第 34 卷 第 9 期 自 动 化 学 报 Vol. 34, No. 9
2008 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA September, 2008

一类非线性系统非切换解析模型预测控制方法研究

张国银 [1,2] 杨 智 [1] 谭洪舟 [1]

摘 要 针对关系度不确定非线性系统, 基于模型预测控制理论和切换解析非线性模型预测控制 (Nonlinear model predictive control, NMPC) 提出了一种非切换的解析 NMPC 新方法. 论证了在非切换解析 NMPC 控制律下, 通过坐标变换可以将闭环系统分别在关系度确定和不确定的两个子空间近似为线性系统, 得出非切换解析 NMPC 使闭环系统稳定的必要条件. 通过仿真实验验证了非切换解析 NMPC 可以达到很好的响应特性, 无需切换的特征也扩大了其应用范围.

关键词 非线性系统, 非线性模型预测控制, 关系度不确定
中图分类号 TP13

Research on Non-switch Analytic Nonlinear Model Predictive Control Method for a Class of Nonlinear Systems

ZHANG Guo-Yin[1,2] YANG Zhi[1] TAN Hong-Zhou[1]

Abstract Based on model predictive control theory and the analytic nonlinear model predictive control (NMPC), this paper brings forward an analytic NMPC method for nonlinear systems with ill-defined relative degree. Under our method, the system can be approximated to two linear systems in state spaces whose relative degrees are well-defined or ill-defined, respectively. So the necessary conditions for the closed system′s stabilization are demonstrated. The non-switch analytic NMPC controller is successfully demonstrated by simulation examples.

Key words Nonlinear systems, nonlinear model predictive control (NMPC), ill-defined relative degree

关系度在非线性系统控制理论中 (尤其在非线性几何控制理论中) 是一个非常重要的概念[1]. 如果在整个状态空间或者在某一个开区间上具有相同的关系度, 那么称关系度是定义好的 (Well-defined relative degree), 反之关系度就是不确定的 (Ill-defined). 一个关系度确定的非线性系统, 很容易通过坐标变换进行精确的输入输出反馈线性化, 而关系度不确定就无法进行反馈线性化. 为此, Hauser 提出鲁棒关系度的概念[2], 对关系度不确定非线性系统构造近似反馈线性化控制方法. 一些学者用切换控制来为这类系统设计控制器[3], 但是这种方法很容易使系统产生振荡, 可能造成闭环系统的不稳定.

Chen 基于非线性模型预测控制 (Nonlinear model predictive control, NMPC) 对关系度不确定的非线性系统构造了解析 NMPC 控制律. 模型预测控制不仅对系统模型有很强的宽容性, 而且采用滚动时域优化用开环最优代替闭环最优, 使得无需求解 HJB 偏微分方程组[4−5], 但开环最优不能够保证闭环系统稳定. 为此, Mayne 和 Michalska 在相当强的假设条件下, 提出引入零终端约束的 NMPC 使系统闭环稳定[6]; 随后, 文献 [7] 中提到, Genceli 和 Nikoaou 为克服算法上的缺陷 (对终端等式约束需要无穷次迭代才能精确满足), 提出终端不等式约束设计; Chen 引入终端加权提出了 Quasi-infinite NMP 策略[8]. 为了克服在线求解最优预测控制律的时延问题, Chen 采用泰勒展开近似的方法构造解析 NMPC 控制律, 这是一个静态的状态反馈控制律, 使得 NMPC 控制可以应用于动力学系统等响应快速的系统[9−11]. 然而 Chen 构造的控制器需要在不同的状态空间之间进行切换, 而切换控制对某些系统并不适用, 因此应用范围有限.

本文基于模型预测控制理论, 针对关系度不确定非线性系统, 在切换解析 NMPC 的基础上提出了一种非切换的解析 NMPC 新方法. 论证了在非切换解析 NMPC 控制律下, 通过坐标变换可以将闭环系统分别在关系度确定和不确定的两个子空间近似为两个线性系统, 从而得出非切换解析 NMPC 使闭环系统稳定的必要条件. 仿真实验验证了非切换解析 NMPC 无需进行切换控制就可以达到很好的闭环响应特性, 扩大了其应用范围.

收稿日期 2007-05-28 收修改稿日期 2007-10-21
Received May 28, 2007; in revised form October 21, 2007
国家自然科学基金资助 (60575006)
Supported by National Natural Science Foundation of China (60575006)
1. 中山大学信息科学与技术学院电子与通信工程系 广州 510275 2. 中兴通讯股份有限公司 深圳 518004
1. Department of Electronics and Communication Engineering, School of Information Science and Technology, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275 2. ZTE Telecommunication Equipment Corporation Limited, Shenzhen 518004
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.01147

1 关系度不确定非线性系统

考虑 SISO 非线性系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})u \\ y = h(\boldsymbol{x})\end{cases} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ 分别表示状态向量、控制输入和系统输出, f, g, h 均为光滑的向量函数. 不失一般性分析, 可以假设对系统 (1) 的平衡点 $\boldsymbol{x}^o$ 有 $f(\boldsymbol{x}^o) = \mathbf{0}$, $g(\boldsymbol{x}^o) \neq \mathbf{0}$. 这就意味着当系统在平衡点 $\boldsymbol{x}^o$ 时, 容许的控制输入 $u = 0$.

定义 1. 系统 (1) 称为在 $\boldsymbol{x}^o$ 点关系度确定 (Well-defined), 且具有关系度 r, 如果满足以下条件:

1) $L_gL_f^kh(\boldsymbol{x}) = 0$, 对 $\boldsymbol{x}^o$ 的一个邻域内的所有 $\boldsymbol{x}$, 以及 $k = 0, 1, 2, \cdots, r-2$;

2) $L_gL_f^{r-1}h(\boldsymbol{x}^o) \neq 0$.

条件 1) 蕴含着在 $\boldsymbol{x}^o$ 的一个邻域内系统都具有关系度 r. 如果在 $\boldsymbol{x}^o$ 满足 $L_gL_f^{r-1}h(\boldsymbol{x}^o) = 0$, 而在其任意小的一个邻域内必存在一点满足条件 $L_gL_f^{r-1}h(\boldsymbol{x}) \neq 0$, 那么 $\boldsymbol{x}^o$ 称为奇异点 (Singular point), 此时系统 (1) 的关系度不确定 (Ill-defined). 对关系度不确定的非线性系统, Hauser 给出了鲁棒关系度的定义.

定义 2. 系统 (1) 称为在 $\boldsymbol{x}^o$ 点具有鲁棒关系度 r, 如果存在一组光滑函数 $\phi_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, \cdots, r$, 使得

$$\begin{aligned} &h(\boldsymbol{x}) = \phi_1 + \varphi_0(\boldsymbol{x}, u) \\ &L_{f+gu}\phi_i(\boldsymbol{x}) = \phi_{i+1}(\boldsymbol{x}) + \varphi_i(\boldsymbol{x}, u), \\ &\qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, r-1 \\ &L_{f+gu}\phi_r(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}) + a(\boldsymbol{x})u + \varphi_r(\boldsymbol{x}, u) \end{aligned}$$

其中, $\varphi_i(\boldsymbol{x}, u)$, $i = 0, \cdots, r$ 为 $\mathrm{o}(\boldsymbol{x}, u)^2$, $a(\boldsymbol{x})$ 为 $\mathrm{o}(1)$ 的.

本文对所要研究的非线性系统作如下假设:

假设 1. 系统 (1) 具有鲁棒关系度 r, 并且零动态 (Zero dynamics[1]) 渐近稳定.

假设 2. 输出 $y(t)$ 和参考信号 $y_d(t)$ 是足够光滑的, 可做足够次数的微分运算.

2 关系度不确定非线性系统的解析 NMPC 控制

模型预测控制需要给出一个性能指标, 这个性能指标可以具有很明显的实际意义. 为了综合考虑各个方面的作用, 首先给出比较全面的滚动时域优化的性能指标

$$\begin{aligned} J = \ & \frac{1}{2}\mu_1\Big[\hat{y}(t+T) - \hat{y}_d(t+T)\Big]^2 + \\ & \frac{1}{2}\int_0^T \Big[\mu_2\big(\hat{y}(t+\tau) - \hat{y}_d(t+\tau)\big)^2 + \\ & \mu_3\hat{u}(t+\tau)^2\Big]\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{2}$$

其中, T 为预测时间. μ_1、μ_2 和 μ_3 为正数, 分别反映了输出终端约束、输出误差和控制量所占的比重, $\hat{y}(t+T)$ 和 $\hat{y}_d(t+T)$ 分别为系统输出和期望输出的预测值. 上标 "^" 号表示预测值, 期望输出的预测值一般是确定的.

模型预测控制可以表述为在一个滚动时域 $[t, t+T]$ 内, 用 $\hat{\boldsymbol{x}}(\tau)$ 表示系统状态, $\hat{u}(\tau)$ 表示控制输入, 那么系统 (1) 在滚动时域内的动态方程为

$$\begin{aligned} &\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t+\tau) = f(\hat{\boldsymbol{x}}(t+\tau)) + g(\hat{\boldsymbol{x}}(t+\tau))\hat{u}(t+\tau) \\ &\hat{y}(t+\tau) = h(\hat{\boldsymbol{x}}(t+\tau)), \quad \tau \in [0, T] \end{aligned} \tag{3}$$

其初始状态即为系统当前的状态, 即

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t+\tau) = \boldsymbol{x}(t), \quad \tau = 0 \tag{4}$$

根据式 (3) 和 (4) 可以预测 $[t, t+T]$ 时间段内系统的输出. 据此, 最小化性能指标 J 的问题就是寻找 $[t, t+T]$ 时间段内的最优控制输入 $\hat{u}(t+\tau)$. 综上所述, 非线性模型预测控制可以描述为

$$\begin{aligned} &\min_{\hat{u}} \ J \\ &\text{s.t. 式 (3) 和 (4)} \end{aligned} \tag{5}$$

实际上系统的控制输入可以采用最优预测控制律 $\hat{u}^*(t+\tau)$ 的初值, 即

$$u(t) = \hat{u}^*(t+\tau), \qquad \tau = 0 \tag{6}$$

系统的控制输入总是取使性能指标最小的控制输入, 于是当滚动时域时, 性能指标 J 逐渐减小, 同时系统输出逐渐接近于期望值.

2.1 切换解析 NMPC 控制

Chen 采用泰勒展开近似方法, 将性能指标 J 及预测时间内系统的输出进行适当阶数的泰勒展开, 分别在奇异和非奇异状态空间中求解问题 (5) 并给出解析解, 从而为关系度不确定非线性系统构造了切换解析 NMPC 控制律. 为了得到系统 (1) 的解析 NMPC 控制律, Chen 采用的滚动时域性能指标为

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \Big(\hat{y}(t+\tau) - \hat{y}_d(t+\tau)\Big)^2\mathrm{d}\tau \tag{7}$$

式 (7) 是式 (2) 的一种特殊形式, 为采用泰勒展开近似, 首先定义向量

$$\boldsymbol{y}(t)=[y(t)\ \ \dot{y}(t)\ \ \cdots\ \ y^{(N)}(t)\,]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}_d(t)=[\,y_d(t)\ \ \dot{y}_d(t)\ \ \cdots\ \ y_d^{(N)}(t)\,]^{\mathrm{T}}$$

记 $\boldsymbol{\tau}(\tau)=[\,1\ \ \ \tau\ \cdots\ \dfrac{\tau^N}{N!}\,]^{\mathrm{T}}$, 那么预测输出 $\hat{y}(t+\tau)$ 和预测期望输出 $\hat{y}_d(t+\tau)$ 可表示为

$$\hat{y}(t+\tau)=\boldsymbol{\tau}(\tau)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}(t)$$
$$\hat{y}_d(t+\tau)=\boldsymbol{\tau}(\tau)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_d(t)$$

代入式 (7) 可得性能指标的 N 阶泰勒展开近似为

$$J\approx\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_d)^{\mathrm{T}}M(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_d)\tag{8}$$

其中矩阵

$$M=\int_0^T\boldsymbol{\tau}(\tau)\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{9}$$

其各个元素由预测时间 T 及展开阶数 N 确定. 定义奇异点所在的状态空间为

$$N_s=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\ \big|\ L_gL_f^{r-2}h(\boldsymbol{x})=0\}\tag{10}$$

那么非线性系统 (1) 在关系度确定空间 (N_s 的补空间) 的解析 NMPC 控制律给定为

$$u=-\Big(L_gL_f^{r-2}h(\boldsymbol{x})\Big)^{-1}\tilde{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{p}_1\tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}h(x)-y_d\\L_fh(x)-\dot{y}_d\\\vdots\\L_f^{r-1}h(x)-y_d^{(r-1)}\end{bmatrix}\tag{12}$$

$$\tilde{\boldsymbol{k}}=[\,\boldsymbol{k}\quad 1\,]\tag{13}$$

$\boldsymbol{k}$ 为矩阵 $M_3^{-1}M_2^{\mathrm{T}}$ 的第一行, M_2 和 M_3 为 M 矩阵的分块, 维数分别为 $(r-1)\times(N-r+2)$ 和 $(N-r+2)\times(N-r+2)$, 即 M 可以表示为

$$M=\begin{bmatrix}M_1&M_2\\M_2^{\mathrm{T}}&M_3\end{bmatrix}\tag{14}$$

而在关系度不确定的空间 N_s, 系统 (1) 的解析 NMPC 控制律为

$$u=\begin{cases}-\dfrac{\tilde{\boldsymbol{k}}'\tilde{\boldsymbol{p}}_1}{b_1(\boldsymbol{x})}, & b_2(\boldsymbol{x})=0\\[2ex]\dfrac{-b_1(\boldsymbol{x})\pm\sqrt{b_1(\boldsymbol{x})^2-4b_2(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{k}}'\tilde{\boldsymbol{p}}_1}}{2b_2(\boldsymbol{x})}, & b_2(\boldsymbol{x})\neq 0\end{cases}\tag{15}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1\\L_f^rh(\boldsymbol{x})-y_d^{(r)}\end{bmatrix}\tag{16}$$

$$b_1(\boldsymbol{x})=L_fL_gL_f^{r-2}h(\boldsymbol{x})+L_gL_f^{r-1}h(\boldsymbol{x})\tag{17}$$

$$b_2(\boldsymbol{x})=L_g^2L_f^{r-2}h(\boldsymbol{x})\tag{18}$$

$$\tilde{\boldsymbol{k}}'=[\,\boldsymbol{k}'\quad 1\,]\tag{19}$$

$\boldsymbol{k}'$ 为矩阵 $\tilde{M}_3^{-1}\tilde{M}_2^{\mathrm{T}}$ 的第一行, 其中, $\tilde{M}_2$ 和 $\tilde{M}_3$ 是矩阵 M 的另一种分块, 维数分别为 $r\times(N-r+1)$ 和 $(N-r+1)\times(N-r+1)$, 即 M 可以表示为

$$M=\begin{bmatrix}\tilde{M}_1&\tilde{M}_2\\\tilde{M}_2^{\mathrm{T}}&\tilde{M}_3\end{bmatrix}\tag{20}$$

于是非线性系统 (1) 的切换解析 NMPC 控制律可以总结为

$$u=\begin{cases}\text{式(11)}, & \boldsymbol{x}\in N_s\\\text{式(15)}, & \boldsymbol{x}\in\overline{N}_s\end{cases}\tag{21}$$

上述结果的详细推导过程见文献 [9]. 对于一些非线性系统, 采用切换控制律会导致系统的振荡, 并且控制器不断地在各个子控制器间切换也造成控制律的不连续, 因此其实用价值受限. 下面考虑构造一种非切换的解析 NMPC 策略.

2.2　一种非切换解析 NMPC 控制方法研究

构造解析 NMPC 控制的关键是对性能指标及预测输出 $\hat{y}(t+\tau)$、预测状态 $\hat{\boldsymbol{x}}(t+\tau)$ 和预测控制量 $\hat{u}(t+\tau)$ 等进行泰勒近似, 切换解析 NMPC 的方法考虑了 $\hat{u}(t+\tau)$ 的 $(N-r+1)$ 阶的导数, 这样的分析固然是合理的, 但是也给分析造成了许多不便之处, 例如过程复杂、不得不舍弃性能指标 (2) 中的控制加权项等. 考虑到在 NMPC 中最终得到的只是 $\hat{u}$ 的初值, 而在预测时间内它的形式并不重要, 并且在数字控制技术及工程实践中, 控制量也可采用分段常值的形式近似, 因此可以作如下假设:

假设 3. 在预测时间 $[t,t+T]$ 内, 控制输入为常数, 即

$$\hat{u}(t+\tau)=u(t)\ ,\ \ \tau\in[0,T]\tag{22}$$

显然在这个假设下, $\hat{u}$ 的各阶导数均为零. 从而式 (2) 所示的性能指标的 N 阶泰勒展开可以近似为

$$J\approx\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_d)^{\mathrm{T}}M(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_d)+\frac{1}{2}\mu_3T\hat{u}^2\tag{23}$$

其中

$$M=\mu_1\boldsymbol{\tau}(\tau)\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}(\tau)\bigg|_{\tau=T}+\mu_2\int_0^T\boldsymbol{\tau}(\tau)\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{24}$$

式 (5) 等价为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\hat{u}}\right)^{\mathrm{T}}M(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_d)+\mu_3T\hat{u}=0\\&\left(\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\hat{u}}\right)^{\mathrm{T}}M\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\hat{u}}+\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{y}}{\partial\hat{u}^2}\right)^{\mathrm{T}}M(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_d)+\mu_3T>0\end{aligned} \tag{25}$$

在 $\hat{y}(t+\tau)$ 的各阶导数中也可以将 $\hat{u}$ 的各阶导数去掉, 从而可得

$$\begin{cases}\hat{y}(t+\tau)=h(\hat{\boldsymbol{x}})=q_{0,0}(\hat{\boldsymbol{x}})\\\dot{\hat{y}}(t+\tau)=L_fh(\hat{\boldsymbol{x}})=q_{1,0}(\hat{\boldsymbol{x}})\\\qquad\vdots\\\hat{y}^{(r-1)}(t+\tau)=L_f^{r-1}h(\hat{\boldsymbol{x}})+L_gL_f^{r-2}h(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{u}=\\\qquad q_{r-1,0}(\hat{\boldsymbol{x}})+q_{r-1,1}(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{u}\\\hat{y}^{(r)}(t+\tau)=L_f^rh(\hat{\boldsymbol{x}})+[L_gL_f^{r-1}h(\hat{\boldsymbol{x}})+\\\qquad L_fL_gL_f^{r-2}h(\hat{\boldsymbol{x}})]\hat{u}+L_g^2L_f^{r-2}h(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{u}^2\\\qquad\vdots\\\hat{y}^{(i)}(t+\tau)=q_{i,0}(\hat{\boldsymbol{x}})+q_{i,1}(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{u}+\\\qquad q_{i,2}(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{u}^2+\cdots+q_{i,L}(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{u}^L\\\qquad\vdots\\\hat{y}^{(N)}(t+\tau)=q_{N,0}(\hat{\boldsymbol{x}})+q_{N,1}(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{u}+\\\qquad q_{N,2}(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{u}^2+\cdots+q_{N,L}(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{u}^L\end{cases} \tag{26}$$

即预测输出 $\hat{y}(t+\tau)$ 对时间的各阶导数可以近似表示成 $\hat{u}$ 的多项式, 其中多项式系数的关系为

$$\begin{aligned}&q_{1,0}(\boldsymbol{x})=L_fq_{i-1,0}(\boldsymbol{x}),\qquad i=1,\cdots,N\\&q_{i,j}(\boldsymbol{x})=L_gq_{i-1,j-1}(\boldsymbol{x})+L_fq_{i-1,j}(\boldsymbol{x}),\\&\qquad i=1,\cdots,N,\ j=1,\cdots,L\end{aligned} \tag{27}$$

可见, $\hat{y}(t+\tau)$ 的各阶导数都表示成控制输入 $\hat{u}$ 的多项式形式, 将各阶导数中 $\hat{u}^i$ 项的系数表示为一个列向量

$$\boldsymbol{q}_{\cdot,i}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}q_{0,i}(\boldsymbol{x})\\q_{1,i}(\boldsymbol{x})\\\vdots\\q_{N,i}(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}$$

根据式 (27) 可以求出每个向量的具体表达式, 于是向量 $\boldsymbol{y}(t)$ 可重新记为

$$\boldsymbol{y}(t)=[\,\boldsymbol{q}_{\cdot,0}(\boldsymbol{x})\ \ \boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{q}_{\cdot,L}(\boldsymbol{x})]\begin{bmatrix}1\\\hat{u}\\\vdots\\\hat{u}^L\end{bmatrix}=Q(\boldsymbol{x})\hat{U} \tag{28}$$

容易得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\boldsymbol{y}(t)}{\partial\hat{u}}=Q(\boldsymbol{x})\frac{\partial\hat{U}}{\partial\hat{u}}=\\&\quad Q(\boldsymbol{x})\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&L&0\end{bmatrix}\hat{U}=Q(\boldsymbol{x})V\hat{U}\end{aligned} \tag{29}$$

将式 (28)、(29) 代入式 (25), 可得到在新的假设下最优预测控制律需满足

$$(Q(\boldsymbol{x})V\hat{U})^{\mathrm{T}}M(Q(\boldsymbol{x})\hat{U}-\boldsymbol{y}_d)+\mu_3T\hat{u}\ =0 \tag{30}$$

这是一个关于最优控制的 $2L-1$ 次幂方程. 考虑到系统 (1) 在平衡位置控制律为 0, 因此只需得到式 (30) 在 0 附近的解. 简单起见, 忽略 $\hat{u}$ 二次以上的高次项, 即令 $\hat{U}\approx\begin{bmatrix}I_2\\\boldsymbol{0}_{(N-1)\times2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\hat{u}\end{bmatrix}$, 代入式 (30), 可得近似方程

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}M\big(\boldsymbol{q}_{\cdot,0}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}_d\big)+\\&\big[\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})+\mu_3T\big]\hat{u}\ =0\end{aligned} \tag{31}$$

于是得到解析预测控制的近似解

$$\hat{u}^*(t+\tau)=-\frac{\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}M(\boldsymbol{q}_{\cdot,0}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}_d)}{\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})+\mu_3T},\tau\in[0,T]$$

取其初值, 即为非切换的解析 NMPC 控制律

$$u(t)=-\frac{\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}M(\boldsymbol{q}_{\cdot,0}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}_d)}{\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})+\mu_3T} \tag{32}$$

式 (32) 是一个状态反馈控制律, 它不需要考虑奇异点的问题, 因此对整个状态空间是一个连续的控制器.

2.3 解析预测控制下闭环系统的稳定性

对于鲁棒关系度为 r 的单输入单输出非线性系统, 在解析 NMPC 控制律 (32) 的作用下, 分别在奇

异空间及其补空间 (非奇异空间) 考察闭环系统的稳定性. 为了定量描述, 重新定义 N_s 空间为奇异点空间的一个闭包

$$N_s = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \,\big|\, |L_g L_f^{r-2} h(\boldsymbol{x})| \le \sigma\}$$

其中, σ 为一设定的正实数, 表示闭包空间的半径, 相应的其补空间为 $\overline{N}_s$.

2.3.1 非奇异空间闭环系统的稳定性

在 $\overline{N}_s$ 空间, $|L_g L_f^{r-2} h(\boldsymbol{x})| > \sigma$. 首先定义坐标变换

$$\begin{cases} z_1 = h(\boldsymbol{x}) - y_d \\ z_2 = L_f h(\boldsymbol{x}) - \dot{y}_d \\ \quad \vdots \\ z_{r-1} = L_f^{r-2} h(\boldsymbol{x}) - y_d^{(r-2)} \end{cases} \tag{33}$$

即为 $\boldsymbol{q}_{\cdot,0}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}^*$ 的前 $r-1$ 个元素. 新坐标表示的子系统的状态方程为

$$\mathrm{I}: \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \quad \vdots \\ \dot{z}_{r-2} = z_{r-1} \\ \dot{z}_{r-1} = L_f^{r-1} h(\boldsymbol{x}) - y_d^{(r-1)} + L_g L_f^{r-2} h(\boldsymbol{x}) u \end{cases} \tag{34}$$

可以得到定理 1.

定理 1. 在非切换解析 NMPC 控制律 (32) 作用下, 当满足条件

$$\frac{\mu_3 T}{\sigma^2} \ll M_{r,r}, \quad \frac{T^{r-2}}{\sigma^2} \ll M_{r,r} \tag{35}$$

(式中, 矩阵的下标表示对应的元素, 可用式 (24) 计算) 时, 式 (34) 所示的子系统 I 可以近似为一个线性系统, 其系统矩阵为

$$A_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1- \\ \dfrac{M_{r,1}}{M_{r,r}} & -\dfrac{M_{r,2}}{M_{r,r}} & -\dfrac{M_{r,3}}{M_{r,r}} & \cdots & -\dfrac{M_{r,r-1}}{M_{r,r}} \end{bmatrix} \tag{36}$$

从而子系统 I 稳定的必要条件是 A_{I} 的所有特征根均具有负实部, 即

$$\mathrm{Re}_{\max}(\lambda(A_{\mathrm{I}})) < 0 \tag{37}$$

其中, $\mathrm{Re}_{\max}(\lambda(A_{\mathrm{I}}))$ 表示矩阵特征根实部的最大值.

证明. 考虑 M 的基础组成 $\boldsymbol{\tau}(\tau) = [\,1 \quad \tau \quad \cdots \quad \dfrac{\tau^n}{n!}\,]^{\mathrm{T}}$, 对于一个列向量 $\boldsymbol{x}$, 可将其各个元素视为某一函数 $f(t)$ 的各阶导数, 那么根据泰勒定理知, $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 是函数 $f(t+\tau)$ 在 t 处的 n 阶泰勒展开, 即 $f(t+\tau) = \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \mathrm{o}(\tau^n)$, 等价为

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = f(t+\tau) - \mathrm{o}(\tau^n) \tag{38}$$

此处, 列向量 $\boldsymbol{x}$ 的各个元素显然要满足一定的关系, 因为前一个元素对时间的导数正是后面的一个元素. 现在考虑将 $\boldsymbol{x}$ 分块, 令 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ * \\ x_2 \end{bmatrix}$, 其中 $*$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的第 $m+1$ 个元素, 由式 (38), 易得

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ * \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = f(t+\tau) - \mathrm{o}(\tau^m) \tag{39}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ * \\ x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ * \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + (\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ * \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}) = \\ &\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ * \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \mathrm{o}(\tau^m) - \mathrm{o}(\tau^n) = \frac{\tau^m}{m!} \times * + \mathrm{o}(\tau^m) \end{aligned} \tag{40}$$

当 x_2 与确定的元素 $*$ 并不满足依次成导数的关系时, 因为元素 $*$ 的各阶导数很容易得到, 那么 x_2 就可以相应地进行分解, 然后依次类推, 那么式 (40) 总是成立, 即式 (40) 中 x_2 可以有更加自由的形式. 当 $\boldsymbol{x} \in \overline{N}_s$ 时, 根据式 (40) 及 $\boldsymbol{q}_{\cdot,0}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})$ 的表达式, 有

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x}) = L_g L_f^{r-2} h(\boldsymbol{x}) \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!} + \mathrm{o}(\tau^{r-1})$$

继而可证

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} M = \\ &\mu_1 \boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \Big|_{\tau=T} + \int_0^T \mu_2 \boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\tau = \\ &\mu_1 \left(L_g L_f^{r-2} h(\boldsymbol{x}) \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!} + \mathrm{o}(\tau^{r-1}) \right) \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \Big|_{\tau=T} + \\ &\int_0^T \mu_2 \left(L_g L_f^{r-2} h(\boldsymbol{x}) \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!} + \mathrm{o}(\tau^{r-1}) \right) \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\tau = \\ &L_g L_f^{r-2} h(\boldsymbol{x}) \left(\mu_1 \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!} \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \Big|_{\tau=T} + \right. \\ &\left. \int_0^T \mu_2 \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!} \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\tau \right) \mu_1 \mathrm{o}(T^{r-1}) + \mu_2 \mathrm{o}(T^{r-2}) = \\ &L_g L_f^{r-2} h(\boldsymbol{x}) M_{r,\cdot} + \mathrm{o}(T^{r-2}) \end{aligned}$$

同理可以证明

$$\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})=M_{r,r}\big(L_gL_f^{r-2}h(\boldsymbol{x})\big)^2+\mathrm{o}(T^{r-2})$$

$$\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}M(\boldsymbol{q}_{\cdot,0}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}_d)=$$
$$L_gL_f^{r-2}h(\boldsymbol{x})\left(\sum_{i=1}^{r-1}M_{r,i}z_i+M_{r,r}(L_f^{r-1}h(\boldsymbol{x})-y_d^{(r-1)})\right)+$$
$$\mathrm{o}(T^{r-2})$$

将上面两式代入解析 NMPC 控制律 (32), 可得

$$u=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{r-1}M_{r,i}z_i+M_{r,r}[L_f^{r-1}h(\boldsymbol{x})-y_d^{(r-1)}]+\frac{\mathrm{o}(T^{r-2})}{[L_gL_f^{r-2}h(\boldsymbol{x})]^2}}{M_{r,r}+\frac{\mu_3T}{[L_gL_f^{r-2}h(\boldsymbol{x})]^2}+\frac{\mathrm{o}(T^{r-2})}{[L_gL_f^{r-2}h(\boldsymbol{x})]^2}} \tag{41}$$

当满足条件 (35) 时, 式 (41) 可以近似为

$$u\approx-\sum_{i=1}^{r-1}\frac{M_{r,i}}{M_{r,r}}z_i-L_f^{r-1}h(\boldsymbol{x})-y_d^{(r-1)} \tag{42}$$

将式 (42) 代入子系统 I 的状态方程 (34), 定理 1 即可得证. □

2.3.2 奇异空间闭环系统的稳定性

当系统的状态落入到空间 N_s 中后, 将 $L_gL_f^{r-2}h(\boldsymbol{x})$ 近似为 0. 而由于系统具有鲁棒关系度 r, $L_gL_f^{r-1}h(\boldsymbol{x})\in\mathrm{o}(1)$. 类似于前面的分析, 首先在式 (33) 的基础上增加一个新的坐标

$$z_r=L_f^{r-1}h(\boldsymbol{x})-y_d^{(r-1)} \tag{43}$$

从而闭环系统在新坐标下的 r 阶子系统的状态方程为

$$\mathrm{II}:\begin{cases}\dot z_1=z_2\\ \quad\vdots\\ \dot z_{r-1}=z_r\\ \dot z_r=L_f^rh(\boldsymbol{x})-y_d^{(r)}+L_gL_f^{r-1}h(\boldsymbol{x})u\end{cases} \tag{44}$$

类似地可以得到定理 2.

定理 2. 在非切换解析 NMPC 控制律 (32) 作用下, 当满足条件

$$\begin{aligned}\frac{\mu_3T}{\big(L_gL_f^{r-1}h(\boldsymbol{x})\big)^2}&\ll M_{r+1,r+1}\\ \frac{T^{r-1}}{\big(L_gL_f^{r-1}h(\boldsymbol{x})\big)^2}&\ll M_{r+1,r+1}\end{aligned} \tag{45}$$

时, 式 (44) 所示的子系统 II 可以近似为一个线性系统, 其系统矩阵为

$$A_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\\frac{-M_{r+1,1}}{M_{r+1,r+1}}&\frac{-M_{r+1,2}}{M_{r+1,r+1}}&\frac{-M_{r+1,3}}{M_{r+1,r+1}}&\cdots&\frac{-M_{r+1,r}}{M_{r+1,r+1}}\end{bmatrix} \tag{46}$$

从而子系统 II 稳定的必要条件是: A_{II} 的所有特征根均具有负实部, 即

$$\mathrm{Re}_{\max}(\lambda(A_{\mathrm{II}}))<0 \tag{47}$$

证明过程同定理 1 的证明相同.

在假设 1 下, 因为系统的零动态是渐近稳定的, 所以当非线性系统子系统 II 稳定, 整个闭环系统就能够收敛到期望的平衡位置. 对于一个非线性系统, 选择 T、μ_1、μ_2 及 μ_3 等设计参数可以构造非切换的解析 NMPC 控制器. 如何选择上述设计参数才能保证闭环系统稳定且具有优越的响应特性, 定理 1 和定理 2 提供了理论依据.

2.3.3 预测时间及性能指标权值的选择

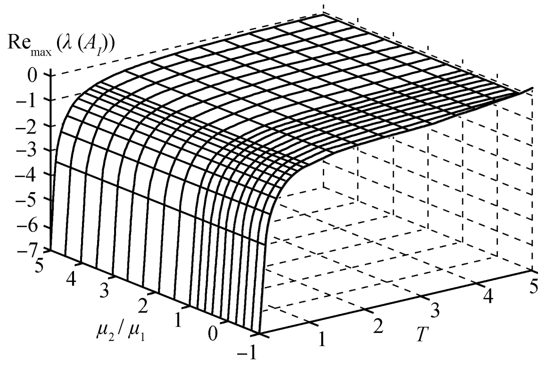
从以上分析中可见在非切换解析 NMPC 控制律 (32) 作用下, 如果满足条件 (35)、(37)、(45) 和 (47), 闭环系统就是稳定的, 其中条件 (35) 和 (45) 是系统做近似处理的条件, 相对较弱; 而条件 (37) 和 (47) 是决定性因素, 它们决定了闭环系统的稳定性, 同时 A_{I} 和 A_{II} 特征根的分布也决定了系统闭环响应特性.

注意到 A_{I} 和 A_{II} 由矩阵 M 确定, 因此, 控制器的设计要适当地选择参数 T、μ_1 和 μ_2. 图 1 (见下页) 为当 $r=4$ 时 A_{I} 和 A_{II} 特征根中最大实部与预测时间 T 及 μ_1 和 μ_2 比值的关系.

从图 1 中可以看出性能指标权值 μ_1 和 μ_2 的比值对系统设计影响不大, 起主要调节作用的是预测时间 T. T 越小, 两个系统矩阵特征根的实部愈小于 0, 所以闭环系统收敛速度会越快. 然而当 T 过小时, 会导致控制律过大, 因此可能造成系统超调量过大, 甚至不稳定; T 越大, 所有特征根仍然为负, 系统虽然能够保证稳定, 但是响应时间却可能会很大. 因此要适当选择预测时间 T.

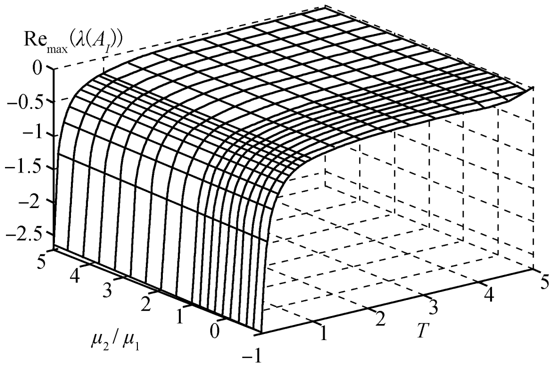
注意到 μ_1 和 μ_2 虽然可以实现对矩阵 M 的调节, 但是总体上调节作用非常小, 从而对于任意阶非线性系统, 其鲁棒关系度确定时, 解析 NMPC 控制律并不一定能够保证满足条件 (37) 和 (47), 那么闭

环系统的稳定性就不能保证. 容易验证对于鲁棒关系度高于 5 的系统, 条件 (47) 无法满足. 对于控制输入的加权项 μ_3, 为了能够满足条件 (35) 和 (45), 可以将其置为 0.



(a) 在 $A_{\rm I}$ 特征根的情况

(a) When the latent root is $A_{\rm I}$



(b) 在 $A_{\rm II}$ 特征根的情况

(b) When the latent root is $A_{\rm II}$

图 1 $r=4$ 时, $A_{\rm I}$ 和 $A_{\rm II}$ 特征根中最大实部与预测时间 T 及 μ_2/μ_1 的关系

Fig. 1 The relation between the maximum real parts of the latent roots of $A_{\rm I}$ and $A_{\rm II}$ and predictive time T and μ_2/μ_1 when $r=4$

3 仿真实验

例 1. 考虑文献 [9] 中的一个 SISO 非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_2+u\\ \dot{x}_2=4x_1+x_1u\\ \dot{x}_3=x_2\\ y=x_3\end{cases}$$

该非线性系统关系度不确定, 具有鲁棒关系度 $r=3$. 采用解析模型预测控制, 取预测时间 $T=1$, 泰勒展开级数 $N=3$, 系统初始状态 $\boldsymbol{x}^0$ 为 $(2,-2,2)^{\rm T}$, 期望输出 y_d 为 0.

文献 [9] 根据切换解析 NMPC (Switch ANMPC) 式 (22) 为该系统构造的切换解析 NMPC 控制律为

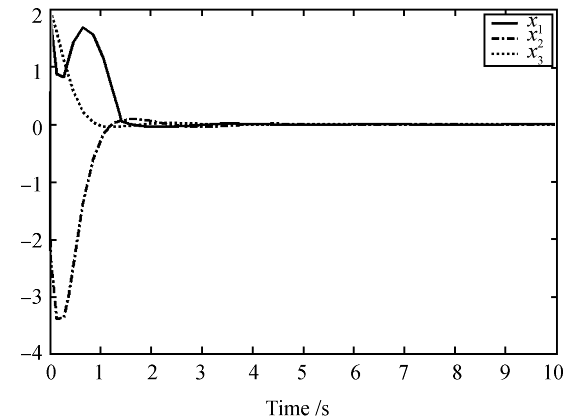
$$u=\begin{cases}-\dfrac{4x_1-\ddot{y}_d+6(x_2-\dot{y}_d)+15(x_3-y_d)}{x_1}, & \boldsymbol{x}\in\overline{N}_s\\ \dfrac{-(4-x_2)\pm\sqrt{(4-x_2)^2+4v}}{2}, & \boldsymbol{x}\in N_s\end{cases}$$

其中

$$N_s=\{|x_1|\le 0.05\}$$

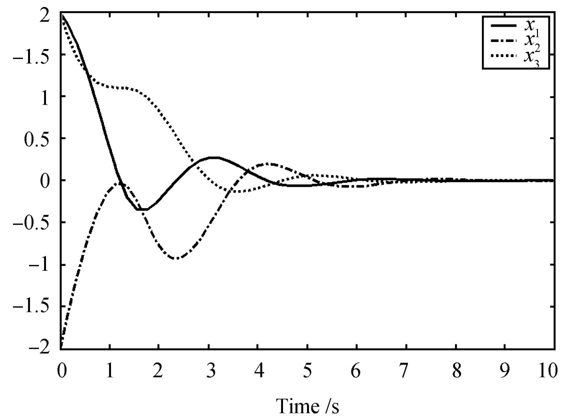
$$v=4x_2+y_d^{(3)}+3.5(\ddot{y}_d-4x_1)+\\ 8.4(\dot{y}_d-x_2)+10.5(y_d-x_3)$$

该切换解析 NMPC 作用下系统的状态轨迹如图 2 (a) 所示.



(a) 切换解析的情况

(a) Under switch analytic NMPC



(b) 非切换解析的情况

(b) Under non-switch analytic NMPC

图 2 切换和非切换解析 NMPC 作用下系统的状态轨迹

Fig. 2 The system's state tracks under switch and non-switch analytic NMPC

如采用本文方法为该系统构造非切换解析 NMPC 控制器, 取 $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.01$, $\mu_3 = 0$, 得到非切换解析 NMPC 控制律为

$$u = -\frac{\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} M(\boldsymbol{q}_{\cdot,0}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}_d)}{\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} M \boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x}) + \mu_3 T}$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} 1.0100 & 1.0050 & 0.5017 & 0.1671 \\ 1.0050 & 1.0033 & 0.5012 & 0.1670 \\ 0.5017 & 0.5012 & 0.2505 & 0.0835 \\ 0.1671 & 0.1670 & 0.0835 & 0.0278 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}_{\cdot,0} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ 4x_1 \\ -4x_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_{\cdot,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \\ 4 - x_2 \end{bmatrix}$$

如图 2 (b) 所示为本文非切换解析 NMPC 作用下系统的状态轨迹. 可见非切换解析 NMPC 对关系度不确定的非线性系统的控制是有效的, 且具有优越的闭环响应, 非切换的控制器也不必设置切换空间, 不会造成系统振荡. 尽管切换控制对本例也适用, 但是我们将通过另外一个例子 — 球杆非线性系统来验证非切换解析 NMPC 的适用范围将会更加广泛.

例 2. 考虑球杆非线性系统[2], 其状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = b x_1 x_4^2 - b g \sin x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u \\ y = x_1 \end{cases}$$

其中, x_1、x_2 、x_3 和 x_4 分别表示小球位移与速度和横杆的转角与角速度, $b = 5/7$, $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$. 球杆系统关系度不确定, 但具有鲁棒关系度 4.

$$\boldsymbol{q}_{\cdot,0}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}_d = \begin{bmatrix} X_1 - y_d \\ x_2 \\ b x_1 x_4^2 - b g \sin x_3 \\ b x_2 x_4^2 - b g x_4 \cos x_3 \\ b^2 x_1 x_4^4 + (b - b^2) g x_4^2 \sin x_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}_{\cdot,1}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 b x_1 x_4 \\ 4 b x_2 x_4 - b g \cos x_3 \end{bmatrix}$$

采用非切换解析 NMPC, 选取 $N = 4$, $T = 1$, 性能指标权值 $\mu_1 = 1$、$\mu_2 = 0.1$、$\mu_3 = 0$, 求得控制律式 (32) 中 M 为

$$M = \begin{bmatrix} 1.1000 & 1.0500 & 0.5167 & 0.1708 & 0.0425 \\ 1.0500 & 1.0333 & 0.5125 & 0.1700 & 0.0424 \\ 0.5167 & 0.5125 & 0.2550 & 0.0847 & 0.0211 \\ 0.1708 & 0.1700 & 0.0847 & 0.0282 & 0.0070 \\ 0.0425 & 0.0424 & 0.0211 & 0.0070 & 0.0018 \end{bmatrix}$$

对球杆系统采用文献 [9] 中切换解析 NMPC, 取 $\mu_1 = 1$、$\mu_2 = 0.1$、$\mu_3 = 0$, 求得向量 $\tilde{\boldsymbol{k}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{k}}'$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{k}} = [\, 54.6783 \;\; 29.4261 \;\; 7.5031 \;\; 1 \,]$$
$$\tilde{\boldsymbol{k}}' = [\, 24.2110 \;\; 24.1319 \;\; 12.0377 \;\; 4.0055 \;\; 1 \,]$$

另外,

$$b_1(\boldsymbol{x}) = L_f L_g L_f^{r-2} h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f^{r-1} h(\boldsymbol{x}) = 4 b x_2 x_4 - b g \cos x_3$$
$$b_2(\boldsymbol{x}) = 2 b x_1$$

设置切换空间为

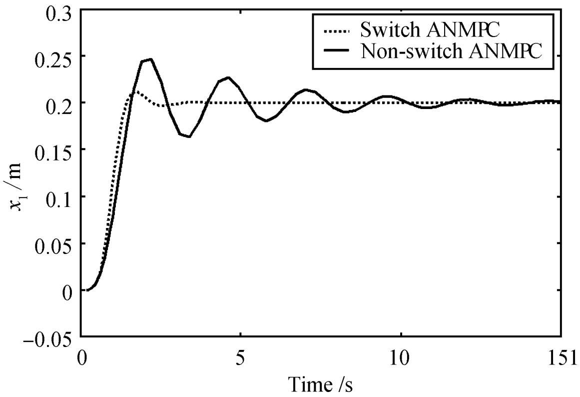
$$N_s = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \big| \; |L_g L_f^{r-2} h(\boldsymbol{x})| \le 0.001\}$$

另外对 $b_2(\boldsymbol{x}) = 0$ 与 $b_2(\boldsymbol{x}) \neq 0$ 之间的切换也作适当修改, 最终得到式 (21) 所示的切换解析 NMPC 控制律为

$$u = \begin{cases} -\dfrac{\tilde{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{p}_1}{L_g L_f^{r-2} h(\boldsymbol{x})}, & \boldsymbol{x} \in \overline{N}_s \\ -\dfrac{\tilde{\boldsymbol{k}}' \tilde{\boldsymbol{p}}_1}{b_1(\boldsymbol{x})}, & \boldsymbol{x} \in N_s, 2b|x_1| \le 0.01 \\ \dfrac{-b_1(\boldsymbol{x}) \pm \sqrt{b_1(\boldsymbol{x})^2 - 4 b_2(\boldsymbol{x}) \tilde{\boldsymbol{k}}' \tilde{\boldsymbol{p}}_1}}{2 b_2(\boldsymbol{x})}, & \\ \qquad \boldsymbol{x} \in N_s, 2b|x_1| > 0.01 & \end{cases}$$

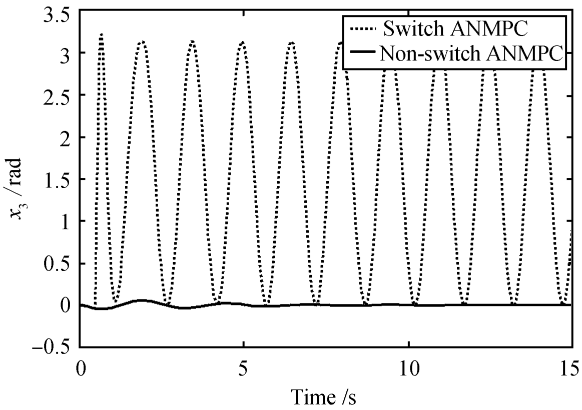
其中, $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\tilde{\boldsymbol{p}}_2$ 分别为向量 $\boldsymbol{q}_{\cdot,0}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}_d$ 的前 4 个和前 5 个元素.

仿真实验中, 初始状态为原点, 小球的期望平衡位置为 0.2 m, 图 3 和图 4 (见下页) 分别为两种方法下状态 x_1 与 x_3 的响应曲线以及控制律曲线 (切换和非切换解析 NMPC 在图中分别标记为 Switch ANMPC 和 Non-switch ANMPC). 从图 3 可以看出, 尽管需要振荡几次, 但本文非切换解析 NMPC



(a) x_1 的轨迹曲线

(a) The tracks of x_1

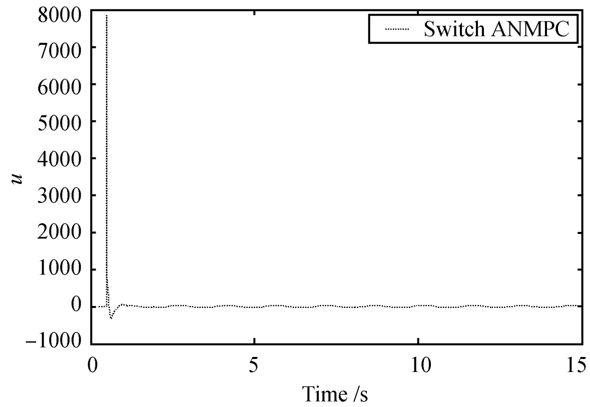


(b) x_3 的轨迹曲线

(b) The tracks of x_3

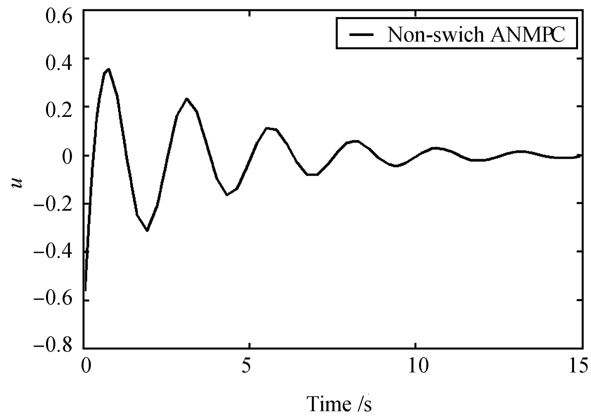
图 3 切换和非切换解析 NMPC 下球杆系统 x_1 和 x_3 的轨迹曲线

Fig. 3 The tracks of x_1 and x_3 when ball and beam system are under switch and non-switch analytic NMPC



(a) 切换解析情况时

(a) Under switch analytic NMPC



(b) 非切换解析情况时

(b) Under non-switch analytic NMPC

图 4 切换和非切换解析 NMPC 下球杆系统控制律变化曲线

Fig. 4 The tracks of control law when ball and beam system are under switch and non-switch analytic NMPC

下闭环系统稳定; 从 x_1 的轨迹曲线看, 似乎切换解析 NMPC 能使系统有更加优越的响应特性; 然而, 从 x_3 的轨迹曲线可见, 切换解析 NMPC 下, 横杆将以很大的摆角快速摆动, 这在实际中是不可能实现的; 另外从图 4 控制律的曲线中也可以看出, 切换解析 NMPC 方法需要的控制量很大, 这也显然是不可取的. 综上所述, 非切换解析 NMPC 比切换解析 NMPC 的适用范围更广.

4 总结

本文基于模型预测控制理论为关系度不确定非线性系统设计了一种非切换的解析 NMPC 控制新方法, 对 Chen 提出的切换解析 NMPC 做了改进. 在预测模型中加入控制律在预测时间段内恒为常数的假设, 从而更为简便地推导出关系度不确定非线性系统的非切换解析 NMPC 控制律, 并且此非切换解析 NMPC 控制无需在状态空间进行切换而具有更广泛的适用范围. 随后论证了在非切换解析 NMPC 控制律下, 通过坐标变换可以将闭环系统在关系度确定和不确定的两个状态空间中分别近似成阶数为 $r-1$ 和 r 的线性系统, 从而得出了非切换解析 NMPC 控制使闭环系统稳定的必要条件. 最后通过两个例子的仿真实验, 验证了切换解析 NMPC 适用性较差, 而本文提出的非切换解析 NMPC 控制不仅结构简单而且适用性强.

References

1 Isidori A. *Nonlinear Control Systems (Third Edition)*. New York: Springer-Verlag, 1995

2 Hauser J, Sastry S, Kokotovic P. Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam

example. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(3): 392−398

3 Chen W H, Balance D J. On a switching control scheme for nonlinear system with ill-defined relative degree. *Systems and Control Letters*, 2002, **47**(2): 159−166

4 Bryson A E, Ho Y C. *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control*. Washington D. C., USA: John Wiley and Sons, 1975

5 Xi Yu-Geng, Geng Xiao-Jun, Chen Hong. Recent advances in research on predictive control performance. *Control Theory and Applications*, 2000, **17**(4): 469−475
(席裕庚, 耿晓军, 陈虹. 预测控制性能研究的新进展. 控制理论与应用, 2000, **17**(4): 469−475)

6 Mayne D Q, Michalska H. Receding horizon control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(7): 814−824

7 Mayne D Q, Michalska H. An implementable receding horizon control for stabilization of nonlinear systems. In: Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control. Hawaii, USA: IEEE, 1990. 3396−3397

8 Chen W H, Allegower F. A Quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability. *Automatica*, 1998, **34**(10): 1205−1217

9 Chen W H. Analytic predictive controllers for nonlinear systems with ill-defined relative degree. *IEE Proceedings Control Theory Application*, 2001, **148**(1): 9−16

10 Chen W H, Ballance D J, Reilly J O. Model predictive control of nonlinear systems: computational burden and stability. *IEE Proceedings Control Theory Application*, 2000, **147**(4): 387−394

11 Chen W H, Balance D J, Gawthrop P J. Optimal control of nonlinear systems: a predictive control approach. *Automatica*, 2003, **39**(4): 633−641

张国银 2007 年于中山大学信息科学与技术学院获得硕士学位, 现为中兴通讯股份有限公司硬件设计工程师. 主要研究方向为非线性系统理论与方法.
E-mail: guoyin_1983@163.com
(**ZHANG Guo-Yin** Received his master degree at the School of Information Science and Technology, Sun Yat-Sen University in 2007, and now an engineer of hardware design at ZTE Telecommunication Equipment Corporation Limited. His research interest covers nonlinear systems theories and methods.)

杨 智 中山大学信息科学与技术学院教授. 主要研究方向为复杂系统建模与控制策略, 医学生理信号处理系统. 本文通信作者.
E-mail: issyz@mail.sysu.edu.cn
(**YANG Zhi** Professor at the School of Information Science and Technology, Sun Yat-Sen University. His research interest covers modeling and control methods for complex systems, and development of biomedical signal processing systems. Corresponding author of this paper.)

潭洪舟 中山大学信息科学与技术学院教授. 主要研究方向为系统辨识, 集成电路设计与信息处理.
E-mail: issthz@sysu.edu.cn
(**TAN Hong-Zhou** Professor at the School of Information Science and Technology, Sun Yat-Sen University. His research interest covers system identification, design of integrate circuit, and signal processing.)