

输入采用广义梯形隶属函数的两维最简模糊控制器结构分析

王宁¹ 孟宪尧²

摘要 总结了应用最为广泛的三角形和梯形隶属函数的共同特点, 明确定义了一种将以上两种隶属函数作为特例的广义梯形 (Generalized trapezoid-shaped, GTS) 隶属函数, 推导了输入变量采用 GTS 隶属函数的 I 类和 II 类两维最简模糊控制器的解析式. 基于此, 深入研究了模糊控制器的解析结构, 并证明了这两类模糊控制器等价于一种变结构的非线性 (或线性) PI 控制器与相应的非线性 (或定常) 控制偏置之和, 并且在输入论域上是单调递增、连续且有界的. 最后, 将该类控制器应用于倒立摆控制系统, 通过仿真证明了其有效性, 同时揭示了此类控制器是一种更一般化的模糊控制器.

关键词 模糊控制, 广义梯形, 隶属函数, 结构分析
中图分类号 TP273.4

Structure Analysis of Two-dimensional Simplest Fuzzy Controllers Using Generalized Trapezoid-shaped Input Membership Function

WANG Ning¹ MENG Xian-Yao²

Abstract Being more universal than triangular and trapezoid membership functions, the generalized trapezoid-shaped (GTS) membership function of input variables of fuzzy controllers is well defined on the basis of distilling the commonness of triangular and trapezoid membership functions. Based on obtaining the explicit analytical expressions of the type I and type II two-dimensional simplest fuzzy controllers, analytical structures of fuzzy controllers are deeply researched. It is proved that these two types of fuzzy controllers are equivalent to the variable structural combinations of nonlinear (or linear) PI controller and nonlinear (or constant) control offset. Moreover, the outputs of these fuzzy controllers are monotonically increasing, continuous, and bounded with regard to the corresponding universe of discourse. Finally, the fuzzy controller is applied to an inverted pendulum control system, of which the simulation demonstrates its effectiveness and better universality.

Key words Fuzzy control, generalized trapezoid-shaped, membership function, structure analysis

在模糊控制发展初期, 大多数学者致力于模糊控制的应用研究, 并在很多领域上取得了优于传统控制的成果. 与之相比, 模糊控制的系统分析和理论研究却显得较为滞后. 为坚实模糊控制理论基础, 一些学者试图建立模糊控制与传统控制理论之间的关系, 并从理论解析的角度, 用成熟的经典系统理论从不同的侧面阐明模糊控制器的内部结构和工作机理. 对模糊控制器解析结构的分析研究已成为模糊控制理论研究的一个热点方向, 在过去的短短十几年的时间里, 取得了一些颇具代表性的成果^[1-9].

本文总结了工程实践中广泛应用的三角形和梯形隶属函数的共同特点, 明确定义了一种将以上两种隶属函数作为特例的广义梯形 (Generalized

trapezoid-shaped, GTS) 隶属函数, 并深入研究了输入变量采用 GTS 隶属函数的两类最简 Mamdani 模糊控制器的结构, 推导出了 I 类和 II 类模糊控制器的解析式. 在此基础上, 对这两类模糊控制器进行了结构分析, 证明了这两类模糊控制器等价于一种变结构的非线性 (或线性) PI 控制器与相应的非线性 (或定常) 控制偏置之和, 并且在输入论域上是单调递增、连续且有界的. 最后, 将该类控制器应用于倒立摆控制系统, 通过仿真验证其有效性.

1 广义梯形隶属函数

定义 1. GTS 函数, GTS 模糊集和隶属函数: 设 $[a, c] \subset U \subset \mathbf{R}$, GTS 函数是在 U 上由式 (1) 定义的非负连续实函数. 其中, $a \leq b \leq c$ 且 $a < c$, $0 \leq r_1 \leq (b-a)/2$, $0 \leq r_2 \leq (c-b)/2$; $I_k(x) \geq 0, k = 1, 2, 3$, 分别在其定义域上为单调递增的线性函数, $D_k(x) \geq 0, k = 1, 2, 3$, 分别在其定义域上为单调递减的线性函数, 如图 1 所示. 我们称 $I_2(x)$ 为严格上升函数, $D_2(x)$ 为严格下降函数; $I_1(x)$ 和 $I_3(x)$ 为一般上升函数, 取其斜率为 $0 \leq sl_1 \leq h/(b$

收稿日期 2006-11-23 收修改稿日期 2007-06-20
Received November 23, 2006; in revised form June 20, 2007
交通部基金项目 (2003-325-225-03) 资助
Supported by Ministry of Communications Foundation of China (2003-325-225-03)
1. 大连海事大学轮机工程学院 大连 116026 2. 大连海事大学自动化与电气工程学院 大连 116026
1. Marine Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026 2. School of Electrical Engineering and Automation, Dalian Maritime University, Dalian 116026
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00466

-a); $D_1(x)$ 和 $D_3(x)$ 为一般下降函数, 取其斜率为 $h/(b - c) \leq sl_2 \leq 0$. 如果模糊集 A_i 的隶属函数是 GTS 函数 $A_i(x) = A_i(x; a_i, b_i, c_i, r_{1,i}, sl_{1,i}, r_{2,i}, sl_{2,i}, h_i; I_{k,i}, D_{k,i})$, 则称 A_i 为 GTS 模糊集, 称它的隶属函数为 GTS 隶属函数.

$$A(x; a, b, c, r_1, sl_1, r_2, sl_2) = \begin{cases} I_1(x), & x \in [a, a + r_1) \\ I_2(x), & x \in [a + r_1, b - r_1) \\ I_3(x), & x \in (b - r_1, b) \\ h, & x = b \\ D_1(x), & x \in (b, b + r_2) \\ D_2(x), & x \in [b + r_2, c - r_2) \\ D_3(x), & x \in (c - r_2, c] \\ 0, & x \notin [a, c] \end{cases} \quad (1)$$

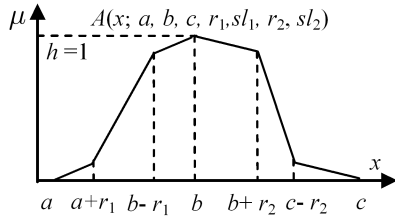


图 1 广义梯形函数

Fig. 1 The sketch of GTS function

注 1. 当 $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, sl_1 = 0$ 且 $sl_2 = 0$ 时, GTS 函数为梯形函数; 当 $sl_1 = h/(b - a)$ 且 $sl_2 = h/(b - c)$, 或 $r_1 = 0$ 且 $r_2 = 0$ 时, GTS 函数为三角形函数.

定义 2. 称 GTS 模糊集 A 是左 GTS 模糊集, 如果 $A(x)$ 满足 $c - b = 0$; 称 GTS 模糊集 A 是右 GTS 模糊集, 如果 $A(x)$ 满足 $b - a = 0$. 此时, $A(x)$ 简记为 $A(x; a, b, h, r_1, sl_1; I_k)$ 或 $A(x; b, c, h, r_2, sl_2; D_k)$.

定义 3. 称 GTS 模糊集 A 是正则 (Normal) 的, 如果 $A(x)$ 满足 $h = 1$, 此时 $A(x)$ 可简记为 $A(x; a, b, c, r_1, sl_1, r_2, sl_2; I_k, D_k)$.

定义 4. 称 GTS 模糊集组 $A_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 在论域 U 上是完备 (Complete) 的, 如果 $x_0 \in U, \exists A_s$ 使得 $A_s(x_0) > 0$, 其中 $s \in \{1, 2, \dots, N\}$.

定义 5. 称 GTS 模糊集组 $A_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 在论域 U 上是双交叠 (Dual-overlapped) 的, 如果对 $s \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$, 使得 $A_s(x)$ 和 $A_{s+1}(x)$ 满足

$$b_s = a_{s+1}, c_s = b_{s+1}, a_1 = b_1, b_N = c_N, r_{2,s} = r_{1,s+1} \quad (2)$$

定义 6. 称 GTS 模糊集组 $\{A_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ 为论域 U 的一个 I 类 GTS 模糊分划, 如果模糊集组 A_i 满足定义 1 ~ 5.

定理 1. 满足 I 类 GTS 模糊分划的模糊集组 A_i 在论域 U 上是完备双交叠的.

证明. 由定义 1 ~ 5 可直接得证. □

定义 7. 称 GTS 模糊集组 A_i 在论域 U 上是一致 (Consistent) 的, 若 $\forall x_0 \in U$, 满足 $\sum_{i=1}^n (A_i(x_0)) = 1$.

定义 8. 称 GTS 模糊集组 $\{A_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ 为论域 U 的一个 II 类 GTS 模糊分划, 如果模糊集组 A_i 满足定义 6 和 7.

定理 2. 满足 II 类 GTS 模糊分划的模糊集组 $\{A_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ 在论域 U 上是完备双交叠的, 并且对 $\forall s \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$, $A_s(x)$ 和 $A_{s+1}(x)$ 必满足 $sl_{2,s} = -sl_{1,s+1}$.

证明. 由定义 6 和定理 1 可知, 模糊集组 $\{A_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ 在论域 U 上是完备双交叠的. 并且对 $\forall s \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$, $A_s(x)$ 和 $A_{s+1}(x)$ 必满足式 (2). 由定义 7, 对 $\forall x_0 \in U, A_i(x_0) = A_s(x_0) + A_{s+1}(x_0) = D_{k,s}(x_0) + I_{k,s+1}(x_0) = 1, k = 1, 2, 3$. 由于 $D_{k,s}(x), I_{k,s+1}(x)$ 均为线性函数, 其斜率 $sl_{2,s}$ 和 $sl_{1,s+1}$ 必满足 $sl_{2,s} = -sl_{1,s+1}$. □

显然, II 类 GTS 模糊分划是 I 类 GTS 模糊分划的一种退化. 其存在意义在于, II 类 GTS 模糊分划可简化模糊控制器解模糊过程的计算, 降低计算复杂度, 便于工程应用.

2 Mamdani 最简模糊控制器

研究单输入单输出被控对象, 输入为 $\Delta u^*(nT)$, 输出为 $y(nT)$, 期望输出为 $y_d(nT)$, T 为采样周期. 模糊控制器的输入为误差 $e^*(nT)$, 误差变化率 $v^*(nT)$, 即 $e^*(nT) = y_d(nT) - y(nT), v^*(nT) = e^*(nT) - e^*(nT - T), u(nT) = u(nT - T) + \Delta u^*(nT)$, 引入比例因子 G_e, G_v, G_u , 使模糊控制器输入输出变量正规化, 简记为

$$e = G_e \cdot e^*, v = G_v \cdot v^*, \Delta u^* = G_u \cdot \Delta u \quad (3)$$

控制器输入为误差 e 和误差变化率 v , 输出为控制增量 u , 在论域 E 和 V 上分别采用由式 (4) ~ (7) 定义的 GTS 隶属函数 $x.p(x)$ 和 $x.n(x)$ 进行模糊分划, 如图 2 所示. 输出隶属函数为单点模糊集. 输入论域采用 I 类 GTS 和 II 类 GTS 模糊分划的控制器, 分别称其为 I 类和 II 类模糊控制器. 其中, $e \in E, v \in V$ 为模糊控制器的输入变量, $\Delta u \in U$ 为模糊控制器的输出变量.

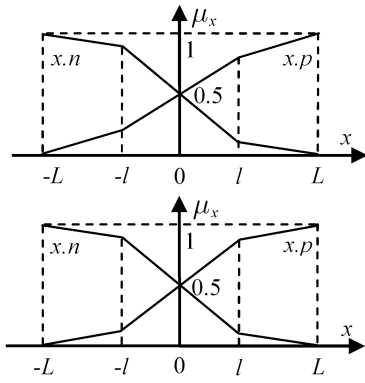


图 2 I 类与 II 类 GTS 输入隶属函数

Fig. 2 GTS input membership functions of type I and type II

$$x.p(x) = \begin{cases} I_1(x), & x \in [-L, -l] \\ I_2(x), & x \in [-l, l] \\ I_3(x), & x \in (l, L] \\ 0, & x \notin [-L, L] \end{cases} \quad (4)$$

$$x.n(x) = \begin{cases} D_1(x), & x \in [-L, -l] \\ D_2(x), & x \in [-l, l] \\ D_3(x), & x \in (l, L] \\ 0, & x \notin [-L, L] \end{cases} \quad (5)$$

其中, $x \in \{e, v\}$,

$$\begin{cases} I_1(x) = sl_1(x + L), & x \in [-L, -l] \\ I_2(x) = ((1 - 2sl_1(L - l))x + l)/(2l), & x \in [-l, l] \\ I_3(x) = 1 - sl_1(L - x), & x \in (l, L] \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} D_1(x) = 1 + sl_2(x + L), & x \in [-L, -l] \\ D_2(x) = (l - (1 + 2sl_2(L - l))x)/(2l), & x \in [-l, l] \\ D_3(x) = -sl_2(L - x), & x \in (l, L] \end{cases} \quad (7)$$

采用单点模糊化、乘积推理、重心解模糊和线性规则^[1], 模糊控制器的输出为

$$\Delta u = \frac{\sum_{i=1}^n w_i h_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \begin{cases} w_1 = e.p(e) \times v.p(v) \\ w_2 = e.p(e) \times v.n(v) \\ w_3 = e.n(e) \times v.p(v) \\ w_4 = e.n(e) \times v.n(v) \end{cases} \quad (8)$$

其中, h_i 为输出模糊集的峰点 $h_1 = -H, h_2 = h_3 = 0, h_4 = H$, w_i 为第 i 条规则的激活度. 令

$$S(x) = x.p(x) + x.n(x) \quad (9)$$

引理 1. I 类模糊控制器的解模糊输出为

$$\Delta u_{k_1, k_2}^* = G_u H \left(-D_{k_1}(e)/S_{k_1}(e) + I_{k_2}(v)/S_{k_2}(v) \right) \quad (10)$$

其中, $k_1 = 1, 2, 3, k_2 = 1, 2, 3$,

$$S_k(x) = I_k(x) + D_k(x), \quad x \in \{e, v\}, k = 1, 2, 3 \quad (11)$$

证明. 由式 (3) ~ (9), 直接推导可得. \square

定理 3. I 类模糊控制器等价于一种变结构的非线性 PI 控制器与相应的非线性变控制偏置之和, 在每个结构中, 比例系数都是误差变化率 v 的非线性函数, 积分系数都是误差 e 的非线性函数, 控制偏置都是误差 e 和误差变化率 v 的非线性函数; II 类模糊控制器等价于变结构的线性 PI 控制器与相应的控制偏置之和, 在每个结构中, 比例系数、积分系数和控制偏置均为常量.

证明. GTS 隶属函数将输入空间划分为 9 个子空间 (IC1 ~ IC9), 每个子空间对应一个输入变量取值范围的组合, 如输入子空间 IC1 表示 $e \in [-L, -l), v \in [-L, -l)$, 如图 3 所示.

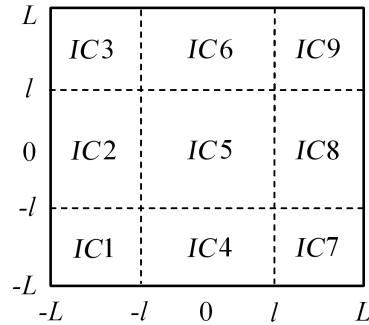


图 3 输入空间划分

Fig. 3 Response partition of input space

由引理 1 及式 (6)、(7) 可得 I 类模糊控制器的清晰表达式

$$\Delta u_m^* = K_{p_m}^I(v)v + K_{i_m}^I(e)e + Offset_m^I(e, v) \quad (12)$$

由定理 2 可知, 当 $sl_1 = -sl_2 = sl$ 时, 得到 II 类模糊控制器的清晰表达式

$$\Delta u_m^* = K_{p_m}^{II}v + K_{i_m}^{II}e + Offset_m^{II} \quad (13)$$

其中, $m = 3(k_1 - 1) + k_2, k_1 = 1, 2, 3, k_2 = 1, 2, 3$; $K_p, K_i, Offset$ 如表 1、表 2 所示, 其中

$$K = G_u H \quad (14)$$

表 1 I 类模糊控制器的比例增益、积分增益和控制偏置

Table 1 Proportion gains, integral gains, and control offsets of type I fuzzy controller

<i>ICs</i>	K_p^I	K_i^I	<i>Offset</i> ^I
<i>IC1</i>	$Ksl_1/S_1(v)$	$K(-sl_2)/S_1(e)$	$K[sl_1L/S_1(v) - (1 + sl_2L)/S_1(e)]$
<i>IC2</i>	$K(1 - 2sl_1(L - l))/(2lS_2(v))$	$K(-sl_2)/S_1(e)$	$K[1/(2S_2(v)) - (1 + sl_2L)/S_1(e)]$
<i>IC3</i>	$Ksl_1/S_3(v)$	$K(-sl_2)/S_1(e)$	$K[(1 - sl_1L)/S_3(v) - (1 + sl_2L)/S_1(e)]$
<i>IC4</i>	$Ksl_1/S_1(v)$	$K(1 + 2sl_2(L - l))/(2lS_2(v))$	$K[sl_1L/S_1(v) - 1/(2S_2(e))]$
<i>IC5</i>	$K(1 - 2sl_1(L - l))/(2lS_2(v))$	$K(1 + 2sl_2(L - l))/(2lS_2(v))$	$K[1/(2S_2(v)) - 1/(2S_2(e))]$
<i>IC6</i>	$Ksl_1/S_3(v)$	$K(1 + 2sl_2(L - l))/(2lS_2(v))$	$K[(1 - sl_1L)/S_3(v) - 1/(2S_2(e))]$
<i>IC7</i>	$Ksl_1/S_1(v)$	$K(-sl_2)/S_3(e)$	$K[sl_1L/S_1(v) + sl_2L/S_3(e)]$
<i>IC8</i>	$K(1 - 2sl_1(L - l))/(2lS_2(v))$	$K(-sl_2)/S_3(e)$	$K[1/(2S_2(v)) + sl_2L/S_3(e)]$
<i>IC9</i>	$Ksl_1/S_3(v)$	$K(-sl_2)/S_3(e)$	$K[(1 - sl_1L)/S_3(v) + sl_2L/S_3(e)]$

表 2 II 类模糊控制器的比例增益、积分增益和控制偏置

Table 2 Proportion gains, integral gains, and control offsets of type II fuzzy controller

<i>ICs</i>	K_p^{II}	K_i^{II}	<i>Offset</i> ^{II}
<i>IC1</i>	Ksl	Ksl	$K(2slL - 1)$
<i>IC2</i>	$K(1 - 2sl(L - l))/(2l)$	Ksl	$K(2slL - 1)/2$
<i>IC3</i>	Ksl	Ksl	0
<i>IC4</i>	Ksl	$K(1 - 2sl(L - l))/(2l)$	$K(2slL - 1)/2$
<i>IC5</i>	$K(1 - 2sl(L - l))/(2l)$	$K(1 - 2sl(L - l))/(2l)$	0
<i>IC6</i>	Ksl	$K(1 - 2sl(L - l))/(2l)$	$K(1 - 2slL)/2$
<i>IC7</i>	Ksl	Ksl	0
<i>IC8</i>	$K(1 - 2sl(L - l))/(2l)$	Ksl	$K(1 - 2slL)/2$
<i>IC9</i>	Ksl	Ksl	$K(1 - 2slL)$

由表 1、表 2 易知, I 类模糊控制器的比例增益随误差变化率 v 的变化而变化, 积分系数随误差 e 的变化而变化, 控制偏置同时随误差 e 和误差变化率 v 的变化而变化. 此时, $K_p, K_i, Offset$ 在每个输入子空间都是输入变量的非线性函数, 而在不同的输入子空间内, 这种函数关系也是不同的, 因此这是一种变结构的非线性 PI 控制器加非线性变控制偏置的控制策略; II 类模糊控制器的变增益比例系数, 积分系数和变控制偏置即 $K_p, K_i, Offset$ 在每个输入子空间都是常量, 但在不同的输入子空间是变化的, 因此这是一种变结构的线性 PI 控制器加控制偏置的控制策略. □

推论 1. 当 $sl_1 = -sl_2 = 0$ 时, I 类模糊控制器转化为输入采用梯形模糊集的最简模糊控制器, 其等价于变结构的线性 PI (P 或 I) 控制器与饱和控制输出的组合. 梯形隶属函数的水平段导致模糊控制器输出饱和, 对输入变化失去调控作用, 从而恶化了控制品质.

推论 2. 当 $sl_1 = -sl_2 = 1/(2L)$ 时, I 类模糊控制器转化为输入采用三角形模糊集的最简模糊控制器, 其等价于线性 PI 控制器. 这是一种比较粗糙

的最简模糊控制器, 需增加对输入论域的模糊划分方可达到理想的控制效果.

注 2. 本文所得推论 1 和推论 2 是定理 3 的两个特例, 文献 [1, 3, 5 - 7] 中也得到了相同或类似的结论, 可见 I 类和 II 类模糊控制器是更为一般化的最简模糊控制器, 引入了新的参数 l 和 sl , 通过对 l 和 sl 的合理选取和调整以追求更为理想的控制效果. GTS 隶属函数的引入进一步总结和完善了输入隶属函数的定义, 使得对隶属函数的选取更加灵活有效. 从定理 3 的证明过程不难看出, GTS 隶属函数对输入空间的划分更为精细, 在相同数目模糊集的情况下, 一方面, 增加了模糊控制器的复杂度; 但另一方面, GTS 模糊集对输入空间更为细致的划分, 使得仅 4 条规则即可将输入空间划分为 9 个子区域, 对于三角形、梯形以及其他一些类似形状的模糊集, 往往需要 9 条规则. 基于此, 不难得出结论: 在相同规则数目的前提下, 输入采用 GTS 隶属函数的 I 类和 II 类模糊控制器控制效果更为理想, 但不可避免地增加了控制器的复杂度; 在相同性能指标的前提下, 模糊控制器所需的 GTS 模糊集数目要小于其他形状的模糊集数目, 规则数目大大降低, 从而在一定

程度上解决了“规则爆炸”问题。

定理 4. I 类模糊控制器和 II 类模糊控制器在其输入论域上是单调递增、连续且有界的。

证明. 由表 1 可知, 最复杂的输入子空间 IC_5 内 I 类模糊控制器的清晰表达式为

$$\Delta u_5^* = K \left(\frac{1 - 2sl_1(L-l)}{2lS_2(v)} v + \frac{1 + 2sl_2(L-l)}{2lS_2(e)} e + \left(\frac{1}{2S_2(v)} - \frac{1}{2S_2(e)} \right) \right) \quad (15)$$

由式 (15) 可知, 由于 $S_k(x) > 0$, 即 $S_2(e) > 0$, $S_2(v) > 0$, 没有奇点与间断点, 故 Δu_5^* 在其输入论域上是连续的. 分别求其对 e 和 v 的偏导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta u_5^*}{\partial e} &= \\ \partial \left(K \frac{1 + 2sl_2(L-l)}{2lS_2(e)} e - K \frac{1}{2S_2(e)} \right) / \partial e &= \\ K \left(\frac{\partial((1 + 2sl_2(L-l))e - l)}{\partial e} \right) / (2lS_2(e)) - & \\ \frac{K \left(\frac{\partial(2lS_2(e))}{\partial e} ((1 + 2sl_2(L-l))e - l) \right)}{(2lS_2(e))^2} &= \\ K \cdot 2l(1 + (sl_2 - sl_1)(L-l)) / (2lS_2(e))^2 & \end{aligned}$$

由定义 1 可知, $0 \leq sl_1 \leq 1/(2L)$, $-1/(2L) \leq sl_2 \leq 0$, 从而有 $-1/L \leq sl_2 - sl_1 \leq 0$, 因此

$$\frac{K}{(2lS_2(e))^2} \leq K \frac{2l(1 + (sl_2 - sl_1)(L-l))}{(2lS_2(e))^2} \leq \frac{K}{(2lS_2(e))^2} \quad (16)$$

由于 $S_2(e) > 0$, 所以 $\partial(\Delta u_5^*)/\partial e > 0$. 类似地, 可得 $\partial(\Delta u_5^*)/\partial v > 0$. 所以 Δu_5^* 在其输入论域上是单调递增、连续且有界的。

同理, 可证明在其他输入子空间内, I 类模糊控制器的输出在相应的输入论域上是单调递增、连续且有界的。

由 GTS 隶属函数的连续性可知, 在相邻输入子空间的交界处两个不同函数的取值是一致的, 各输入子空间之间的输出也是连续的, 所以在整个输入空间 $[-L, L] \times [-L, L]$ 上, I 类模糊控制器的输出是单调递增、连续且有界的. 我们可求得其边界为

$$\Delta u_{\min}^* = \Delta u^*(-L, -L) = \Delta u_1^*(-L, -L) = -K \quad (17)$$

$$\Delta u_{\max}^* = \Delta u^*(L, L) = \Delta u_9^*(L, L) = K \quad (18)$$

当 $sl_1 = -sl_2 = sl$ 时, II 类模糊控制器是 I 类模糊控制器的一个特例. 因此, II 类模糊控制器的输出也是单调递增、连续且有界的. \square

从实际应用的角度, II 类模糊控制器采用一致模糊划分, 简化了解模糊输出的计算过程, 并且与 I 类模糊控制器的控制曲面相比, 差异甚微. 因此, 对

II 类模糊控制器的结构分析更具实际价值. 依据表 1 和定理 4, 着重给出 II 类模糊控制器的一些特性.

性质 1. II 类模糊控制器是分段线性 PI 控制器和控制偏置之和, 在平衡点处比例和积分增益同时取得最大值, 使模糊控制器在平衡点附近具有较高的灵敏度, 从而提高控制品质.

性质 2. II 类模糊控制器的比例增益关于 e 轴对称, 积分增益关于 v 轴对称, 控制偏置关于平衡点对称; 在关于 $e + v = 0$ 对称的区域内, 控制偏置为零; 在关于 $e \pm v = 0$ 对称的区域内, 比例增益等于积分增益.

3 仿真实验

以单级倒立摆的控制为例, 验证本文所研究的 II 类模糊控制器的有效性. 单级倒立摆的非线性动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - \frac{1}{2} a m l x_2^2 \sin(2x_1) - a u \cos x_1}{\frac{4l}{3} - a m l (\cos x_1)^2} \end{cases} \quad (19)$$

其中, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度, $l = 0.3 \text{ m}$ 为摆杆的长度, $a = 1/(M + m)$, $M = 1.0 \text{ kg}$ 为小车重量, $m = 0.3 \text{ kg}$ 为摆杆重量, x_1 和 x_2 分别为摆杆与垂直方向的夹角和摆杆的角速度, u 为作用在小车上的力 (单位为 N).

取 $L = 1$, $l = 0.8$, $H = 1$, $sl = 0.3$, 将 II 类模糊控制器应用于倒立摆控制系统, 选择合适的 G_e, G_v, G_u , 分别以初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 为 $(20^\circ, 0)$, $(30^\circ, 0)$, $(60^\circ, 0)$, $(88^\circ, 0)$ 进行仿真, 结果如图 4、图 5 所示, 控制效果是颇为理想的. 值得指出的是, 本文所研究的 I 类和 II 类模糊控制器均为只有 4 条规则的最简模糊控制器, 若追求更为理想的控制效果, 可以通过调整参数或增加模糊规则来实现. 而且 II 类模糊控制器是 I 类模糊控制器的一种退化, 所以输入采用 GTS 隶属函数的 I 类和 II 类模糊控制器的有效性同时得以验证. 因三角形和梯形隶属函数均为 GTS 隶属函数的特例, 所以此控制器更具一般性.

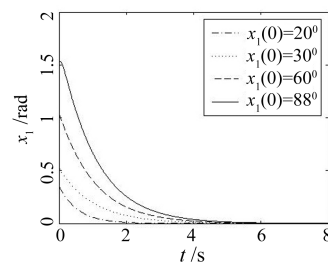
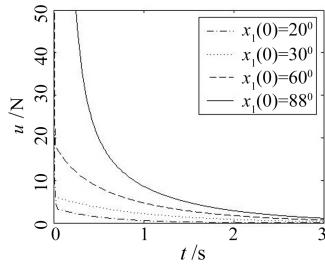


图 4 各初始状态下的 x_1 的响应曲线

Fig. 4 Response curves of x_1 with different initial states

图 5 各初始状态下的控制量 u Fig. 5 Curves of u with different initial states

4 小结

模糊控制器的结构分析是模糊系统稳定性分析和系统化设计的理论基础, 将为控制性能优于传统 PID 控制器的模糊控制器设计^[8] 提供理论依据, 又将有助于解决模糊控制器的简单化设计. 本文将传统的三角形和梯形隶属函数推广至 GTS 隶属函数, 并对其做了明确定义, 进而深入研究了输入变量采用 GTS 隶属函数的两类最简 Mamdani 模糊控制器结构, 推导了 I 类和 II 类模糊控制器的解析式, 并对这两类模糊控制器进行了结构分析, 证明了: 1) I 类模糊控制器等价于一种变结构的非线性 PI 控制器与相应的非线性变控制偏置之和, 在每个结构中, 比例系数都是误差变化率 v 的非线性函数, 积分系数都是误差 e 的非线性函数, 控制偏置都是误差 e 和误差变化率 v 的非线性函数; 2) II 类模糊控制器等价于变结构的线性 PI 控制器与相应的控制偏置之和, 在每个结构中, 比例系数, 积分系数和控制偏置均为常量, 并且它们在其输入论域上是单调递增、连续且有界的. 最后, 将该类控制器应用于倒立摆控制系统, 通过仿真验证了其有效性. 值得指出的是, I 类和 II 类模糊控制器均为只有 4 条规则的两维最简模糊控制器, GTS 隶属函数可在一定程度上缓解“规则爆炸”问题. GTS 隶属函数具有更大的普遍性, 对这类模糊控制器的结构分析为隶属函数对模糊控制性能的影响提供更全面的认识, 对模糊控制器的系统化设计和稳定性分析具有指导意义.

References

- 1 Ying H, Siler W, Buckley J J. Fuzzy control theory: a nonlinear case. *Automatica*, 1990, **26**(3): 513–520
- 2 Zhang Nai-Yao. Structure analysis of typical fuzzy controllers. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1997, **11**(2): 10–21
(张乃尧. 典型模糊控制器的结构分析. *模糊系统与数学*, 1997, **11**(2): 10–21)

- 3 Zeng Ke, Zhang Nai-Yao, Xu Wen-Li. Structure analysis of a class of fuzzy controllers using pseudo trapezoid shaped membership functions. *Science in China (Series E)*, 2000, **43**(3): 263–274
- 4 Xiu Zhi-Hong, Ren Guang. Stability analysis and systematic design of T-S fuzzy control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(5): 731–741
(修智宏, 任光. T-S 模糊控制系统的稳定性分析及系统化设计. *自动化学报*, 2004, **30**(5): 731–741)
- 5 Patel A V, Mohan B M. Analytical structures and analysis of the simplest fuzzy PI controllers. *Automatica*, 2002, **38**(6): 981–993
- 6 Haj-Ali A, Ying H. Structural analysis of fuzzy controllers with nonlinear input fuzzy sets in relation to nonlinear PID control with variable gains. *Automatica*, 2004, **40**(9): 1551–1559
- 7 Ying H. Deriving analytical input-output relationship for fuzzy controllers using arbitrary input fuzzy sets and Zadeh fuzzy AND operator. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, **14**(5): 654–662
- 8 Hu Bao-Gang, Ying Hao. Review of fuzzy PID control techniques and some important issues. *Acta Automatica Sinica*, 2001, **27**(4): 567–584
(胡包钢, 应浩. 模糊 PID 控制技术研究发展回顾及其面临的若干重要问题. *自动化学报*, 2001, **27**(4): 567–584)
- 9 Feng G. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, **14**(5): 676–697



王 宁 大连海事大学博士研究生. 2004 年获得大连海事大学轮机工程学院轮机管理专业学士学位, 主要研究方向为模糊控制, 船舶自动化与控制. 本文通信作者. E-mail: yuning0416@163.com
(WANG Ning Ph.D. candidate at Dalian Maritime University. He received his bachelor degree from Dalian Maritime University in 2004. His research interest covers fuzzy control and marine automatic control. Corresponding author of this paper.)



孟宪尧 大连海事大学教授. 1965 年毕业于北京大学技术物理系, 主要研究方向为先进控制技术与应用, 船舶自动化与控制. E-mail: mengxiany@163.com
(MENG Xian-Yao Professor at Dalian Maritime University. He graduated from Technological Physics Department of Peking University in 1965. His research interest covers advanced control technology and application, and marine automatic control.)