基于增广 Lyapunov 泛函的 Lurie 时滞系统的绝对稳定性

吴 敏[1]　冯智勇[1]　何 勇[1]

摘　要　对 Lurie 时滞系统的绝对稳定性问题进行了研究. 利用增广的 Lyapunov 泛函结合自由权矩阵方法, 得到了系统基于线性矩阵不等式 (LMI) 的时滞相关绝对稳定条件. 数值实例表明本文方法所得结果要优于现有文献中的结果.

关键词　Lurie 时滞系统, 绝对稳定, 时滞相关, 增广 Lyapunov 泛函, 自由权矩阵

中图分类号　TP13

Absolute Stability of Lurie Systems with Time-delay Based on Augmented Lyapunov Functional

WU Min[1]　FENG Zhi-Yong[1]　HE Yong[1]

Abstract　The problem of absolute stability of Lurie systems with time-delay is investigated in this paper. Some delay-dependent stability criteria are obtained and formulated in the form of linear matrix inequalities (LMIs) by using augmented Lyapunov functional combined with the free-weighting matrix approach. Numerical example shows that the results obtained in this paper are better than the existing results.

Key words　Lurie systems with time-delay, absolute stability, delay-dependent, augmented Lyapunov functional, free-weighting matrix

Lurie 系统作为一类非常重要的控制系统, 其绝对稳定性研究已有不少有价值的结论[1−9]. 由于时滞现象大量存在于各种工程、生物和经济等系统中, 其研究具有重要的理论意义与应用价值[10−11]. 时滞常常是导致系统不稳定的一个重要原因,因而 Lurie 时滞系统的绝对稳定性研究得到了广泛关注. Lurie 时滞系统的绝对稳定条件可分为两大类: 时滞相关条件和时滞无关条件. 由于时滞相关条件考虑了系统的时滞信息, 所得结果具有更低的保守性, 因此, Lurie 时滞系统的时滞相关稳定性研究得到了更广泛的关注. 时滞相关稳定性的研究成果大多为通过模型变换及交叉项界定技术得到的系统稳定性充分条件[12]. 近几年来, He 和 Wu 等提出了一种自由权矩阵方法, 这种方法不用模型变换及交叉项界定技术, 对各类时滞系统进行了研究, 得到了一系列具有更低保守性的时滞相关稳定条件[13−14], 这一方法也应用于 Lurie 时滞系统的研究, 取得了一定成果[5]. Han 利用积分不等式

收稿日期 2007-06-06　收修改稿日期 2007-09-20
Received June 6, 2007; in revised form September 20, 2007
国家自然科学基金 (60574014), 国家杰出青年科学基金 (60425310), 新世纪优秀人才支持计划 (NCET-06-0679), 教育部博士点基金 (20050533015), 湖南省杰出青年基金 (08jj1010) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60574014), National Science Fund for Distinguished Young Scholars (60425310), Program for New Century Excellent Talents in University (NCET-06-0679), the Ph. D. Programs Foundation of Ministry of Education of China (20050533015), Hunan Provincial Natural Science Foundation of China (08jj1010)
1. 中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083
1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.01003

方法得到了 Lurie 时滞系统的时滞相关绝对稳定条件, 得到了一些具有较低保守性的结果[6]. 但文献 [5 − 6] 所采用的 Lyapunov 泛函为普通泛函, 具有较大的改进空间. 本文采用增广的 Lyapunov 泛函[15] 结合自由权矩阵方法对 Lurie 时滞系统进行了研究, 得到了具有更低保守性的时滞相关绝对稳定条件, 并将结果推广到具有时变结构不确定性的情形. 数值实例表明了本文方法的有效性和相比已有结果的优越性.

1 系统描述

考虑如下 Lurie 时滞系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{x}(t-h)+D\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)=M\boldsymbol{x}(t)+N\boldsymbol{x}(t-h)\\ \boldsymbol{w}(t)=-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t))\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-h,0]\end{cases}\tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{w}(t)\in\mathbf{R}^m,\boldsymbol{z}(t)\in\mathbf{R}^m$ 分别为系统的状态向量, 输入向量和输出向量; $h>0$ 为系统时滞; $\boldsymbol{\phi}(t)$ 为连续向量值初始函数; A,B,D,M,N 为具有合适维数的常数实矩阵; $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t)):[0,\infty)\times\mathbf{R}^m\rightarrow\mathbf{R}^m$ 为对 t 连续的非线性函数, 对 $\boldsymbol{z}(t)$ 满足李普希兹 (Lipchitz) 条件, $\boldsymbol{\varphi}(t,0)=0$, 且对 $\forall t\geq 0,\forall\boldsymbol{z}(t)\in\mathbf{R}^m$ 满足以下扇形约束

$$[\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t))-K_1\boldsymbol{z}(t)]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t))-K_2\boldsymbol{z}(t)]\leq 0\tag{2}$$

其中, K_1,K_2 为具有合适维数的常数实矩阵, 且 $K=K_2-K_1$ 为对称的正定矩阵. 我们通常说这样的一个非线性函数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t))$ 属于扇形区域 $[K_1,K_2]$.

首先, 引入以下绝对稳定性的定义.

定义 1. 如果对所有属于扇形区域 $[K_1,K_2]$ 的非线性函数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t))$, 系统 (1) 是全局一致渐近稳定的, 则称系统 (1) 在扇形区域 $[K_1,K_2]$ 内绝对稳定.

本文不仅讨论标称系统 (1) 的绝对稳定性, 而且还考虑如下具有时变结构不确定性的系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(A+\Delta A(t))\boldsymbol{x}(t)+(B+\Delta B(t))\boldsymbol{x}(t-h)+D\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)=M\boldsymbol{x}(t)+N\boldsymbol{x}(t-h)\\ \boldsymbol{w}(t)=-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t))\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-h,0]\end{cases}\tag{3}$$

时变结构不确定性具有如下形式

$$[\Delta A(t)\ \Delta B(t)]=LF(t)[E_a\ E_b]\tag{4}$$

这里, L,E_a 和 E_b 是具有合适维数的常数矩阵, 而 $F(t)$ 是具有 Lesbesgue 可测元的不确定矩阵, 且满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leq I,\ \forall t\tag{5}$$

这里, I 表示合适维数的单位矩阵.

文中定理的证明将用到以下引理.

引理 1[16]**.** 给定具有适当维数的矩阵 $Q=Q^{\mathrm{T}},H,E$, 则

$$Q+HF(t)E+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}<0$$

对任意满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leq I$ 的 $F(t)$ 成立的充要条件是存在 $\lambda>0$, 使得

$$Q+\lambda^{-1}HH^{\mathrm{T}}+\lambda E^{\mathrm{T}}E<0$$

2 主要结果

首先考虑非线性函数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t))$ 属于扇形区域 $[0,K]$ 的情形, 即 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t))$ 满足

$$\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t))^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t))-K\boldsymbol{z}(t)]\leq 0\tag{6}$$

有如下结论:

定理 1. 给定标量 $h>0$, 如果存在矩阵 $P_a=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\ *&P_{22}&P_{23}\\ *&*&P_{33}\end{bmatrix}>0$, $Q_a=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\ *&Q_{22}\end{bmatrix}\geq 0$, $Z_a=\begin{bmatrix}Z_{11}&Z_{12}\\ *&Z_{22}\end{bmatrix}\geq 0$ 以及任意合适维数的矩阵 $T_i\,(i=1,2,3)$ 和标量 $\varepsilon>0$, 使得如下线性矩阵不等式 (LMI) 成立

$$\begin{bmatrix}\Phi_{11}&\Phi_{12}&\Phi_{13}&\Phi_{14}&\Phi_{15}&-hT_1&A^{\mathrm{T}}S\\ *&\Phi_{22}&\Phi_{23}&\Phi_{24}&\Phi_{25}&-hT_2&B^{\mathrm{T}}S\\ *&*&\Phi_{33}&0&\Phi_{35}&-hT_3&D^{\mathrm{T}}S\\ *&*&*&\Phi_{44}&\Phi_{45}&0&0\\ *&*&*&*&-hZ_{11}&-hZ_{12}&0\\ *&*&*&*&*&-hZ_{22}&0\\ *&*&*&*&*&*&-S\end{bmatrix}<0\tag{7}$$

则系统 (1) 在扇形区域 $[0,K]$ 内绝对稳定. 其中,

$$\Phi_{11}=GA+A^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}+P_{13}+P_{13}^{\mathrm{T}}+Q_{11}+hZ_{11}+T_1+T_1^{\mathrm{T}}$$
$$\Phi_{12}=GB+A^{\mathrm{T}}P_{12}+P_{23}^{\mathrm{T}}-P_{13}-T_1+T_2^{\mathrm{T}}$$
$$\Phi_{13}=GD-\varepsilon M^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}+T_3^{\mathrm{T}}$$
$$\Phi_{14}=P_{12}$$
$$\Phi_{15}=h(P_{33}+A^{\mathrm{T}}P_{13})$$
$$\Phi_{22}=B^{\mathrm{T}}P_{12}+P_{12}^{\mathrm{T}}B-P_{23}-P_{23}^{\mathrm{T}}-Q_{11}-T_2-T_2^{\mathrm{T}}$$
$$\Phi_{23}=P_{12}^{\mathrm{T}}D-\varepsilon N^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}-T_3^{\mathrm{T}}$$
$$\Phi_{24}=P_{22}-Q_{12}$$
$$\Phi_{25}=h(-P_{33}+B^{\mathrm{T}}P_{13})$$
$$\Phi_{33}=-2\varepsilon I$$
$$\Phi_{35}=hD^{\mathrm{T}}P_{13}$$
$$\Phi_{44}=-Q_{22}$$
$$\Phi_{45}=hP_{23}$$
$$G=P_{11}+Q_{12}+hZ_{12}$$
$$S=Q_{22}+hZ_{22}$$

证明. 由牛顿 – 莱布尼茨公式, 有

$$\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)\tag{8}$$

那么, 对于任意合适维数的矩阵 $T_i\,(i=1,2,3)$, 有

$$\begin{aligned}&2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)T_1+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)T_2+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)T_3]\times\\ &[\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s]=0\end{aligned}\tag{9}$$

由式 (1) 和 (6), 有

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)K[M\boldsymbol{x}(t)+N\boldsymbol{x}(t-h)]\leq 0\tag{10}$$

构造如下形式的 Lyapunov 泛函

$$V(t,\boldsymbol{x}_t)=\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)P_a\boldsymbol{\zeta}_1(t)+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(s)Q_a\boldsymbol{\zeta}_2(s)\mathrm{d}s+\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(s)Z_a\boldsymbol{\zeta}_2(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

这里

$$P_a=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ * & P_{22} & P_{23}\\ * & * & P_{33}\end{bmatrix}>0,\quad Q_a=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ * & Q_{22}\end{bmatrix}\ge 0$$

$$Z_a=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ * & Z_{22}\end{bmatrix}\ge 0$$

为待定矩阵, 且

$$\boldsymbol{\zeta}_1(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-h)\\ \int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\zeta}_2(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)\end{bmatrix}$$

计算 $V(t,\boldsymbol{x}_t)$ 沿系统 (1) 的导数, 并利用式 (9) 和 (10), 对任意标量 $\varepsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}\dot V(t,\boldsymbol{x}_t)=&2\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)P_a\dot{\boldsymbol{\zeta}}_1(t)+\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(t)Q_a\boldsymbol{\zeta}_2(t)-\\&\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(t-h)Q_a\boldsymbol{\zeta}_2(t-h)+h\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(t)Z_a\boldsymbol{\zeta}_2(t)-\\&\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(s)Z_a\boldsymbol{\zeta}_2(s)\mathrm{d}s\le\\&2\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)P_a\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t-h)\\ \boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)\end{bmatrix}+\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(t)(Q_a+hZ_a)\boldsymbol{\zeta}_2(t)-\\&\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(t-h)Q_a\boldsymbol{\zeta}_2(t-h)-\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(s)Z_a\boldsymbol{\zeta}_2(s)\mathrm{d}s+\\&2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)T_1+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)T_2+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)T_3]\times\\&[\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s]-\\&2\varepsilon\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)-2\varepsilon\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)K[M\boldsymbol{x}(t)+N\boldsymbol{x}(t-h)]=\\&\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t,s)\Phi\boldsymbol{\eta}_1(t,s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

这里, $\boldsymbol{\eta}_1(t,s),\Phi$ 的定义见本页下方.

由 Schur 补引理[17], $\Phi<0$ 等价于式 (7), 从而保证当 $\|\,\boldsymbol{x}\,\|\neq 0$ 时 $\dot V(t,\boldsymbol{x}_t)<0$. 由 Lypaunov-Krasovskii 稳定性定理可知, 对扇形区域 $[0,K]$ 中的所有非线性函数 $\boldsymbol{\varphi}(t,z(t))$, 系统 (1) 是全局渐近稳定的. 根据定义 1, 定理得证. □

注 1. 对于定常时滞的 Lurie 系统, 若采用普通的 Lyapunov 泛函, 已经很难获得具有更低保守性的结果. 通过采用增广的 Lyapunov 泛函, 有望获得具有更低保守性的时滞相关绝对稳定准则. 事实上, 我们可以从理论上证明: 定理 1 包含了文献 [6] 中的命题 3. 设式 (7) 中的 $P_{12},P_{13},P_{22},P_{23},P_{33},Q_{12},Z_{12},T_3$ 都为零, $P_{11}=P$, $Q_{11}=Q$, $Q_{22}=\alpha I$, $Z_{11}=\beta I\,(\alpha,\beta$ 为充分小的正数), 则有如下推论.

推论 1. 给定标量 $h>0$, 如果存在矩阵 $P>0$, $Q\ge 0$, $Z_{22}\ge 0$ 以及任意合适维数的矩阵 $T_i\,(i=1,2)$ 和标量 $\varepsilon>0$, 使得如下 LMI 成立

$$\begin{bmatrix}\hat\Phi_{11} & \hat\Phi_{12} & PD-\varepsilon M^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} & -hT_1 & hA^{\mathrm{T}}Z_{22}\\ * & \hat\Phi_{22} & -\varepsilon N^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} & -hT_2 & hB^{\mathrm{T}}Z_{22}\\ * & * & -2\varepsilon I & 0 & hD^{\mathrm{T}}Z_{22}\\ * & * & * & -hZ_{22} & 0\\ * & * & * & * & -hZ_{22}\end{bmatrix}<0 \tag{11}$$

则系统 (1) 在扇形区域 $[0,K]$ 内绝对稳定. 其中

$$\hat\Phi_{11}=A^{\mathrm{T}}P+PA+Q+T_1+T_1^{\mathrm{T}}$$
$$\hat\Phi_{12}=PB-T_1+T_2^{\mathrm{T}}$$
$$\hat\Phi_{22}=-Q-T_2-T_2^{\mathrm{T}}$$

假设矩阵 $R=R^{\mathrm{T}}>0$, 令式 (11) 中的 $T_1=-R$, $T_2=R$ 及 $Z_{22}=hR$, 则有

$$\begin{bmatrix}\bar\Phi_{11} & PB+2R & PD-\varepsilon M^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} & hR & h^2A^{\mathrm{T}}R\\ * & -Q-2R & -\varepsilon N^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} & -hR & h^2B^{\mathrm{T}}R\\ * & * & -2\varepsilon I & 0 & h^2D^{\mathrm{T}}R\\ * & * & * & -h^2R & 0\\ * & * & * & * & -h^2R\end{bmatrix}<0 \tag{12}$$

其中

$$\bar\Phi_{11}=A^{\mathrm{T}}P+PA+Q-2R$$

由 Schur 补, 可知式 (12) 等价于式 (13) (见下页下方).

从上述推导过程中可看出, 文献 [6] 中的命题 3 包含于推论 1 及定理 1 中.

$$\boldsymbol{\eta}_1(t,s)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\ \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\ \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-h)\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\ \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)]^{\mathrm{T}}$$

$$\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_{11}+A^{\mathrm{T}}SA & \Phi_{12}+A^{\mathrm{T}}SB & \Phi_{13}+A^{\mathrm{T}}SD & \Phi_{14} & \Phi_{15} & -hT_1\\ * & \Phi_{22}+B^{\mathrm{T}}SB & \Phi_{23}+B^{\mathrm{T}}SD & \Phi_{24} & \Phi_{25} & -hT_2\\ * & * & \Phi_{33}+D^{\mathrm{T}}SD & 0 & \Phi_{35} & -hT_3\\ * & * & * & \Phi_{44} & \Phi_{45} & 0\\ * & * & * & * & -hZ_{11} & -hZ_{12}\\ * & * & * & * & * & -hZ_{22}\end{bmatrix}$$

对非线性函数在一般的扇形区域 $[K_1, K_2]$ 中的情形, 通过应用反馈环的变换[18], 可得系统 (1) 在扇形区域 $[K_1, K_2]$ 内的绝对稳定性等价于系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A-DK_1M)\boldsymbol{x}(t)+(B-DK_1N)\boldsymbol{x}(t-h)+D\boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) = M\boldsymbol{x}(t) + N\boldsymbol{x}(t-h) \\ \boldsymbol{w}(t) = -\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{z}(t)) \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t),\ t \in [-h, 0] \end{cases} \tag{14}$$

在扇形区域 $[0, K_2 - K_1]$ 内的绝对稳定性. 因此, 由定理 1 可得如下定理.

定理 2. 给定标量 $h > 0$, 如果存在矩阵 $P_a = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ * & P_{22} & P_{23} \\ * & * & P_{33} \end{bmatrix} > 0$, $Q_a = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ * & Q_{22} \end{bmatrix} \geq 0$, $Z_a = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ * & Z_{22} \end{bmatrix} \geq 0$ 以及任意合适维数的矩阵 $T_i\,(i = 1, 2, 3)$ 和标量 $\varepsilon > 0$, 使得如式 (15) (见下页) 的 LMI 成立, 则系统 (1) 在扇形区域 $[K_1, K_2]$ 内绝对稳定. 其中

$$\hat{\Phi}_{11} = G(A - DK_1M) + (A - DK_1M)^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} + P_{13} + P_{13}^{\mathrm{T}} + Q_{11} + hZ_{11} + T_1 + T_1^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\Phi}_{12} = G(B - DK_1N) + (A - DK_1M)^{\mathrm{T}}P_{12} + P_{23}^{\mathrm{T}} - P_{13} - T_1 + T_2^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\Phi}_{13} = GD - \varepsilon M^{\mathrm{T}}(K_2 - K_1)^{\mathrm{T}} + T_3^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\Phi}_{15} = hP_{33} + h(A - DK_1M)^{\mathrm{T}}P_{13}$$

$$\hat{\Phi}_{22} = (B - DK_1N)^{\mathrm{T}}P_{12} + P_{12}^{\mathrm{T}}(B - DK_1N) - P_{23} - P_{23}^{\mathrm{T}} - Q_{11} - T_2 - T_2^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\Phi}_{23} = P_{12}^{\mathrm{T}}D - \varepsilon N^{\mathrm{T}}(K_2 - K_1)^{\mathrm{T}} - T_3^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\Phi}_{25} = -hP_{33} + h(B - DK_1N)^{\mathrm{T}}P_{13}$$

且 $\Phi_{14}, \Phi_{24}, \Phi_{33}, \Phi_{35}, \Phi_{44}, \Phi_{45}$ 同定理 1 中定义.

对于具有时变结构不确定性 (4) 的 Lurie 时滞系统 (3), 用 $A + LF(t)E_a$ 和 $B + LF(t)E_b$ 分别替换式 (15) 中的 A 和 B, 并利用引理 1 及 Schur 补引理, 可得如下定理.

定理 3. 给定标量 $h > 0$, 如果存在矩阵 $P_a = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ * & P_{22} & P_{23} \\ * & * & P_{33} \end{bmatrix} > 0$, $Q_a = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ * & Q_{22} \end{bmatrix} \geq 0$, $Z_a = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ * & Z_{22} \end{bmatrix} \geq 0$ 以及任意合适维数的矩阵 $T_i\,(i = 1, 2, 3)$ 和标量 $\varepsilon > 0, \lambda > 0$, 使得如式 (16) (见下页) 的 LMI 成立, 则具有时变结构不确定性 (4) 的系统 (3) 在扇形区域 $[K_1, K_2]$ 内绝对稳定.

注 2. 与注 1 类似, 可知定理 2 及定理 3 包含了文献 [6] 中的相应结论. 由于本文采用了包含更多信息的增广 Lyapunov 泛函, 更多的 Lyapunov 自由权矩阵的引入, 使得本文所得结果具有更低保守性.

3 数值实例

例 1. 考虑具有如下参数的时变结构不确定性系统 (3) 的鲁棒稳定性

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + Q - R & PB + R & PD - \varepsilon M^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} & hA^{\mathrm{T}}R \\ * & -Q - R & -\varepsilon N^{T}K^{T} & hB^{\mathrm{T}}R \\ * & * & -2\varepsilon I & hD^{\mathrm{T}}R \\ * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11} & \hat{\Phi}_{12} & \hat{\Phi}_{13} & \Phi_{14} & \hat{\Phi}_{15} & -hT_1 & (A - DK_1M)^{\mathrm{T}}S \\ * & \hat{\Phi}_{22} & \hat{\Phi}_{23} & \Phi_{24} & \hat{\Phi}_{25} & -hT_2 & (B - DK_1N)^{\mathrm{T}}S \\ * & * & \Phi_{33} & 0 & \Phi_{35} & -hT_3 & D^{\mathrm{T}}S \\ * & * & * & \Phi_{44} & \Phi_{45} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -hZ_{11} & -hZ_{12} & 0 \\ * & * & * & * & * & -hZ_{22} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -S \end{bmatrix} < 0 \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11} & \hat{\Phi}_{12} & \hat{\Phi}_{13} & \Phi_{14} & \hat{\Phi}_{15} & -hT_1 & (A - DK_1M)^{\mathrm{T}}S & GL & \lambda E_a^{\mathrm{T}} \\ * & \hat{\Phi}_{22} & \hat{\Phi}_{23} & \Phi_{24} & \hat{\Phi}_{25} & -hT_2 & (B - DK_1N)^{\mathrm{T}}S & P_{12}^{\mathrm{T}}L & \lambda E_b^{\mathrm{T}} \\ * & * & \Phi_{33} & 0 & \Phi_{35} & -hT_3 & D^{\mathrm{T}}S & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & \Phi_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -hZ_{11} & -hZ_{12} & 0 & hP_{13}^{\mathrm{T}}L & 0 \\ * & * & * & * & * & -hZ_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -S & SL & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\lambda I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \tag{16}$$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}-0.2\\ -0.3\end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix}0.6 & 0.8\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix},\quad K_1=0.2, K_2=0.5$$

$$L=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix},\quad \alpha\geq 0,\quad E_a=E_b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

利用定理 3 及文献 [6] 的结论, 计算出保证系统 (3) 绝对稳定的最大允许时滞, 列在表 1 中. 可看出定理 3 比文献 [6] 中的相关结论具有更低保守性.

表 1　保证系统 (3) 绝对稳定的最大允许时滞 $h_{\max}$

Table 1　Maximum allowed time-delay bound of $h_{\max}$ for the absolute stability of system (3)

α	0.00	0.05	0.10	0.15
文献 [6] 结论	2.4859	2.2396	2.0243	1.8363
定理 3	2.5049	2.2647	2.0532	1.8666

4　结论

本文对一类 Lurie 时滞系统的绝对稳定性问题进行了研究, 通过采用增广 Lyapunov 泛函结合自由权矩阵方法得到了系统的时滞相关绝对稳定条件, 并将结果推广到具有时变结构不确定性的情形. 所得时滞相关稳定条件比已有结果具有更低保守性, 数值实例表明了本文方法的有效性和优越性.

References

1 Popov V M. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Automation and Remote Control*, 1962, **22**(8): 857−875

2 Gan Z, Ge W. Lyapunov functional for multiple delay general Lurie control systems with multiple nonlinearities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **259**(2): 596−608

3 Yu Li. On the absolute stability of a class of time-delay systems. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(5): 780−784
(俞立. 一类时滞系统的绝对稳定性问题研究. 自动化学报, 2003, **29**(5): 780−784)

4 Yang Bin, Wang Jin-Cheng. Delay-dependent criterion for absolute stability of neutral general Lurie systems. *Acta Automatica Sinica* , 2004, **30**(2): 261−264
(杨斌, 王金城. 中立型一般 Lurie 系统绝对稳定的时滞相关准则. 自动化学报, 2004, **30**(2): 261−264)

5 He Yong, Wu Min. Delay-dependent conditions for absolute stability of Lurie control systems with time-varying delay. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(3): 475−478
(何勇, 吴敏. 具有时变时滞的 Lurie 系统绝对稳定性的时滞相关条件. 自动化学报, 2005, **31**(3): 475−478)

6 Han Q L. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity. *Automatica*, 2005, **41**(12): 2171−2176

7 Liao X X, Yu P. Sufficient and necessary conditions for absolute stability of time-delayed Lurie control systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, **323**(2): 876−890

8 Lu Ren-Quan, Wang Jun-Hong, Xue An-Ke, Su Hong-Ye, Chu Jian. Robust H_∞ filtering for a class of uncertain Lurie time-delay singular systems. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(3): 292−296
(鲁仁全, 王俊宏, 薛安克, 苏宏业, 褚健. 一类不确定 Lurie 时滞奇异系统的鲁棒 H_∞ 滤波. 自动化学报, 2007, **33**(3): 292−296)

9 Tian J K, Zhong S M, Xiong L L. Delay-dependent absolute stability of Lurie control systems with multiple time-delays. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **188**(1): 379−384

10 Hale J K, Verduyn L S M. *Introduction to Functional Differential Equations (Applied Mathematical Sciences)*. New York: Springer-Verlag, 1993

11 Gu K Q, Kharitonov V L, Chen J. *Stability of Time-delay Systems (Control Engineering)*. New York: Birkhäuser Boston, 2003

12 Fridman E, Shaked U. Delay-dependent stability and H_∞ control: constant and time-varying delays. *International Journal of Control*, 2003, **76**(1): 48−60

13 He Y, Wu M, She J H, Liu G P. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays. *Systems and Control Letters*, 2004, **51**(1): 57−65

14 Wu Min, He Yong, She Jin-Hua. Delay-dependent robust stability and stabilization criteria for uncertain neutral systems. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(4): 578−583
(吴敏, 何勇, 佘锦华. 不确定中立型系统鲁棒稳定及镇定的时滞相关准则. 自动化学报, 2005, **31**(4): 578−583)

15 He Y, Wang Q G, Lin C, Wu M. Augmented Lyapunov functional and delay-dependent stability criteria for neutral systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2005, **15**(8): 923−933

16 Petersen I R, Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica*, 1986, **22**(4): 397−412

17 Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequality in System and Control Theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994

18 Khalil H K. *Nonlinear Systems*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996

吴　敏　中南大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为鲁棒控制、智能控制和过程控制. E-mail: min@csu.edu.cn
(**WU Min**　Professor at the School of Information Science and Engineering, Central South University. His research interest covers the robust control and its applications, intelligent control, and process control.)

冯智勇　中南大学信息科学与工程学院硕士研究生. 主要研究方向为时滞系统鲁棒控制. E-mail: fengge81@gmail.com
(**FENG Zhi-Yong**　Master student at the School of Information Science and Engineering, Central South University. His main research interest is robust control of time-delay systems.)

何　勇　中南大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为时滞控制系统和鲁棒控制. 本文通信作者. E-mail: heyong08@yahoo.com.cn
(**HE Yong**　Professor at the School of Information Science and Engineering, Central South University. His research interest covers time-delay systems and robust control. Corresponding author of this paper.)