vision system. *Image and Vision Computing*, 2007, **25**(12): 1895–1903
  - Hayet J B, Lerasle F, Devy M. A visual landmark framework for mobile robot navigation. *Image and Vision Computing*, 2007, **25**(8): 1341–1351
  - Hartley R. In defense of the 8-point algorithm. In: Proceedings of the 5th International Conference on Computer Vision. Cambridge, USA: IEEE, 1995. 1064–1070
  - Arun K S, Huang T S, Blostein S D. Least-squares fitting of two 3-D point sets. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1987, **9**(5): 698–700
  - Umeyama S. Least-squares estimation of transformation parameters between two point patterns. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1991, **13**(4): 376–380
  - Halvorsen K, Soderstrom T, Stokes V, Lanshammar H. Using an extended Kalman filter for rigid body pose estimation. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2005, **127**(3): 475–483
  - Fishler M A, Bolles R C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, 1981, **24**(6): 381–395
  - Gao X S, Hou X R, Tang J L, Cheng H F. Complete solution classification for the perspective-three-point problem. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, **25**(8): 930–943
  - Horand R, Conio B, Leboulloux O, Lacolle B. An analytic solution for the perspective 4-point problem. In: Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Austin, USA: IEEE, 1989. 500–507
  - Quan L, Lan Z D. Linear  $N$ -point camera pose determination. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1999, **21**(8): 774–780
  - Ansar A, Daniilidis K. Linear pose estimation from points or lines. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, **25**(5): 578–589
  - Moreno-Noguer F, Lepetit V, Fua P. Accurate non-iterative on solution to the PnP problem. In: Proceedings of the 11th International Conference on Computer Vision. Janeiro, Brazil: IEEE, 2007. 1–8
  - Bujnak M, Kukulova Z, Pajdla T. A general solution to the P4P problem for camera with unknown focal length. In: Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Anchorage, USA: IEEE, 2008. 1–8
  - Wu Fu-Chao, Hu Zhan-Yi. A linear method for the PnP problem. *Journal of Software*, 2003, **14**(3): 682–688 (吴福朝, 胡占义. PnP 问题的线性求解算法. 软件学报, 2003, **14**(3): 682–688)
  - Wu Fu-Chao, Hu Zhan-Yi. A note on the P5P problem with an uncalibrated camera. *Chinese Journal of Computer*, 2001, **24**(11): 1–6 (吴福朝, 胡占义. 摄像机未标定的 P5P 问题研究. 计算机学报, 2001, **24**(11): 1–6)
  - Guo Yang, Xu Xin-He. An analytic solution for the P5P problem with an un-calibrated camera. *Chinese Journal of Computer*, 2007, **30**(7): 1195–1200 (郭阳, 徐心和. 未标定摄像机 P5P 问题的一种解析解. 计算机学报, 2007, **30**(7): 1195–1200)
  - Tsai R Y. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lens. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1987, **3**(4): 323–344
  - Zhang Z Y. A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, **22**(11): 1330–1334
  - Lu C P, Hager G D, Mjolsness E. Fast and globally convergent pose estimation from video images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, **22**(6): 610–622
  - Tuzel O, Subbarao R, Meer P. Simultaneous multiple 3D motion estimation via mode finding on lie groups. In: Proceedings of the 10th International Conference on Computer Vision. Beijing, China: IEEE, 2005. 18–25
- 许海霞 湖南大学电气与信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为计算机视觉. 本文通信作者. E-mail: xhxia2002@126.com (XU Hai-Xia Ph. D. candidate at the Institute of Electrical and Information Engineering, Hunan University. Her main research interest is computer vision. Corresponding author of this paper.)
- 王耀南 湖南大学电气与信息工程学院教授. 主要研究方向为机器视觉和智能控制. E-mail: yaonan@hnu.cn (WANG Yao-Nan Professor at the Institute of Electrical and Information Engineering, Hunan University. His research interest covers machine vision and intelligent control.)
- 袁小芳 湖南大学电气与信息工程学院博士. 主要研究方向为智能控制和神经网络. E-mail: yuanxiaof@21cn.com (YUAN Xiao-Fang Ph. D. at the Institute of Electrical and Information Engineering, Hunan University. His research interest covers intelligent control and neural networks.)
- 朱 江 湖南大学电气与信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为机器人导航控制. E-mail: jiang126@126.com (ZHU Jiang Ph. D. candidate at the Institute of Electrical and Information Engineering, Hunan University. His main research interest is robot navigation control.)
- 周 维 湘潭大学信息工程学院硕士. 主要研究方向为网络与信息安全. E-mail: bigdaddy2004@126.com (ZHOU Wei Master student at the Institute of Information Engineering, Xiangtan University. His research interest covers network and information security.)