

# 一类符号反对称结构系统的稳定性及其应用

刘斌<sup>1</sup> 张曾科<sup>1</sup> 姜敏<sup>1</sup>

**摘要** 结合矩阵论中的可反对称条件, 提出一种稳定的具有符号反对称结构的系统, 并将其作为非线性系统的镇定控制目标. 面向符号反对称结构系统的控制方法存在递推构造法和直接设计方法两种: 递推构造法面向具有上三角结构的系统, 包括已有逆推控制和逆推自适应控制, 并可具有更多的可调参数; 直接设计法适用于低维系统, 对于一些系统可以设计出更简单的控制器. 对于 Lorenz 混沌同步系统的仿真说明了面向反对称结构系统直接设计法有效性.

**关键词** 稳定性, 李亚普诺夫定理, 符号反对称结构, 反对称矩阵, 可反对称化条件  
**中图分类号** TP273

## Stability of a Class of Systems with Sign-skew Symmetric Structure and Its Applications

LIU Bin<sup>1</sup> ZHANG Zeng-Ke<sup>1</sup> JIANG Min<sup>1</sup>

**Abstract** Combined with skew-symmetrization condition in matrix theory, a class of stable systems with sign-skew symmetric structure is proposed, and is regarded as the objective of controller design. There are two methods to implement the design. One is called the direct method, in which the origin systems are transformed into systems with sign-skew symmetric structure by controller design and controllers simpler than backstepping for some systems can be constructed. Another is the recursive method, which is suitable for the systems with lower triangular structure, may have more parameters to tune than traditional backstepping procedure, and includes the backstepping and adaptive backstepping design procedures. An example of Lorenz systems is presented to show the effectiveness of the direct design method based on the sign-skew symmetric structure.

**Key words** Stability, Lyapunov theorem, sign-skew symmetric structure, skew symmetric matrix, symmetrization condition

利用系统结构进行控制是控制理论中一直研究的问题. 利用系统结构的设计步骤如下: 首先, 给出一种结构的定义; 然后从定义的结构出发得到研究结果. 例如, 从函数向量得到函数表达方面的上、下三角结构定义, 在上三角结构方面<sup>[1]</sup> 已经得到自适应控制<sup>[2]</sup>、鲁棒控制<sup>[3]</sup> 等结论; Grizzle 等<sup>[4]</sup> 利用微分几何提出一种对称的概念, 得到一些系统降维方面的结果; Liu 等<sup>[5-6]</sup> 对矩阵中的三对角结构进行研究并给出系统镇定方面的结果; Xi 等<sup>[7-8]</sup> 从物理角度出发研究哈密顿系统, 该系统可以分离出一种特殊的反对称结构矩阵, 可以得到系统的稳定性及对应李亚普诺夫函数; Wang 等<sup>[9-12]</sup> 扩展哈密顿系统, 得到广义耗散哈密顿系统, 此类系统可以分离出反对称结构矩阵, 这样系统镇定就可转化为设计面向此类系统的控制器.

符号反对称结构<sup>[13]</sup> 是反对称阵通过正定对角矩阵变换所具有的一类特殊性质. 本文将一些符号反对称矩阵方面的结论引入到线性系统和非线性系

统的稳定性分析与镇定控制器设计上, 提出一种稳定的具有符号反对称结构的系统, 并将这种系统作为镇定控制器设计的目标.

本文的结构如下: 首先介绍相关矩阵方面的定理, 其中包括反对称矩阵和一类特殊三对角阵的特征值性质定理, 以及符号反对称矩阵的可反对称化定理; 其次将符号反对称矩阵的性质引入到线性和非线性系统的稳定性分析上面; 然后提出面向符号反对称结构的设计方法, 该方法利用稳定的符号反对称结构拟线性系统设计非线性系统的镇定控制器; 最后给出仿真说明此类设计方法的有效性.

### 1 矩阵论的相关定理

本节介绍有关反对称矩阵<sup>[14]</sup>, 及可反对称化矩阵的几个性质.

**定理 1.** 反对称矩阵  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  的特征值实部为零.

**定理 2.** 如果一个矩阵  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  可以分解为反对称阵和对角阵之和, 则满足条件

$$\min a_{ii} \leq \operatorname{Re} \lambda(A) \leq \max a_{ii} \quad (1)$$

定理 2 给出的矩阵的特点是矩阵对角元素以外的对称元素具有相反的符号, 文献 [13] 将这种特征

收稿日期 2007-06-20 收修改稿日期 2008-03-18  
Received June 20, 2007; in revised form March 18, 2008  
1. 清华大学自动化系 北京 100084  
1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084  
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.01100

定义如下:

**定义 1 (符号反对称结构).** 对于矩阵  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 若当  $a_{ij} = 0$  时,  $a_{ji} = 0$ , 当  $a_{ji} \neq 0$  时,  $\text{sgn}(a_{ij}) = -\text{sgn}(a_{ji})$ , 则称该矩阵具有符号反对称结构.

可见符号反对称结构给出了矩阵的一种符号特征, 反对称矩阵是一种具有符号反对称结构的特殊矩阵. 需要研究的是, 在什么样的条件下, 矩阵可以保持符号反对称特征. 研究发现, 正定对角变换可以保持矩阵符号特征不变, 于是, 我们将矩阵非对角元素的反对称性作为变换的标准形, 并引入如下可反对称化矩阵的定义<sup>[13]</sup>.

**定义 2 (可反对称化矩阵).** 对于矩阵  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 如果存在对角矩阵  $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$  满足  $DA$  是反对称阵, 则称矩阵  $A$  是可反对称化矩阵.

下面给出可反对称化条件的定义.

**定义 3 (可反对称化条件).** 对于矩阵  $A = [a_{ij}]$ ,  $k \geq 3$ , 对于给定序列  $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ , 如果满足

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1} = (-1)^k a_{i_2 i_1} a_{i_3 i_2} \cdots a_{i_k i_{k-1}} a_{i_1 i_k} \quad (2)$$

则称矩阵满足可反对称化条件.

利用上面三个定义, 提出一种可反对称化的矩阵分解的定理, 其描述如下:

**定理 3.** 对于矩阵  $A = [a_{ij}]$ , 如果  $A$  具有符号反对称结构, 并且满足可反对称化条件, 则存在正定对角矩阵  $D$ , 使得  $DA$  可以分解为反对称阵和对角矩阵之和.

**证明.** 见附录. □

根据定理 2 和正定矩阵相乘不改变矩阵惯性的性质<sup>[15]</sup>, 可知对于定理 3 中给出的矩阵特征值实部的取值范围可以由矩阵的对角元素确定. 下面将利用这一结论对线性系统进行分析和设计.

## 2 符号反对称结构系统在线性系统中的应用

### 2.1 稳定性分析

由李亚普诺夫第一定理可知: 当线性自治系统的系统矩阵的特征值实部为负时, 该线性系统渐近稳定. 结合定理 2, 我们给出以下定理.

**定理 4.** 对于线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (3)$$

如果矩阵  $A$  可以分解为反对称矩阵和负定对角矩阵之和, 则该系统状态渐近稳定.

**证明.** 由于矩阵  $A$  可以分解为反对称矩阵和负定对角矩阵之和, 因此可以判断出  $a_{ii} < 0$ . 根据定

理 2, 可知  $\text{Re}\lambda(A) < 0$ . 再根据李亚普诺夫第一定理, 可知该系统状态渐近稳定. □

扩展定理 4, 可以得到如下定理.

**定理 5.** 考虑自治系统 (3), 当  $A$  具有符号反对称结构, 且满足可反对称条件时, 则

- 1) 若  $a_{ii} < 0$ , 则该自治系统是渐近稳定的;
- 2) 若  $a_{ii} \leq 0$ , 则该自治系统是稳定的.

**证明.** 当  $A$  具有符号反对称结构, 且满足可反对称条件, 根据定理 3, 可知存在正定对角  $D$ , 满足  $DA$  矩阵可以分解为反对称化矩阵和对角矩阵之和. 当  $a_{ii} < 0$  时,  $DA$  的对角元素  $d_i a_{ii} < 0$ , 故  $DA$  的特征值实部小于零. 文献 [15] 中指出矩阵和正定矩阵相乘不改变矩阵的惯性, 故矩阵  $A$  的特征值实部小于零. 再根据李亚普诺夫第一定理可知, 当  $a_{ii} < 0$  时, 自治系统 (3) 渐近稳定. 同理可以知道, 当  $a_{ii} \leq 0$  时, 自治系统 (3) 稳定. □

对于高维系统, 定理 4 和定理 5 中可反对称化条件的验证是一个很复杂的问题. 而对于几种特殊形式的矩阵则直接就可以判断其是否满足可反对称化条件, 结合定理 5, 可以得到以下两个稳定性定理.

**定理 6.** 线性自治系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -k_1 & a_{12} & & & \\ -l_1 a_{12} & -k_2 & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & -l_{n-1} a_{(n-1)n} & & -k_n \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (4)$$

$k_i \geq 0, l_i > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$

状态在原点是稳定的. 并且当  $k_i > 0$  时, 系统状态在原点是渐近稳定的.

**证明.** 此时可以验证系统 (4) 的系统矩阵满足可反对称化条件, 也可以直接构造对角正定阵  $D$ , 将系统矩阵反对称化. 令  $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ , 其中  $d_1 = 1, d_i = d_{i-1} l_{i-1}, i = 2, \dots, n$ . 令  $E = [e_{ij}] = DA$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & a_{12} & & & \\ -l_1 a_{12} & -k_2 & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & -l_{n-1} a_{(n-1)n} & & -k_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$e_{ij} = d_i a_{ij}, e_{ji} = d_j a_{ji} \quad (6)$$

当  $|i - j| > 1$  时,  $a_{ij} = a_{ji} = 0 \Rightarrow e_{ij} = e_{ji} = 0$ ; 当  $j - i = 1$  时,  $e_{ji} = d_j a_{ji} = d_i l_i a_{ji} = -d_i a_{ij} = -e_{ij}$ . 即  $E$  可以分解为反对称化矩阵和对角矩阵之和, 当  $a_{ii} < 0$  时,  $DA$  的对角元素  $d_i a_{ii} < 0$ , 故  $DA$  的特

征值实部小于零. 文献 [15] 中指出矩阵和正定矩阵相乘不改变矩阵的惯性, 故  $A$  的特征值实部小于零. 根据李亚普诺夫第一定理, 当  $a_{ii} < 0$  时, 自治系统 (4) 渐进稳定. 同理可以知道, 当  $a_{ii} \leq 0$  时, 自治系统 (4) 稳定.  $\square$

**定理 7.** 线性自治系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -k_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -l_1 a_{12} & -k_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -l_{n-1} a_{1n} & & & -k_n \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (7)$$

$$k_i \geq 0, l_i > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

状态在原点是稳定的. 并且当  $k_i > 0$  时, 系统状态在原点是渐近稳定的.

## 2.2 镇定控制器设计

已有的很多方法可以设计线性系统的镇定控制器, 这里利用符号反对称结构设计镇定控制器, 给出如下定理:

**定理 8.** 对于系统  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$ , 如果存在控制器  $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$ , 满足矩阵  $A + BK$  的对角元素小于零, 非对角部分组成的矩阵具有符号反对称结构, 且满足可反对称化条件, 则该控制器是镇定控制器.

该定理对于一般线性系统来说, 有效性不如求解黎卡提方程方法. 但是对于一些特殊结构的矩阵  $A$ , 如类似于式 (4) 和式 (7) 的系数矩阵, 则有可能设计出鲁棒镇定控制器.

前面给出了符号反对称结构在线性系统的应用, 下面将给出该种结构在非线性系统稳定性分析和镇定控制器设计方面的应用.

## 3 符号反对称结构在非线性系统中的应用

将符号反对称结构引入非线性系统的难点在于如何得到对应的系统矩阵, 即对于非线性系统的全部状态来说, 很难得到一个能反映系统稳定性的常数矩阵或函数矩阵. 下面将分别给出符号反对称结构在非线性系统的稳定性分析及非线性系统镇定上的应用.

### 3.1 稳定性分析

简单起见, 考虑如下非线性仿射系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (8)$$

其中  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . 如何利用符号反对称结构分析系统 (8) 的稳定性? 有两种方法可以得到系统 (8) 的系统矩阵: 一种是在平衡点处对系统进行雅可比线性化, 得到平衡点附近的近似线性模型, 然后可以套用

符号反对称结构在线性系统稳定性分析方面的结论, 得到符号反对称结构在非线性系统稳定性分析方面的局部结果; 另一种方法是通过将非线性系统等价化为拟线性系统<sup>[16]</sup>

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x})\mathbf{x} + B(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (9)$$

其中拟线性系统的系统矩阵  $(A(\mathbf{x}), B(\mathbf{x}))$  满足  $A(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $B(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ . 与雅可比线性化模型不同, 这种拟线性化得到的系统矩阵不是唯一的, 如果函数矩阵  $E(\mathbf{x})$  满足  $E(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 则可以验证  $(A(\mathbf{x}), B(\mathbf{x}))$  和  $(A(\mathbf{x}) + E(\mathbf{x}), B(\mathbf{x}))$  都是拟线性系统的系统矩阵. 例如, 对于非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2^2 + u \end{aligned} \quad (10)$$

该系统在原点处对应的线性系统为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \frac{\partial [x_1 x_2, 0]^T}{\partial [x_1, x_2]^T} \Big|_{x_1=x_2=0} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (11)$$

非线性系统 (10) 在全部状态空间范围内对应的拟线性形式可以为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \\ &= A(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + B\mathbf{u} \end{aligned} \quad (12)$$

也可以得到如下形式的拟线性系统

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \\ &= A_1(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + B\mathbf{u} \end{aligned} \quad (13)$$

从式 (11) ~ (13) 可以看到系统对应的雅可比线性化模型和拟线性系统模型的一个本质区别: 雅可比线性化模型只有一个, 而拟线性系统模型可以有多个.

如果确定非线性系统对应的拟线性系统形式, 对于系统处于的每一个状态, 就可以将原系统看成是一个对应的线性系统, 其对应的系统矩阵是  $(A(\mathbf{x}), B(\mathbf{x}))$ . 这样, 就可以尝试利用线性系统的设计方法, 在局部对拟线性系统对应的线性系统进行设计.

为了从全局研究系统的稳定性, 采用了第二种方法对非线性系统进行分析. 由于基于拟线性系统

的设计方法在一般情况下不可能有理论上的稳定性证明, 我们对拟线性系统的进行结构限制, 引入了符号反对称结构的拟线性系统. 下面将符号反对称结构和可反对称化条件的定义由常数矩阵推广到函数矩阵.

**定义 4 (符号反对称结构).** 当一个函数矩阵  $A(\mathbf{x}) = [a_{ij}(\mathbf{x})]$ , 对于  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ , 满足  $a_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ , 如果  $a_{ji}(\mathbf{x}) = 0$ , 当  $a_{ji}(\mathbf{x}) \neq 0$  时,  $a_{ij}(\mathbf{x}) = -a_{ji}(\mathbf{x})$ , 则称该矩阵具有符号反对称结构.

**定义 5 (可反对称化条件).** 对于矩阵  $A(\mathbf{x}) = [a_{ij}(\mathbf{x})]$ , 对于给定序列  $i_1, i_2, \dots, i_k \in J$ , 如果满足

$$a_{i_1 i_2}(\mathbf{x}) a_{i_2 i_3}(\mathbf{x}) \cdots a_{i_{k-1} i_k}(\mathbf{x}) a_{i_k i_1}(\mathbf{x}) = (-1)^k a_{i_2 i_1}(\mathbf{x}) a_{i_3 i_2}(\mathbf{x}) \cdots a_{i_k i_{k-1}}(\mathbf{x}) a_{i_1 i_k}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

则称矩阵满足可反对称化条件.

利用函数矩阵的符号反对称结构和可反对称化条件, 可以得到如下定理.

**定理 9.** 考虑拟线性系统  $\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x})\mathbf{x}$ , 当  $A(\mathbf{x})$  具有符号反对称结构, 满足可反对称化条件, 当  $a_{ii}(\mathbf{x}) < 0$  时, 系统是渐近稳定的, 当  $a_{ii}(\mathbf{x}) \leq 0$  时, 系统是稳定的.

同线性系统一样, 有许多符号反对称函数矩阵形式直接满足可反对称化条件. 这里给出两种特殊形式的符号反对称结构拟线性系统, 并对这两种形式给出如下稳定性定理.

**定理 10.** 考虑如下拟线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -k_1(\mathbf{x}) a_{12}(\mathbf{x}) & & & & & \\ a'_{12}(\mathbf{x}) -k_2(\mathbf{x}) & & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & a'_{(n-1)n}(\mathbf{x}) & & \\ & & & a'_{(n-1)n}(\mathbf{x}) & -k_n(\mathbf{x}) & \\ a'_{(i-1)i}(\mathbf{x}) = -l_i a_{(i-1)i}(\mathbf{x}) & & & & & \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$k_i(\mathbf{x}) \geq 0, l_i > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$

系统在原点是稳定的, 当  $a_{ii}(\mathbf{x}) < 0$  时, 系统状态在原点是渐近稳定的.

**定理 11.** 对于如下拟线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -k_1(\mathbf{x}) & a_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{1n}(\mathbf{x}) \\ -l_1 a_{12}(\mathbf{x}) & -k_2(\mathbf{x}) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -l_{n-1} a_{1n}(\mathbf{x}) & & & -k_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

$k_i(\mathbf{x}) \geq 0, l_i > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  (15)

系统状态在原点是渐近稳定的. 同理可证, 当  $k_i(\mathbf{x}) < 0$  时, 系统状态在原点是渐近稳定的.

定理 10 和定理 11 所示的系统具有鲁棒性, 即使我们不知道参数  $l_i$  的具体数值, 只要知道系统具有的广义结构, 就可以判断出系统的渐近稳定性. 如果对角阵是半负定的, 不能直接得到渐近稳定性. 此时, 需要结合不变集定理或 Babalat 引理来得到系统的渐近稳定性.

下面将给出如何利用稳定的符号反对称结构拟线性系统来设计非线性系统的镇定控制器, 即给出面向符号反对称结构的控制器设计方法.

### 3.2 面向符号反对称结构的控制

上述关于一类符号反对称结构系统稳定性方面的结论, 可以用来设计非线性系统的镇定控制器, 使闭环系统对应的拟线性系统的系统矩阵具有稳定的符号反对称结构. 这种面向符号反对称结构的控制器设计方法具体可以分成两种: 1) 递推构造法, 主要是针对上三角结构系统采用坐标变换设计进行控制其构造, 类似与逆推设计过程, 最终得到的闭环拟线性系统具有一个稳定的符号反对称结构; 2) 直接构造法, 对比原系统系数矩阵, 直接设计控制器使系统化为符号反对称结构系统.

#### 3.2.1 递推构造法

在文献 [5] 中已经给出了面向三对角结构的递推控制过程, 该递推控制包括逆推控制. 由定理 10 可知, 稳定的符号反对称结构包括稳定的三对角结构, 这里进一步给出类似于逆推自适应控制的控制方法.

下面针对下三角结构的非线性未知参数系统进行镇定, 说明通过变换和控制器设计可以得到一组具有符号反对称结构的稳定系统. 对于如下结构的系统:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}_1(z_1) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) \\ \dot{z}_n &= u + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}_n(z_1, \dots, z_n) \end{aligned} \quad (16)$$

其中,  $\boldsymbol{\varphi}_1(0) = \dots = \boldsymbol{\varphi}_n(0)$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n$ . 对应的自适应逆推法在文献 [2] 中给出, 下面给出面向反对称结构的递推设计法, 与自适应逆推一样, 每步进行坐标变换, 并同时设计参数更新律: 令参数  $c_1, c_2, \dots, c_n$  为选定的正实数, 设计步骤如下:

**步骤 1.** 定义新变量  $x_1 = z_1$ , 考虑如下方程

$$\dot{x}_1 = z_2 + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}_1(z_1, z_2) \quad (17)$$

令  $\theta_1$  是未知参数向量  $\boldsymbol{\theta}$  的一个估计, 将  $z_2$  设为虚拟控制器, 得到如下控制律

$$\alpha_1(x_1) = -k_1 x_1 - \boldsymbol{\theta}_1^T \boldsymbol{\varphi}_1(x_1) \quad (18)$$

和参数更新律

$$\dot{\theta}_1 = -x_1 \varphi_1(x_1) \tag{19}$$

**步骤 2.** 定义新变量  $x_2 = z_2 - \alpha_1(x_1)$ , 则得到如下动态方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{z}_2 - \dot{\alpha}_1(x_1) = \\ & z_3 + \theta^T \varphi_2(x_1, z_2) - \dot{\alpha}_1(x_1) \end{aligned} \tag{20}$$

令  $\theta_2$  是未知参数向量  $\theta$  的一个估计, 将  $z_3$  视为虚拟控制器, 得到如下控制律

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_1, x_2) &= \\ & -k_2 x_2 - \left( \theta^T \varphi_2(x_1, z_2) - \dot{\alpha}_1(x_1) \right) - l_1 x_1 \end{aligned} \tag{21}$$

和参数更新律

$$\dot{\theta}_2 = -x_2 \varphi_2(x_1, x_2 + \alpha_1(x_1)) \tag{22}$$

**步骤 i.** 定义新变量  $x_i = z_i - \alpha_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1})$ , 则得到如下动态方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \dot{z}_i - \dot{\alpha}_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}) = \\ & z_{i+1} + \theta^T \varphi_i(z_1, \dots, z_i) - \dot{\alpha}_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}) \end{aligned} \tag{23}$$

令  $\theta_i$  是  $\theta$  参数估计,  $z_{i+1}$  为虚拟控制器, 得到虚拟控制器

$$\begin{aligned} \alpha_i(\cdot) &= -k_i x_i - \left( \theta^T \varphi_i(x_1, z_2) - \right. \\ & \left. \dot{\alpha}_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}) \right) - l_{i-1} x_{i-1} \end{aligned} \tag{24}$$

和参数更新律

$$\dot{\theta}_i = -x_i \varphi_i(x_1, \dots, x_i) \tag{25}$$

**步骤 n.** 定义新变量  $x_n = z_n - \alpha_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ , 则得到如下动态方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= \dot{z}_n - \dot{\alpha}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \\ & u + \theta^T \varphi_n(x_1, z_2) - \dot{\alpha}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \tag{26}$$

令  $\theta_i$  是  $\theta_i$  参数估计, 得到实际控制器

$$\begin{aligned} u(\cdot) &= -k_n x_n - \left( \theta^T \varphi_n(x_1, z_2) - \right. \\ & \left. \dot{\alpha}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \right) - l_{n-1} x_{n-1} \end{aligned} \tag{27}$$

和参数更新律

$$\dot{\theta}_n = -x_n \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \tag{28}$$

得到的系统具有如下形式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & & & \\ & -l_1 & k_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -l_{n-1} & -k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ & \varphi_2^T \\ & & \ddots \\ & & & \varphi_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta - \theta_1 \\ \theta - \theta_2 \\ \vdots \\ \theta - \theta_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} - \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_1 & & & \\ & -\varphi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\varphi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{30}$$

可知该系统具有结构稳定性, 且渐近稳定于原点.

### 3.2.2 直接构造法

递推构造法是通过坐标变换一步一步地构造出稳定的具有符号反对称结构的拟线性系统, 而对一些可以直接构造出此类结构的反对称系统, 该方法称作直接构造法. 首先把系统转换成拟线性系统形式, 找到一个与拟线性系统表示接近具有反对称结构稳定性的拟线性系统, 设计控制器, 使拟线性系统具备这种形式, 得到如下定理.

**定理 12.** 对于系统

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x})\mathbf{x} + B(\mathbf{x})\mathbf{u} \tag{31}$$

如果存在反馈

$$\mathbf{u} = K(\mathbf{x})\mathbf{x} \tag{32}$$

满足

$$A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})K(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \tag{33}$$

其中  $C(\mathbf{x})$  具有符号反对称结构, 且满足可反对称化条件, 当  $c_{ii}(\mathbf{x}) \leq 0$  时, 系统状态稳定, 当  $c_{ii}(\mathbf{x}) < 0$  时, 系统状态渐近稳定.

符号反对称结构的直接构造法的关键, 在于选择合适的拟线性系统作为控制目标. 故该方法适合于低维系统的控制, 而不适合于对高维系统的控制.

## 4 仿真

由于反对称结构的递推构造法包括逆推设计方法, 而逆推设计已有很多成功的应用, 这里不再举例

说明. 本节给出一个利用符号反对称结构进行直接设计的仿真实例. 考虑 Lorenz 同步系统<sup>[17]</sup>, 驱动系统模型和相应系统模型分别如下

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), & \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + u_1 \\ \dot{y}_1 &= \rho x_1 - y_1 - x_1 z_1, & \dot{y}_2 &= \rho x_2 - y_2 - x_2 z_2 \\ \dot{z}_1 &= -\beta z_1 + x_1 y_1, & \dot{z}_2 &= -\beta z_2 + x_2 y_2 \end{aligned} \tag{34}$$

其中  $\sigma, \rho, \beta > 0$ . 令同步系统状态误差分别为

$$e_x = x_2 - x_1, \quad e_y = y_2 - y_1, \quad e_z = z_2 - z_1 \tag{35}$$

可得到如下拟线性系统形式

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z_1 & -1 & -e_x - x_1 \\ y_1 & e_x + x_1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{36}$$

得到系数矩阵, 给出一个接近式 (36) 的稳定的符号反对称结构矩阵为

$$A(\cdot) = \begin{bmatrix} -\sigma & -k_1(\rho - z_1) & -k_1 y_1 \\ \rho - z_1 & -1 & -e_x - x_1 \\ y_1 & e_x + x_1 & -\beta \end{bmatrix} \tag{37}$$

于是镇定控制器可通过求解如下方程得到

$$A(e_x, e_y, e_z, x_1, y_1, z_1) \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z_1 & -1 & -e_x - x_1 \\ y_1 & e_x + x_1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

得到的镇定控制器为

$$u_1 = -\sigma e_y - k_1(\rho - z_1) e_y - k_1 y_1 e_z \tag{39}$$

将式 (39) 代入式 (36), 得到如下系统

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = A(e_x, e_y, e_z, x_1, y_1, z_1) \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \tag{40}$$

由定理 8, 可得该系统状态渐近稳定. 选取参数  $\sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 28$ , 初始状态为  $x_1(0) = 20, y_1(0)$

$= 5, z_1(0) = 2, x_2(0) = 24, y_2(0) = 20, z_2(0) = 28$ , 利用控制律 (39), 得到如图 1 所示的反应曲线, 仿真结果说明两个系统实现了同步.

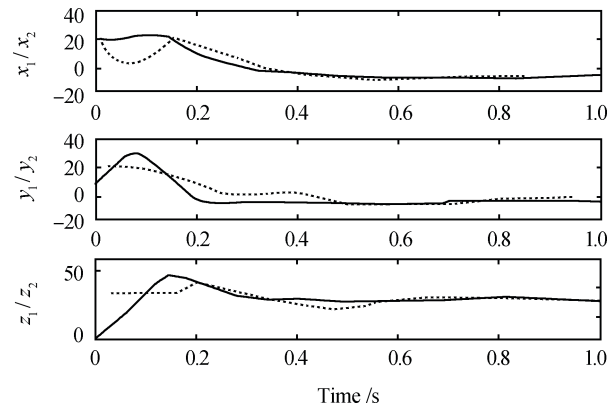


图 1 Lorenz 同步系统的状态反应曲线

Fig. 1 Synchronized states of modified Lorenz system

### 5 结论

本文给出了一类稳定的具有符号反对称结构的系统, 该类系统包括一类系数矩阵符号反对称的线性系统和一类拟线性系数矩阵具有符号反对称结构的拟线性系统. 该类系统的特点是通过对角矩阵变换具有反对称的系数矩阵, 具有负的特征值实部. 提出了面向稳定的符号反对称结构系统的控制方法, 该方法的目标是将给定系统通过坐标变换和控制器设计转化为稳定的具有符号反对称结构的系统, 包括递推构造法和直接控制法两种. 前者针对上三角结构非线性系统通过坐标变换和控制器设计递推构造出具有符号反对称结构的拟线性系统, 包括了已有的逆推控制和逆推自适应控制和面向三对角结构的递推构造法, 后者针对低维拟线性系统直接设计控制器使原系统化为具有符号反对称结构的拟线性系统, 包括面向三对角的直接构造法, 并具有其优点: 可以构造出结构更简单的控制器. 通过对 Lorenz 混沌同步系统的仿真说明了面向符号反对称结构的直接构造法的有效性.

### 附录

**定义 6**<sup>[16]</sup>. 当  $n \geq 3$  时, 对于有限序列  $j_1, \dots, j_n \in J$ , 其中  $J$  是长度  $1, \dots, n$  的集合, 满足

$$a_{j_1, j_2} \cdots a_{j_{n-1}, j_n} a_{j_n, j_1} = a_{j_2, j_1} \cdots a_{j_n, j_{n-1}} a_{j_1, j_n} \tag{A1}$$

则称如果方阵  $A$  满足  $SYM_n$  条件.

**定义 7**. 如果方阵  $A$  满足当  $a_{ij} = 0$  时,  $a_{ji} = 0$ ; 当  $a_{ij} \neq 0$  时,  $\text{sgn}(a_{ij}) = \text{sgn}(a_{ji})$ , 则称矩阵  $A$  是组合对称的.

**引理 1**<sup>[18]</sup>. 存在正定对角阵  $D$  使得矩阵  $DA$  是对称化矩阵, 当且仅当  $A$  是组合对称的, 对于  $n \geq 3$ , 满足  $SYM_n$  条件.

## 定理 3 的证明.

令  $C = [c_{ij}] = A - \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$ ,  $E = [e_{ij}] = [[c_{ij}]]$ , 则由  $C$  具有反对称结构, 可以得到如下关系

$$C = E \circ F \quad (\text{A2})$$

其中  $\circ$  表示 Hadamard 积,  $E = [e_{ij}]$  满足下列条件, 对于有限序列  $j_1, \dots, j_n \in J$

$$e_{ij} = 0, e_{ji} = 0; e_{ij} > 0, e_{ji} > 0 \quad (\text{A3})$$

$$e_{j_1, j_2} \cdots e_{j_{n-1}, j_n} e_{j_n, j_1} = e_{j_2, j_1} \cdots e_{j_n, j_{n-1}} e_{j_1, j_n} \quad (\text{A4})$$

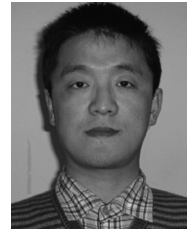
$F = [f_{ij}]$  满足  $f_{ij} = -f_{ji} \in \{-1, 1\}$ . 由引理 1, 可知存在正定对角阵  $D$  使得矩阵  $DE$  是对称化矩阵. 于是, 对于对角阵  $D$ , 矩阵  $A$  可以得到下列关系

$$\begin{aligned} DA &= DC + D \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\} = \\ D(E \circ F) + D \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\} &= \\ (DE) \circ F + D \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

由于  $(DE) \circ F$  是反对称阵,  $D \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$  是对角阵, 得证.  $\square$

## References

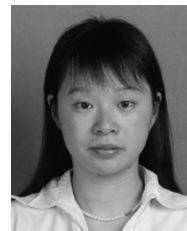
- 1 Tsiniias J. Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1989, **2**(4): 343–357
- 2 Kanellakopoulos I, Kokotovic P, Morse A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(11): 1241–1253
- 3 Freeman R A, Kokotovic P V. Design of “softer” robust nonlinear control laws. *Automatica*, 1993, **29**(6): 1425–1437
- 4 Grizzle J, Marcus S. The structure of nonlinear control systems possessing symmetries. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, **30**(3): 248–258
- 5 Liu Bin, Zhang Zeng-Ke. Stability of nonlinear systems with tridiagonal structure and its applications. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(4): 442–445  
(刘斌, 张曾科. 一种三对角结构非线性系统的稳定性及其应用. *自动化学报*, 2007, **33**(4): 442–445)
- 6 Liu Bin. The Stability Analysis and Stabilization of Systems Based on Skew-symmetric Structure [Ph.D. dissertation], Tsinghua University, 2007  
(刘斌. 基于反对称结构的系统稳定性分析与镇定控制 [博士学位论文], 清华大学, 2007)
- 7 Xi Z R, Cheng D Z, Lu Q, Mei S W. Nonlinear decentralized controller design for multimachine power systems using Hamiltonian function method. *Automatica*, 2002, **38**(3): 527–534
- 8 van der S A. *L<sub>2</sub>-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Berlin: Springer, 1999
- 9 Wang Y Z, Cheng D Z, Hu X M. Problems on time-varying port-controlled Hamiltonian systems: geometric structure and dissipative realization. *Automatica*, 2005, **41**(4): 717–723
- 10 Wang Y Z, Li C W, Cheng D Z. Generalized Hamiltonian realization of time-invariant nonlinear systems. *Automatica*, 2003, **39**(8): 1437–1443
- 11 Fujimoto K, Sugie T. Stabilization of Hamiltonian systems with nonholonomic constraints based on time-varying generalized canonical transformations. *Systems and Control Letters*, 2001, **44**(4): 309–319
- 12 Cheng D Z, Alessandro A, Romeo O. On feedback equivalence to port-controlled Hamiltonian systems. *Systems and Control Letters*, 2005, **54**(9): 911–917
- 13 Fomin S, Zelevinsky A. Cluster algebras I: foundations. *Journal of the American Mathematical Society*, 2002, **15**(2): 497–529
- 14 Horn R A, Johnson C R. *Topic In Matrix Analysis*. Beijing: Posts and Telecom Press, 2005  
(Horn R A, Johnson C R. 矩阵分析 II. 北京: 人民邮电出版社, 2005)
- 15 Horn R A, Johnson C R. *Matrix Analysis*. Beijing: Posts and Telecom Press, 2005. 465–466  
(Horn R A, Johnson C R. 矩阵分析 I. 北京: 人民邮电出版社, 2005. 465–466)
- 16 Banks S P, Mhana K J. Optimal control and stabilization for nonlinear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 1992, **9**(2): 179–196
- 17 Tong C F, Zhang H, Sun Y X. Optimal control for a class of chaos synchronization with input constraint. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Minneapolis, Minnesota, USA: IEEE, 2006. 5282–5287
- 18 Kurner B, Neeb K H. Invariant symmetric bilinear forms for reflection groups. *Journal of Geometry*, 2001, **71**(1-2): 99–127



刘斌 2008 年获清华大学博士学位. 主要研究方向为非线性控制. 本文通信作者. E-mail: laoliu02@gmail.com  
(LIU Bin Received his Ph.D. degree from Tsinghua University in 2008. His main research interest is nonlinear control. Corresponding author of this paper.)



张曾科 清华大学自动化系教授. 主要研究方向为模糊控制和非线性控制. E-mail: zzk@mail.tsinghua.edu.cn  
(ZHANG Zeng-Ke Professor at Tsinghua University. His research interest covers fuzzy control and nonlinear control.)



姜敏 清华大学自动化系博士研究生. 主要研究方法为非线性系统, 量子信息和量子通讯. E-mail: jiangmin03@mails.tsinghua.edu.cn  
(JIANG Min Ph.D. candidate at Tsinghua University. Her research interest covers nonlinear control, quantum information, and quantum communication.)