第 29 卷 第 5 期 昆 明 理 工 大 学 学 报 (理 工 版) Vol.29 No.5
2004 年 10 月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Oct. 2004

方差分量模型中回归系数的线性估计的可容许性

吴刘仓[1], 李会琼[2]
(1. 昆明理工大学 理学院,云南 昆明 650093; 2. 云南师范大学 数学学院,云南 昆明 650092)

摘要: 考虑方差分量模型 $EY = X\beta$, $COV(Y) = \sum_{i=1}^{m}\theta_i V_i$,其中 $n \times p$ 矩阵X和非负定矩阵V_i($i = 1,2,\cdots,m$)都是已知的,$\beta \in R^p$,$\theta_i \geq 0$ 或 $\theta_i > 0$($i = 1,2,\cdots,m$)均为参数.在本文中,我们在二次损失下,当 $\mu(V_1 : V_2 : \cdots : V_m : X) = R^n$ 时,给出了关于可估函数 $S\beta$ 的线性估计在线性估计类中可容许性的充要条件.

关键词: 可容许性; 线性回归; 线性模型
中图分类号: 212.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2004)05-0140-04

Admissibility of Linear Estimators of Regression Coefficient in a Variance Component Model

WU Liu-cang[1], LI Hui-qiong[2]
(1. Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China;
2. Faculty of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China)

Abstract: The variance component model $EY = X\beta$, $COV(Y) = \sum_{i=1}^{m}\theta_i V_i$, where X: nxp and $V_i \geqslant 0$($i = 1,2,\cdots, m$) are known, and $\beta \in R^p$, $\theta_i \geq 0$ and $\theta_i > 0$($i = 1,2,\cdots,m$) are parameters. When $\mu(V_1 : V_2 : \cdots : V_m : X) = R^n$, the sufficient and necessary conditions for a linear estimable estimator of $S\beta$ to be admissible in the class of all linear estimators are given under quadratic loss function.

Key words: admissibility; linear regression; liner model

0 引 言

对于方差分量模型

$$\begin{cases} EY = X\beta \\ COV(Y) = \sum_{i=1}^{m}\theta_i V_i \end{cases} \tag{1}$$

其中 X 为已知的$n \times p$ 阶矩阵,$V_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m$ 已知,$\beta \in R^p$,$\theta_i \geqslant 0$ 或 $\theta_i > 0, i = 1,2,\cdots, m$ 都是参数.我们要估计线性可估函数 $S\beta$,S 为已知的 kxp 阶矩阵,选取估计类:

$L_1 = \{LY : L$ 为 kxn 阶矩阵$\}$

$L_2 = \{LY + a : L$ 为 kxn 阶矩阵,$a \in R^k\}$

取损失函数为二次损失函数:

$$L(d, S\beta) = (d - S\beta)'(d - s\beta) \tag{2}$$

关于模型(1),在二次损失函数(2)及 $X\beta$ 的 Gauss-Markoff 估计存在的假定下,1987 年叶慈南[1] 在 $V_i > 0$($i = 1,2,\cdots,m$)和 $X = I_n$,给出 $q'Y$(q 为 n 维向量)是 $p'\beta$ 在齐次线性估计类中可容许的一个必要条件和一个充分条件;1990 年侯景臣[2] 在二次损失下,当 $k = 1$ 时,给出了 LY 在L_1 中是 $S\beta$ 的容许估计的

收稿日期: 2004-01-04.
第一作者简介: 吴刘仓(1976.3~),男,在读博士研究生,讲师. 主要研究方向: 数理统计.

充要条件;当 $k > 1$ 时,只给出了 LY 在 L_1($LY + a$ 在 L_2) 中是 $S\beta$ 的容许估计的一个充分条件;1991 年徐兴忠[3] 将这一问题深入研究,给出了在 L_1(在 L_2) 中是 $S\beta$ 的容许估计的充要条件.

去掉 $X\beta$ 的 Gauss - Markoff 估计的存在之假定,1998 年孙卓昕、徐兴忠[5] 在 $V = \sum_{i=1}^{m} V_i > 0$ 及二次损失(2) 下,给出了 LY 在 L_1($LY + a$ 在 L_2) 中是 $S\beta$ 的容许估计的充要条件,运用此结果,得到了共同均值模型中 $S\beta$ 线性估计在线性估计类中是可容许估计的充要条件.本文在模型(1) 和损失函数(2) 下,当 $\mu(V_1 : V_2 : \cdots : V_m : X) = R^n$ 时,得出了 LY 在 L_1($LY + a$ 在 L_2) 中是 $S\beta$ 的可容许估计的充要条件.

1　主要结果及证明

1.1　L_1 中的可容许性

定义 1　设 $\mathscr{R}$ 是 R^n 的非空子集.如果对任意的 $x, y \in \mathscr{R}$ 和实数 $a \in (0,1)$ 都有 $ax + (1-a)y \in \mathscr{R}$,则称 $\mathscr{R}$ 为 R^n 中的凸集

引理 1 设

$$W_i = \{M : \mathrm{tr}MV_iM' \leq \mathrm{tr}LV_iL'\} \qquad i = 1,2,\cdots,m,$$
$$\Omega = \{M : (MX - S)')(MX - S) \leq (LX - S)'(LX - S)\}$$

则 W_i, Ω 皆为凸集,$i = 1,2,\cdots,m$.

证明:由凸集定义,可得.

引理 2　在模型(1) 和损失函数(2) 下,设 $S\beta$ 可估,$\mu(V_1 : V_2 : \cdots : V_m : X) = R^n$,则 LY 在 L_1 中是 $S\beta$ 的可容许估计的充要条件是$(\bigcap_{i=1}^{m} W_i) \cap \Omega = \{L\}$.

证明:LY 在 L_1 中是 $S\beta$ 的可容许估计

$\Leftrightarrow$　不存在 M,使 MY 优于 LY

$\Leftrightarrow$　不存在 M,M 满足

$$\begin{cases} \mathrm{tr}MV_iM' \leq \mathrm{tr}LV_iL', i = 1,2,\cdots,m \\ (MX - S)'(MX - S) \leq (LX - S)'(LX - S) \end{cases} \tag{3}$$

且使(3) 中 $m + 1$ 个不等式至少有一个不成立等号.

充分性:若$(\bigcap_{i=1}^{m} W_i) \cap \Omega = \{L\}$,则不存在不等于 L 的 M 满足(3),则 LY 可容许.

必要性:反证法.假设存在 $L_1 \neq L, L_1 \in (\bigcap_{i=1}^{m} W_i) \cap \Omega$

则

$$\mathrm{tr}(\frac{L + L_1}{2})V_i(\frac{L + L_1}{2})' = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}LV_iL' + \mathrm{tr}L_1V_iL'_1) - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(L - L_1)V_i(L - L_1)'$$
$$\leq \mathrm{tr}LV_iL'$$

当且仅当$(L - L_1)V_i \neq 0$ 时,有

$$\mathrm{tr}(\frac{L + L_1}{2})V_i(\frac{L + L_1}{2})' < \mathrm{tr}LV_iL' \qquad i = 1,2,\cdots,m.$$

又

$$(\frac{L + L_1}{2}X - S)'(\frac{L + L_1}{2}X - S)$$
$$= \frac{1}{2}(LX - S)'(LX - S) + \frac{1}{2}(L_1X - S)' - \frac{1}{4}(L_1X - LX)'(L_1X - LX)$$
$$\leq (LX - S)'(LX - S)$$

当且仅当$(L_1 - L)X \neq 0$ 时,有

$$(\frac{L+L_1}{2}X-S)'(\frac{L+L_1}{2}X-S)<(LX-S)'(LX-S)$$

由已知 $\mu(V_1:V_2:\cdots:V_m:X)=R^n$,又 $L_1\neq L$,故$(L_1-L)(V_1:V_2:\cdots:V_m:X)=0$,因而必存在 i,有$(L_1-L)V_i\neq 0$ 或者$(L_1-L)X\neq 0$,所以有$\frac{L+L_1}{2}Y$ 优于LY,与 LY 的可容许性矛盾.引理证毕.

定理1 在模型(1)和损失函数(2)下,设 $S\beta$ 可估,$\mu(V_1:V_2:\cdots:V_m:X)=R^n$,则 LY 在L_1中是 $S\beta$ 可容许估计的充要条件为:

$1°$ 存在$\{1,2,\cdots,m\}$的一个分割 $J_1,J_2,\cdots,J_{m_0}$ 及 $\alpha>0,i=1,2,\cdots,m$,使

$(S-LX)(X'X)^+X'V_{J1}L'\geq 0$(意含对称),

$(I-P_X)V_{J_1}L'=0$,

$P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(1-P_X)V_{J_1}L'P_2\geqslant 0$(意含对称),

$(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_2}L'=0$,

……

$P_{m_0}(S-LX)(X'X)^+X'[I-(V_{J_1}+\cdots+V_{Jm_0-1})G^-_{m_0-1}(I-P_X)]V_{Jm0}L'P_{m_0}\geqslant 0$(意含对称),

$(I-P_X)[I-(V_{J_1}+\cdots V_{J_0-1})G^-_{m_0-1}(I-P_X)]V_{Jm0}L'=0$,

$2°$ $MV=LV$,则 $M=L$.

其中 V_{J_i},P_i,G_i 的意义为

$$V_{J_1}=\sum_{j\in J_1}\alpha_jV_j,i=1,2,\cdots,m_0.G_i=(I-P_X)(V_{J_1}+\cdots+V_{J_i}),$$

$$i=1,2,\cdots,m_0-1,P_X=X(X'X)^+X'$$

若记 $\widetilde{P}_i$ 为到 $\mu[(S-LS)(X'X)^+X'(V_{J_1}+\cdots+V_{J_i})(I-G_i^-G_i)]$ 上的正交投影,则 $P_i=I-\widetilde{P}_{i-1},i=2,\cdots,m_0$.

证明:必要性.必要条件 $1°$ 的证明与文[5]中定理1相类似,只须注意利用引理2即可.

现用反证法证明必要条件 $2°$.

若 $M\neq L$,但 $MV=LV$,由 $MV=LV$,可得

$$(M-L)V=0$$

$$(M-L)V(M-L)'=0$$

$$(M-L)V_i=0\qquad i=1,2,\cdots,m.$$

$$MV_i=LV_i\qquad i=1,2,\cdots,m.$$

又因为 $\mu(V_1:V_2:\cdots:V_m:X)=R^n$,所以,存在 i,$M\neq L$ 时,$(M-L)V_i\neq 0$ 或$(M-L)X\neq 0$,而$(M-L)V_i=0$,,$i=1,2,\cdots,m$.所以$(M-L)X\neq 0$.

而

$$\mathrm{tr}(\frac{M+L}{2})V_i(\frac{M+L}{2})'=\frac{1}{2}(\mathrm{tr}LV_iL'+\mathrm{tr}MV_iM')-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(M-L)V_i(M-L)'$$

$$=\mathrm{tr}LV_iL'$$

所以

$$\mathrm{tr}(\frac{M+L}{2})V_i(\frac{M+L}{2})=\mathrm{tr}LV_iL'$$

又

$$(\frac{M+L}{2}X-S)'(\frac{M+L}{2}X-S)$$

$$= \frac{1}{2}(LX - S)'(LX - S) + \frac{1}{2}(MX - S)'(MX - S) - \frac{1}{4}(MX - LX)'(MX - LX)$$

$$\leq (LX - S)'(LX - S)$$

而

$$(M - L)X \neq 0$$

所以

$$(\frac{M + L}{2}X - S)'(\frac{M + L}{2}X - S) < (LX - S)'(LX - S)$$

有$\frac{M + L}{2}Y$优于LY,与LY的可容许性矛盾,必要性得证.

充分性:若存在M使MY优于LY,则由必要条件 1° 可得(与文[5]中定理 1 的充分性证法相同)

由必要条件 2° 可得

$M = L$.充分性得证.

1.2　L_2 中的可容许性

定理 2　在模型(1)和损失函数(2)下,设$S\beta$可估,且$\mu(V_1 : V_2 : \cdots : V_m : X) = R^n$,则$LY + a$在$L_2$中是$S\beta$的可容许估计的充要条件为:

1) L 满足定理 3 中条件 1° 与 2°;

2) $a \in \mu(LX - S)$.

证见[3]中定理 2 的证明.

参考文献:

[1] 叶慈南.方差分量模型中回归系数的估计的可容许性[J].应用概率统计,1993,9(4):337～341.

[2] 侯景臣.方差分量模型中回归系数的线性估计的可容许性的若干结果[J].应用概率统计,1990,6(1):22～32.

[3] 徐光忠.二次损失下方差模型中回归系数线性估计的可容许性[J].系统科学与数学,1993,13(14):363～369.

[4] 王学仁,詹金龙,陈建宝.方差分量线性模型中回归系数和参数的所有可容许线性估计[J].数学学报,1994,37(5):653～662.

[5] 孙卓昕,徐兴忠.二次损失下方差分量模型中回归系数的线性容许估计[J].应用数学学报,1998,2(3):393～403.

[6] 王松桂.线性模型的理论及应用[M].合肥:安徽教育出版社,1987.