

一种带有动态输出反馈控制器的网络控制系统的 Markov 跳变模型

刘磊明¹ 童朝南¹ 武延坤¹

摘要 对于网络控制系统 (Networked control systems, NCS) 中的随机延迟时变有界, 其上界大于一个采样周期的情况, 建立了带有动态输出反馈控制器的连续时间系统模型. 以此为基础, 应用连续时间系统模型离散化与增广状态空间方法, 建立了受控于有限状态 Markov 链的离散时间跳变系统模型. 在该系统的稳定性控制器设计中, 给出了一种求内点法的初始可行解的方法, 从而解决了所建模型的可解性问题. 理论分析和车载倒立摆上的仿真计算表明, 由上述模型与改进算法所给出的动态输出反馈控制器能使系统稳定.

关键词 网络控制系统, 随机延迟, 线性跳变系统, 动态输出反馈控制器

中图分类号 TP393

Markovian Jump Model of Networked Control Systems with Dynamic Output Feedback Controllers

LIU Lei-Ming¹ TONG Chao-Nan¹ WU Yan-Kun¹

Abstract When the random time-varying delays of networked control systems (NCSs) are bounded and the upper bound of the delays is longer than a sampling period, the model of continuous-time system with dynamic output feedback controllers is presented. Based on this, the model of continuous-time system is discretized and the augmented state-space method is employed to build a discrete-time jump system model governed by finite-state Markov chains. An approach to get the feasible initial solution of interior-point method is proposed in the design of stabilizing controllers, thereby the problem of solvability of the model is settled. Theoretical analysis and simulation on a cart and inverted pendulum show that the presented dynamic output feedback controllers can make the system stable.

Key words Networked control systems (NCS), random delays, jump linear system, dynamic output feedback controllers

网络控制系统 (Networked control systems, NCS) 是基于网络的实时闭环反馈控制系统, 目前越来越广泛地应用于工业控制的各个领域. 由于网络中信息源很多, 信息的传送要分时占用网络通信线路, 而网络的承载能力和通信带宽有限, 使得信息在传输过程中不可避免地存在信息包丢失 (丢包) 和延迟. 由于受到网络所采用的通信协议、负荷情况、网络传输速率和信息包大小等诸多因素的影响, 丢包或延迟会呈现出或定常或时变, 或确定或随机的差异; 相对于采样周期的长度, 或为长延迟, 或为短延迟. 同为随机延迟, 相继发生的延迟或相互独立, 或为条件相关. 网络诱导丢包和延迟导致系统性能下降甚至不稳定, 从而带来诸多关于 NCS 的研究课题.

最近几年, 在 NCS 的大量研究课题中, 出现了内容丰富且方法多样的讨论网络诱导丢包和延迟的文献. 文献 [1] 分析了能保持系统稳定的丢包率. 文献 [2] 在作动器节点用旧的控制信号通过简单外推法来补偿丢失的数据包. 文献 [3-4] 把丢包过程建成一个 Markov 跳变模型. 文献 [5] 把节点全时钟驱动的丢包过程建成一个 Markov 跳变模型, 并给出了一种判定稳定性的充分条件. 对于同时考虑丢包和延迟的情况, 文献 [6-7] 分别将 NCS 和带有不确定项的 NCS 建模为延迟系统, 并给出所论系统的一种稳定性判据. 文献 [8] 用一个离散时间方法研究了丢包和延迟. 在仅考虑控制器到被控对象处于网络中的情形下, 文献 [9] 讨论了随机丢包的最优控制.

对于带长延迟的 NCS, 文献 [10] 用增广状态空间方法, 把数字控制系统建成为离散时间线性跳变系统模型. 文献 [11] 把网络负载的高低作为 Markov 随机过程的状态. 文献 [12] 对于长延迟的情况给出最优控制律. 文献 [13-14] 讨论了 Markov 延迟并给出了随机最优控制律. 文献 [15] 建立了一个基于观测器的延迟控制系统, 相关算法适合于网络诱导延迟的补偿.

在已有文献中, 对于带有动态输出反馈控制器的长延迟 NCS 连续时间问题的模拟未见有报道; 关于网络带来的诱导延迟, 特别是对于传感器到控制器的延迟与控制器到作动器的延迟, 一些文献作了有条件的合并^[1, 8, 13] 或附加理想化的假设: 仅有前一延迟^[4, 10, 16] 或仅有后一延迟^[9], 从而使模型的建立与分析, 特别是求解得到根本性的简化. 但是, 对于带有动态输出反馈控制器的情况, 合并的条件并不成立; 而附加的理想化假设有失一般性. 在不做上述理想化假设的情况下, 本文对带有动态输出反馈控制器的 NCS 问题, 在其延迟界大于采样周期时, 应用离散化和增广状态空间方法, 建立了离散时间 Markov 线性跳变系统模型. 对于上述较复杂的一般性模型, 为了求使系统均方稳定的控制器增益, 本文给出了一种求内点法的初始可行解的方法. 模型和算法已成功应用于带长延迟的动态输出反馈控制器的车载倒立摆的仿真计算.

1 网络控制系统的结构与模型

1.1 网络控制系统的连续时间模型

控制系统一般结构如图 1 所示.

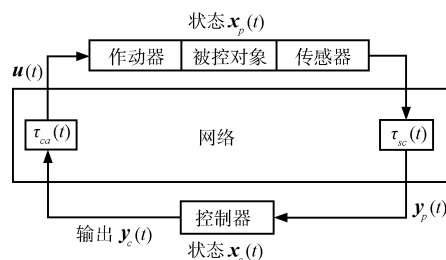


图 1 带延迟的网络控制系统的一般结构
Fig. 1 General structure of NCS with delays

设由传感器到控制器的延迟为 $\tau_{sc}(t)$, 控制器到作动器的延迟为 $\tau_{ca}(t)$. 据此, 可设控制对象模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) = A_p \mathbf{x}_p(t) + B_p \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_p(t) = C_p \mathbf{x}_p(t - \tau_{sc}(t)) \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期 2008-01-29 收修改稿日期 2008-12-23
Received January 29, 2008; in revised form December 23, 2008
北京市教委重点学科共建项目 (XK100080537) 资助
Supported by Key Discipline Project of Beijing Municipal Commission of Education (XK100080537)
1. 北京科技大学信息工程学院 北京 100083
1. School of Information Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.00627

其中, $\mathbf{x}_p(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^r$, $\mathbf{y}_p(t) \in \mathbf{R}^m$, 并且 A_p, B_p, C_p 是适维矩阵.

设控制器模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c(t) = A_c \mathbf{x}_c(t) + B_c \mathbf{y}_p(t) \\ \mathbf{y}_c(t) = C_c \mathbf{x}_c(t) + D_c \mathbf{y}_p(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}_c(t) \in \mathbf{R}^q$, $\mathbf{y}_c(t) \in \mathbf{R}^r$, 并且 A_c, B_c, C_c, D_c 是适维矩阵.

控制信号 $\mathbf{u}(t)$ 为

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{y}_c(t - \tau_{ca}(t)) \quad (3)$$

我们应该在网络诱导延迟条件下选择控制器的参数 A_c, B_c, C_c, D_c , 使系统满足一定性能要求.

1.2 网络控制系统的离散时间模型

以上是关于连续时间对象和连续时间控制的情况的描述. 我们应该给出相应等价的离散化形式. 为此, 我们首先给出如下假设和控制策略:

- 1) 控制系统的不同节点时钟同步, 数据包有时间戳;
- 2) 传感器, 控制器和作动器均为时钟驱动^[5, 15], 传感器有定常采样周期 h , 采样时刻为 $kh, k = 0, 1, \dots$;
- 3) 控制器与作动器的接收端各有一个接收缓冲器, 分别接收由传感器与控制器传送来的最新数据包;
- 4) 控制器总是应用最新数据计算控制信号;
- 5) 作动器总是应用最新控制信号, 直到更新的控制信号到达; 如果控制信号 $\mathbf{u}(t_i)$ 比 $\mathbf{u}(t_j)$ 晚到, 且 $i < j$, 则 $\mathbf{u}(t_i)$ 按丢包处理;

6) 随机延迟为有限状态时齐 Markov 过程.

本文将用到如下记号:

- 1) 函数 δ : $\delta(0) = 1$; $\delta(i) = 0$, 当 $i \neq 0$;
- 2) 在分块矩阵中, 用 $I, 0$ 分别记单位矩阵和零矩阵, 其阶数由适维性决定;
- 3) 延迟状态选择矩阵记为 $\tilde{C}_i = [I\delta(i), I\delta(i-1), \dots, I\delta(i-d)]$, 其总块数 $d+1$ 和每块阶数分别由延迟上界和适维性决定.

据假设 2)~5), 随机有界延迟 $\tau_{sc}(t)$ 与 $\tau_{ca}(t)$ 恰为采样周期 h 的整数倍, 即 $\tau_{sc}(t) = s_k \cdot h, s_k \in \theta_s = \{0, 1, \dots, d_s\}$, $\tau_{ca}(t) = a_k \cdot h, a_k \in \theta_a = \{0, 1, \dots, d_a\}$. 参照文献 [5], 也可把 s_k, a_k 看作丢包的数量, 从而把延迟与丢包的模拟一致起来. 据假设 6), $s_k, a_k, k = 0, 1, 2, \dots$ 为时齐 Markov 过程, 其状态集分别为 θ_s 和 θ_a . 由其时齐性, 可设延迟 $s_k, a_k, k = 0, 1, 2, \dots$ 的状态转移概率矩阵分别为随机矩阵 S, R : $S = (s_{ij}), d_s + 1$ 阶; $R = (r_{ij}), d_a + 1$ 阶.

由以上假设和说明, 离散化方程 (1), 可得到

$$\begin{cases} \mathbf{x}_p(t_{k+1}) = A_{p1} \mathbf{x}_p(t_k) + B_{p1} \mathbf{u}(t_k) \\ \mathbf{y}_p(t_k) = C_p \mathbf{x}_p(t_k - s_k h) \end{cases} \quad (4)$$

其中 $A_{p1} = e^{A_p h}, B_{p1} = \int_0^h e^{A_p(h-s)} B_p ds$. 再把式 (2) 离散化为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_c(t_{k+1}) = A_{c1} \mathbf{x}_c(t_k) + B_{c1} \mathbf{y}_p(t_k) \\ \mathbf{y}_c(t_k) = C_c \mathbf{x}_c(t_k) + D_c \mathbf{y}_p(t_k) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $A_{c1} = e^{A_c h}, B_{c1} = \int_0^h e^{A_c(h-s)} B_c ds$. 令增广的控制器状态变量为

$$\tilde{\mathbf{x}}_c(t_k) = [\mathbf{x}_c^T(t_k) \quad \mathbf{y}_c^T(t_{k-1}) \quad \dots \quad \mathbf{y}_c^T(t_{k-d_a})]^T \quad (6)$$

得

$$\tilde{\mathbf{x}}_c(t_{k+1}) = \tilde{A}_c \tilde{\mathbf{x}}_c(t_k) + \tilde{B}_c \mathbf{y}_p(t_k) \quad (7)$$

其中

$$\tilde{A}_c = \begin{bmatrix} A_{c1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_c = \begin{bmatrix} B_{c1} \\ D_c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

类似, 由式 (2) 和 (3) 可得

$$\mathbf{u}(t_k) = \tilde{C}_{a_k} \tilde{\mathbf{x}}_c(t_k) + \tilde{D}_{a_k} \mathbf{y}_p(t_k) \quad (8)$$

其中 $\tilde{C}_i = [C_c \delta(i), I\delta(i-1), \dots, I\delta(i-d_a)]$, $\tilde{D}_i = D_c \delta(i)$. 此处用 i 代替了式 (8) 中的 a_k .

下面讨论被控对象的离散时间模型的增广形式. 根据式 (4), 令

$$\tilde{\mathbf{x}}_p(t_k) = [\mathbf{x}_p^T(t_k) \quad \mathbf{x}_p^T(t_{k-1}) \quad \dots \quad \mathbf{x}_p^T(t_{k-d_s})]^T \quad (9)$$

从而得到被控对象的增广向量模型

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_p(t_{k+1}) = \tilde{A}_p \tilde{\mathbf{x}}_p(t_k) + \tilde{B}_p \mathbf{u}(t_k) \\ \mathbf{y}_p(t_k) = C_p \mathbf{x}_p(t_k - s_k h) = C_p \tilde{C}_{s_k} \tilde{\mathbf{x}}_p(t_k) \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\tilde{A}_p = \begin{bmatrix} A_{p1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_p = \begin{bmatrix} B_{p1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

由式 (6)~(10), 令

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k) = [\tilde{\mathbf{x}}_p^T(t_k) \quad \tilde{\mathbf{x}}_c^T(t_k)]^T \quad (11)$$

可得带动态输出反馈控制器的 NCS 的一般化的离散时间线性跳变系统模型

$$\mathbf{x}_{k+1} = (A + BK_{a_k} C_{s_k}) \mathbf{x}_k, \quad (s_k, a_k) \in \theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

其中 θ 为 θ_s 与 θ_a 的 Descartes 积, (s_k, a_k) 的转移概率矩阵 P 为 S 和 R 的 Kronecker 积 $P = S \otimes R$, 而

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_p \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{s_k} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_p \tilde{C}_{s_k} & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{a_k} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_c & \tilde{B}_c \\ \tilde{C}_{a_k} & \tilde{D}_{a_k} \end{bmatrix}$$

1.3 新模型的三个典型特例

我们再给出模型 (12) 的几种特例. 如果设共享网络仅插在传感器与控制器之间^[1, 10], 则模型 (12) 成为

$$\mathbf{x}_{k+1} = (A + BK_0 C_{s_k}) \mathbf{x}_k, \quad s_k \in \theta_s, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12a)$$

其中 $K_0 = \begin{bmatrix} A_{c1} & B_{c1} \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$.

文献 [10] 由数字控制器导出模型, 就 $\tau_{ca}(t) = 0$ 的情况给出了倒立摆的仿真. 如果用 $\mathbf{y}_c(t) = D_c \mathbf{y}_p(t)$ 代替式 (2), 即设为输出反馈情况, 则模型 (12) 成为

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\tilde{A}_p + \tilde{B}_p D_c C_p \tilde{C}_{\zeta_k}) \mathbf{x}_k, \quad \zeta_k \in \theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12b)$$

其中 $\theta = \{0, 1, \dots, d\}$, $d = d_s + d_a$.

此间接证明了: 在本文的假设与输出反馈的情况下, 延迟 $\tau_{sc}(t_k)$ 与 $\tau_{ca}(t_k)$ 可以合并. 如果进一步设 C_p 为可逆矩阵, 则模型 (12b) 成为状态反馈情况. 文献 [13] 在应用增广状态向量的形式下, 给出了该问题的最优控制律.

更特殊地, 当网络仅插在传感器与控制器之间, 且取状态反馈控制器 $\mathbf{u}(t_k) = K_{s_k} \mathbf{x}_p(t_k - s_k h)$, 可得

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\tilde{A}_p + \tilde{B}_p K_{s_k} \tilde{C}_{s_k}) \mathbf{x}_k, \quad s_k \in \theta_s, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12c)$$

这也是一个离散时间线性跳变系统. 其中 K_{s_k} 的取法可以是模式相关或模式独立的.

以上分析表明: 模型 (12) 是模型 (12a), (12b), (12c) 的发展, 又是它们的统一和一般化.

2 线性跳变系统的稳定性分析

我们已建立了带长延迟的 NCS 的离散时间 Markov 跳变系统模型 (12). 设 θ 的元素个数为 $d + 1$, 可把转移概率矩阵为 $P = (p_{ij})$ 的模型 (12) 简写成

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_{s_k} \mathbf{x}_k, \quad s_k \in \theta = \{0, 1, \dots, d\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

设 s_k 和 \mathbf{x}_k 的初始状态 s_0 和 \mathbf{x}_0 已知, k 时刻 Markov 延迟状态的概率分布向量记为

$$\boldsymbol{\pi}(k) = [\pi_0(k), \dots, \pi_d(k)], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

而向量 $\boldsymbol{\pi}(0) = \boldsymbol{\pi}_0$ 为 s_0 的概率分布. 从而 $\boldsymbol{\pi}(k+1) = \boldsymbol{\pi}(k)P$, $P = (p_{ij})$, 其中

$$p_{ij} = \text{Prob}\{s_{k+1} = j | s_k = i\}, \quad i, j = 0, 1, \dots, d \quad (15)$$

按所给假设和控制策略 4) 和 5), 当 $j > i + 1$ 时,

$$p_{ij} = \text{Prob}\{s_{k+1} = j | s_k = i\} = 0 \quad (16)$$

而由状态 s_k 到状态 s_{k+1} , 延迟减少的数量没有限制. 又由转移概率矩阵性质, 有 $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $i, j \in \theta$; $\sum_{j=0}^d p_{ij} = 1$, $i \in \theta$.

为了讨论离散时间线性跳变系统的稳定性问题, 本文引用文献 [17–18] 的定义和三个定理. 在此基础上, 我们给出了一个用于求问题 (13) 的稳定化控制器的初始值的定理 4. 下述的稳定性均指系统的平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的稳定性.

定义 1. 系统 (13) 是随机稳定的, 如果对于每个初始状态 \mathbf{x}_0 , $s_0 \in \theta$, 存在一个仅与 \mathbf{x}_0 , s_0 有关的有限数值 $N(\mathbf{x}_0, s_0) > 0$, 使 $\lim_{K \rightarrow \infty} E\{\sum_{k=0}^K \|\mathbf{x}_k(\mathbf{x}_0, s_0)\|^2 | \mathbf{x}_0, s_0\} \leq N(\mathbf{x}_0, s_0)$.

定义 2. 系统 (13) 是均方稳定的, 如果对于每个初始状态 \mathbf{x}_0 , $s_0 \in \theta$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\|\mathbf{x}_k(\mathbf{x}_0, s_0)\|^2 | \mathbf{x}_0, s_0\} = 0$.

关于随机稳定性有如下定理:

定理 1^[17]. 对于系统 (13), 根据定义 1 的随机稳定性与根据定义 2 的均方稳定性是等价的.

定理 2^[18]. 系统 (13) 均方稳定的充要条件为: 存在对称正定矩阵 Q_0, \dots, Q_d , 使式 (17) 成立.

$$Q_j - \sum_{i=0}^d p_{ji} A_i^T Q_i A_i > 0, \quad j = 0, 1, \dots, d \quad (17)$$

以下记矩阵 A 的谱半径为 $\rho(A)$.

定理 3^[18]. 记 $A = XY$. 其中 X 为 P^T 与 I_{u^2} 的 Kronecker 积: $X = P^T \otimes I_{u^2}$, u 是 A_i 的阶数. 而 $Y = \text{diag}\{\hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_d\}$, $\hat{A}_i = A_i \otimes A_i$, $i = 0, 1, \dots, d$, 则系统 (13) 均方稳定等价于

$$\rho(A) < 1 \quad (18)$$

现在我们给出求解系统 (13) 的稳定化控制器中将会用到的定理 4.

定理 4. 如果有 A_j ($j = 0, 1, \dots, d$) 中的某 A_i 使 $\rho(A_i) < 1$, 当 P 的各行均为 $(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_d)$ 时, 则存在非负数 $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_d$, $\sum_{i=0}^d \eta_i = 1$, 使定理 3 中的 $\rho(A) < 1$. 因此, 如果能求得某个 A_i , 使 $\rho(A_i) < 1$, 则从均方稳定的意义上, 可求得问题 (13) 的一个稳定化控制器.

证明. 通过 $A = XY$ 求得 A 的展开式, 再由矩阵特征值的定义可得

$$\rho(A) = \rho(\eta_0 \hat{A}_0 + \eta_1 \hat{A}_1 + \dots + \eta_d \hat{A}_d) \quad (19)$$

由矩阵的 Kronecker 积的特征值的性质, 当有 A_j , $j = 0, 1, \dots, d$ 中的某 A_i 使 $\rho(A_i) < 1$ 时, 也有 $\rho(\hat{A}_i) < 1$. 当取 $\eta_i = 1$, $\eta_j = 0$ ($j \neq i$), 根据式 (19) 得 $\rho(A) < 1$.

更进一步, 由于 $\rho(A)$ 连续依赖于 A 的元素, 而式 (19) 表明, $\rho(A)$ 也连续依赖于 $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_d$. 这样, 能得到不同于 $\eta_i = 1, \eta_j = 0$ ($j \neq i$) 的 $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_d$, 使 $\rho(A) < 1$ 成立. 应用定理 3, 即得到问题 (13) 的均方稳定意义上的初始可行解. \square

由问题 (12) 与问题 (13) 的关系可以看出, 本节的结果都适合于求解动态输出反馈问题 (12).

总之, 当模型 (12) 中的表示对象结构和 Markov 延迟结构的参数确定后, 均方稳定控制器的设计问题是: 找控制器参数矩阵 A_c, B_c, C_c, D_c , 使满足定理 2 的条件 (17). 由于式 (17) 是式 (12) (或式 (13)) 存在均方稳定控制器的充要条件, 因此, 可由式 (17) 是否有解来判断一个带有 Markov 延迟的 NCS 是否有均方稳定化的控制器. 以上是关于带有 Markov 延迟的 NCS 的解的存在性问题.

3 保证系统稳定的设计与算法

3.1 算法的一般性描述

对于给定的 $P = (p_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, d$, 定理 2 所述的条件可以保证系统 (13) 均方稳定, 而均方稳定则几乎必然稳定^[17].

式 (17) 关于 Q_j 是线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI); 关于 A_j 是二次矩阵不等式. 应用 Schur 补^[10, 19], 式 (17) 关于 A_j 也可以变成 LMI 问题. 因此, 可把式 (17) 的求解过程设计成依次求 A_j 和 Q_j 的凸的或拟凸最优化问题; 问题的凸性可以保证内点法能求得全局最优解.

3.2 初始可行解的求解方法

我们已把模型 (13) 的稳定化动态输出反馈控制器的求解问题归结为关于 $Q_j > 0$, A_j 的矩阵不等式 (17) 的求解问

题. 本文给出了如下的求该类问题的初始可行解方法. 这是内点法较困难的一个关键步骤.

首先, 为了求 $A_j, j = 0, 1, \dots, d$ 的初始值, 应先求动态输出反馈网络控制问题的控制器参数 A_c, B_c, C_c, D_c 的初始值. 为此, 由问题 (1)~(3) 的不经网络的控制问题, 可得增广的闭环系统

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C})\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (20)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{x}_p^T(t), \mathbf{x}_c^T(t)]^T, \hat{A} = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & B_p \\ I & 0 \end{bmatrix},$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_p & 0 \end{bmatrix}, \hat{K} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}.$$

其次, 应用特征结构配置方法^[20], 求出保证系统 (20) 渐近稳定的 A_c, B_c, C_c, D_c , 由此得到了可用于式 (17) 的关于 $A_j, j = 0, 1, \dots, d$ 部分的初始值.

最后, 在此基础上, 我们应该求出正定矩阵 $Q_j, j = 0, 1, \dots, d$, 使两组矩阵一起成为式 (17) 的初始可行解.

对于一般的网络延迟特性参数 S, R , 这是一个困难的问题. 由定理 4, 我们取特殊的随机矩阵 S_0, R_0 作为 S, R 的初始值, 从而求得式 (17) 的初始可行解. 以下应在可行域内求对应于随机矩阵 S, R 的实测值 S_E, R_E 的使系统 (12) 均方稳定的控制器参数 A_c, B_c, C_c, D_c . 在此步计算中, 本文应用了 V-K 算法^[10].

关于方法的有效性, 在几种带有不同的 Markov 延迟结构的车载倒立摆的仿真计算中, 我们都得到了所要求的控制器参数矩阵, 有关计算见下一节实例.

4 实例

对于如图 2 所示的车载倒立摆的网络控制问题, 在其网络诱导延迟受控于 Markov 链的情况下, 我们对系统进行了模拟计算.

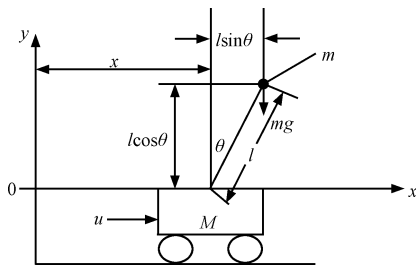


图 2 车载倒立摆示意图

Fig. 2 Cart and inverted pendulum

在此图形中, 据文献 [21], 设小车质量为 $M = 2 \text{ kg}$, 摆的质量为 $m = 0.1 \text{ kg}$, 摆的长度为 $l = 0.5 \text{ m}$. 取采样周期为 $h = 0.075 \text{ s}$. 小车位置为 $x \text{ m}$, 摆的偏角为 $\theta \text{ rad}$. 令 $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = x, x_4 = \dot{x}$, 可取 $\mathbf{y}_p^T = [x_1 \ x_3]$, 得控制对象模型式 (1): $\mathbf{x}_p = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$, 而

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

设控制器模型式 (2): $A_c \in \mathbf{R}^{4 \times 4}, B_c \in \mathbf{R}^{4 \times 2}, C_c \in \mathbf{R}^{1 \times 4}, D_c \in \mathbf{R}^{1 \times 2}$ 为待求的控制器参数.

为求 A_c, B_c, C_c, D_c 的初值, 对于不经网络的控制问题, 建立增广的闭环系统 (20).

设 $d_s = 2, d_a = 1$ (因此 $d = 5$, 模式矩阵阶数为 17, 矩阵个数为 6). 我们用特征结构配置方法求得 A_c, B_c, C_c, D_c 的初值

$$A_{c0} = \begin{bmatrix} -9.2494 & -0.4193 & -2.6688 & 5.3446 \\ 3.7808 & -2.9813 & -1.7156 & -7.4121 \\ -0.1826 & -0.1750 & -1.3528 & -0.8485 \\ 0.9771 & 1.4214 & 2.2289 & 1.9834 \end{bmatrix}$$

$$B_{c0}^T = \begin{bmatrix} -115.452 & 101.23 & -0.3295 & -25.531 \\ 14.3983 & -2.8959 & 1.4514 & -3.6812 \end{bmatrix}$$

$$C_{c0} = [2.1458 \quad -0.0014 \quad 0.5604 \quad -1.5084]$$

$$D_{c0} = [49.0174 \quad -3.3839]$$

使得系统 (20) 渐近稳定. 以此作为控制参数的初值, 求得 $A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}, A_{20}, A_{21}$ 的初值. 设系统的延迟状态转移概率矩阵 S_E, R_E 分别为

$$\begin{bmatrix} 0.590 & 0.410 & 0.00 \\ 0.565 & 0.415 & 0.02 \\ 0.580 & 0.400 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (21)$$

取其初值 S_0, R_0 分别为

$$\begin{bmatrix} 0.58 & 0.40 & 0.02 \\ 0.58 & 0.40 & 0.02 \\ 0.58 & 0.40 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (22)$$

取适当扰动方式, 经 35 次 V-K 迭代, 式 (22) 变成式 (21); 由初值 $A_{c0}, B_{c0}, C_{c0}, D_{c0}$ 求得了使系统均方稳定的控制器参数 A_c, B_c, C_c, D_c .

对于任意给定的初始概率分布向量 $\boldsymbol{\pi}_0$, 由于延迟的状态转移概率矩阵为 $P_E = S_E \otimes R_E$, 所以各个 t_k 时刻的延迟概率分布律为 $\boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_0 P_E^k, k = 0, 1, \dots, L$. 其中 L 为最大控制时长. 当给定摆的初始状态 $\mathbf{x}_0 = [0.15 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ (即摆的初始偏角为 0.15 rad, 实际应用时 \mathbf{x}_0 应扩为 17 维), 初始概率分布向量 $\boldsymbol{\pi}_0 = [0.15 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.15 \ 0.1 \ 0.1]$ 时, 得到的闭环系统的初始条件响应曲线如图 3 所示. 改变上述的 $\boldsymbol{\pi}_0$ 值及初始条件 \mathbf{x}_0 , 经多次试算, 都能得到与图 3 类似的响应曲线.

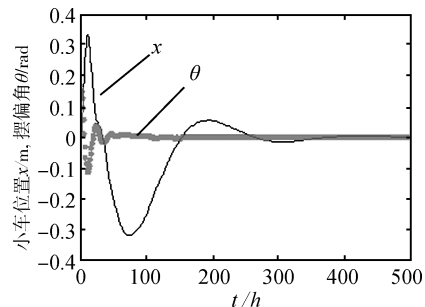


图 3 带 Markov 延迟的 NCS 的初始条件响应

Fig. 3 Initial condition response of NCS with Markov delays

此外, 对于 $d_s = 2, d_a = 2$ (因此 $d = 8$, 模式矩阵阶数为 18, 矩阵个数为 9), 当系统的延迟状态转移概率矩阵 S_E, R_E

分别为 $\begin{bmatrix} 0.590 & 0.410 & 0.00 \\ 0.545 & 0.425 & 0.03 \\ 0.580 & 0.400 & 0.02 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0.660 & 0.340 & 0.00 \\ 0.640 & 0.340 & 0.02 \\ 0.630 & 0.340 & 0.03 \end{bmatrix}$

的情况, 我们依次取 $h = 10 \text{ ms}$, $h = 20 \text{ ms}$ 和 $h = 30 \text{ ms}$, 都得到了使系统均方稳定的动态输出反馈控制器参数. 我们还在其他倒立摆^[10]上成功进行了上述仿真计算.

5 结论

对于带有长延迟的网络控制系统, 我们建立了带有动态输出反馈控制器的 NCS 模型, 并应用离散化与增广状态空间方法, 建立了受控于 Markov 链的离散时间线性跳变系统模型.

与状态反馈、静态输出反馈的 NCS 问题比较起来, 带有动态输出反馈控制器的 NCS 问题其模型结构复杂: 通过文中的讨论可知, 对于此种控制系统, 当反馈回路也处于网络中时, 传感器到控制器, 控制器到作动器这两种延迟是不可合并的. 这将使两种延迟模式数不是求和, 而是求积. 模式矩阵个数因求积而增多, 模式矩阵阶数因二次增广而变大.

对于所建立的模型, 我们给出了一种内点法的求初始可行解的方法, 完成了算法的理论分析和车载倒立摆上的仿真验证.

倒立摆的稳定性控制问题的控制对象是一个四维向量, 并取四维控制器向量. 当取 $d_s = d_a = 2$ 时, 增广模式阵为 18 阶, 模式阵的个数为 9 个, 设计变量的个数为 30, 因此规模较大. 这样, 数值例子的求解用到了模型和算法的主要功能, 数值计算结果反映了模型和算法的普遍适用性.

References

- Zhang W. Stability Analysis of Networked Control Systems [Ph.D. dissertation], Case Western Reserve University, USA, 2001
- Tian Y C, Levy D. Compensation for control packet dropout in networked control systems. *Information Sciences: an International Journal*, 2008, **178**(5): 1263–1278
- Xiong J L, Lam J. Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss. *Automatica*, 2007, **43**(1): 80–87
- Ma Wei-Guo, Shao Cheng. Stochastic stability for networked control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(8): 878–882
(马卫国, 邵诚. 网络控制系统随机稳定性研究. *自动化学报*, 2007, **33**(8): 878–882)
- Wu J, Chen T W. Design of networked control systems with packet dropouts. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(7): 1314–1319
- Yue D, Han Q L, Chen P. State feedback controller design of networked control systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2004, **51**(11): 640–644
- Yue D, Han Q L, Lam J. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty. *Automatica*, 2005, **41**(6): 999–1007
- Garcia-Rivera M, Barreiro A. Analysis of networked control systems with drops and variable delays. *Automatica*, 2007, **43**(12): 2054–2059
- Xiao Jun, Xu Hong-Bing, Zhu Ying. Solvability conditions for Riccati equations of optimal control with random packet losses. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(4): 373–377
(肖俊, 徐红兵, 祝颖. 带有随机丢包的最优控制中 Riccati 方程解存在的条件. *自动化学报*, 2007, **33**(4): 373–377)
- Xiao L, Hassibi A, How J P. Control with random communication delays via a discrete time jump systems approach. In: *Proceedings of the 2000 American Control Conference*. Chicago, USA: IEEE, 2000. 2199–2204
- Nilsson J. Real-time Control Systems with Delays [Ph.D. dissertation], Lund Institute of Technology, Sweden, 1998
- Hu S S, Zhu Q X. Stochastic optimal control and analysis of stability of networked control systems with long delay. *Automatica*, 2003, **39**(11): 1877–1884
- Yu Zhi-Xun, Chen Hui-Tang, Wang Yue-Juan. Research on Markov delay characteristic-based closed loop network control system. *Control Theory and Applications*, 2002, **19**(2): 263–267
(于之训, 陈辉堂, 王月娟. 基于 Markov 延迟特性的闭环网络控制系统研究. *控制理论与应用*, 2002, **19**(2): 263–267)
- Ma C L, Fang H J. Research on mean square exponential stability of networked control systems with multi-step delay. *Applied Mathematical Modelling*, 2006, **30**(9): 941–950
- Luck R, Ray A. An observer-based compensator for distributed delays. *Automatica*, 1990, **26**(5): 903–908
- Li S B, Sun Y X. New approach to stochastic stability and controller design for networked control systems. *Journal of Control Theory and Applications*, 2005, **3**(3): 241–246
- Ji Y, Chizeck H J, Feng X, Loparo K. Stability and control of discrete-time jump linear systems. *Control Theory and Advanced Technology*, 1991, **7**(2): 247–270
- Costa O L V, Fragoso M D. Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1993, **179**(1): 154–178
- Boyd S, El-Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994
- Duan Guang-Ren. *Theory of Linear Systems*. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1998
(段广仁. 线性系统理论. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1998)
- Lou Shun-Tian, Yu Wei. *Systems Analysis and Design Based on Matlab — Control Systems*. Xi'an: Xidian University Press, 2000
(楼顺天, 于卫. 基于 Matlab 的系统分析与设计 — 控制系统. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2000)

刘磊明 北京科技大学信息工程学院讲师. 主要研究方向为基于网络的控制系统的、非线性系统辨识与控制. 本文通信作者.

E-mail: leiming.liu@163.com

(LIU Lei-Ming Lecturer at University of Science and Technology Beijing. Her research interest covers networked control systems, and nonlinear system identification and control. Corresponding author of this paper.)

童朝南 北京科技大学信息工程学院教授. 主要研究方向为轧钢生产过程智能控制、基于网络的控制系统的. E-mail: tcn@ies.ustb.edu.cn

(TONG Chao-Nan Professor at University of Science and Technology Beijing. His research interest covers intelligent control in steel rolling process and networked control systems.)

武延坤 北京科技大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为非线性系统辨识与控制. E-mail: 2003wyk@sohu.com

(WU Yan-Kun Ph.D. candidate at University of Science and Technology Beijing. Her research interest covers nonlinear system identification and control.)