

球面上散乱数据的光滑性曲面插值

周正华¹, 叶正麟¹, 罗卫民²

(1. 西北工业大学 数学与信息科学系, 西安 710072; 2. 西安邮电学院 应用数理系, 西安 710061)

摘要: 给出了一种基于球面反距离的 C 插值函数用来解决球面上散乱数据的光滑性曲面插值问题, 该方法可用于解决一类拓扑等价于球面的曲面上散乱数据曲面插值问题.

关键词: 插值; 测地距离; 映射

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2004)05-0155-03

Scattered Data Smoothing Surface Interpolation over a Sphere

ZHOU Zheng-hua¹, YE Zheng-lin², LUO Wei-min³

(1. Department of Mathematics and Information Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Xi'an Institute of Posts and Telecoms, Xi'an 710061, China)

Abstract: A method of constructing a continuity function defined over the sphere based upon the spherical geodesic inverse distance is presented, which can also be used to solve the scattered data surface interpolation on the surface topologically equivalent to a sphere.

Key words: interpolation; geodesic distance; map

0 引言

在曲面上构造函数的问题应用于地球物理学、气象学、医学等许多领域, 如研究地球上某个地区的温度分布、降雨量分布、大气层的“温室效应”等规律; 飞行器(飞机、火箭、导弹等)表面压力分布规律; 医学上肿瘤的生长规律及人体表的温度分布规律等. 自 Barbill^[1]提出这个问题以来, 在文献[1~5]已给出许多解决方法, 但大多采用的是球面三角剖分的方法, 这涉及到大量球面三角形的分割和优化, 计算繁杂, 本文针对球面上散乱数据的光滑性曲面插值问题给出了一种基于球面反距离的局部化光滑性插值函数. 该方法不需要进行球面三角剖分, 而且具有简单、易操作、逼近效果好的优点.

1 问题的提出及算法

本文针对球心在原点的单位球面给出下面构造插值函数的方法, 对于其它形式的球面可通过变换的方法化成这种单位球面形式.

已知球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 在球面上给了 N 个位置点 s_i 和对应的函数值 $f_i (i = 1, K, N)$, 即 $\{(s_i, f_i) \in R^4\}_{i=1}^N$, 其中 $s_i \in S$, 构造一个定义在球面 S 上的 C^1 连续函数 f , 使其满足插值 $f(s_i) = f_i (i = 1, K, N)$, 当给定的数据点很少, 只分布于球面的很小一部分时, 我们可以利用曲面参数化的方法将此插值问题转化为 $u - v$ 为平面区域上二元函数的插值问题, 但当数据点数目很大且分布于整个球面时, 用此方法难以达到理想的逼近效果, 本文针对这种情况给出下面的解决方案.

1.1 基于球面测地反距离构造局部化插值函数

$$f(s) = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i(s) q_i(s)}{\sum_{i=1}^N \omega_i(s)}$$

收稿日期: 2004-04-27.

第一作者简介: 周正华(1977~), 男, 硕士研究生. 主要研究方向: 计算机辅助几何设计. **E-mail:** zzhzjw2003@163.com.

其中 $\omega_i(s)$ 为权函数, $q_i(s)$ 为在 s_i 的附近邻域内局部逼近 f 且满足 $q_i(s_i) = f_i$ 的一个函数, 分别构造如下.

1.1.1 $q_i(s)$ 的构造

设单位球面上点 $s_i = (s_i, y_i, z_i)$ 处的切平面为 π_i , 则 π_i 的方程为: $(x_i, y_i, z_i) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$, 定义变换矩阵

$$U_i = \begin{pmatrix} a_y & 0 & -b_y \\ 0 & 1 & 0 \\ b_y & 0 & a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_x & -b_x \\ 0 & a_x & b_x \end{pmatrix}, \text{其中 } a_y = \sqrt{y_i^2 + z_i^2}, b_y = x_i, a_x = \begin{cases} z_i & a_y \neq 0 \\ a_y & a_y = 0 \end{cases}, b_x = \begin{cases} y_i & a_y \neq 0 \\ 0 & a_y = 0 \end{cases}$$

易见, $U_i U_i^T = E$, 利用此正交变换可获得 s_i 的局部笛卡儿坐标系 $u - v - \omega$, 且变换 U_i 将 $(x_i \ y_i \ z_i)^T$ 变成 $(0 \ 0 \ 1)^T$, 并且将切平面变成 $\omega = 1$, 这是因为

$$(u \ v \ \omega)^T = U_i(x \ y \ z)^T, U_i, (x_i \ y_i \ z_i)^T = (0 \ 0 \ 1)^T, \text{则}$$

$$(x_i \ y_i \ z_i) U_i^{-1}(u \ v \ \omega)^T = (x_i \ y_i \ z_i) U_i^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \end{pmatrix} = 1$$

所以 $\omega = 1$. 我们忽略 $u - v - \omega$ 坐标系中 ω 坐标得到平面 π_i 上的局部坐标系 $u - v$, 用 $(u, v) = g(s)$ 表示 $u - v$ 平面上任一点的坐标, 坐标原点 $g(s_i) = (0, 0)$, 将球面上 s_i 邻近的点垂直投影到 π_i 上, 投影点 $q = (u, v)$, 定义 $q_i(s) = f_i + c_1 u + c_2 v + c_3 uv + c_4 u^2 + c_5 v^2$, 易见 $q_i(s)$ 是关于 u, v 的二次多项式函数, 显然它在 s_i 点上满足 $q_i(s_i) = f_i$, 由于二元二次多项式有 5 个未知系数, 在 s_i 的附近邻域内选取 5 个距离 s_i 最近的 5 个点 $s_{i_1}, s_{i_2}, s_{i_3}, s_{i_4}, s_{i_5}$ 来确定未知系数 $c_i (i = 1, K, 5)$, 根据 $(u_{i_k} \ v_{i_k} \ \omega_{i_k})^T = U_i(x_{i_k} \ y_{i_k} \ z_{i_k})^T$, 则 $s_{i_k} (k = 1, K, 5)$ 在局部笛卡儿坐标系 $u - v$ 中的坐标为 $(u_{i_k}, v_{i_k}) (k = 1, K, 5)$, 由 $f_i + c_1 u_{i_k} + c_2 v_{i_k} + c_3 u_{i_k} v_{i_k} + c_4 u_{i_k}^2 + c_5 v_{i_k}^2 = f_{i_k} (k = 1, K, 5)$, 解一个关于 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 为未知量的线性方程组可得 $q_i(s)$ 关于 u, v 的表达式.

1.1.2 $\omega_i(s)$ 的构造

首先, 由以上在 s_i 的某个邻域内距离 s_i 最近的 5 个点 $s_{i_1}, s_{i_2}, s_{i_3}, s_{i_4}, s_{i_5}$ 我们令 $R_i = \max_{i_k} (\|s_i - s_{i_k}\|) (k = 1, K, 5)$, 其中 $\|s_i - s_{i_k}\|$ 是球面上两点 s^i, s_{i_k} 的球面测地距离, $\|s_i - s_{i_k}\| = \arccos(s_i, s_{i_k})$, 这里 (s_i, s_{i_k}) 表示 s_i 和 s_{i_k} 作数量积. 为了获得局部化插值函数我们定义 $\omega_i(s) = \left[\frac{R_i - (\|s_i - s_{i_k}\|)_+}{R_i + \|s_i - s_{i_k}\|} \right]^2$, $(R_i - \|s - s_i\|)_+$ 是一个截幂函数, 即 $(R_i - \|s - s_i\|)_+ = \begin{cases} R_i - \|s - s_i\| & R_i \geq \|s - s_i\| \\ 0 & R_i < \|s - s_i\| \end{cases}$, 容易验证此插值函数 $f(s)$ 满足插值条件 $f(s_i) = f_i$, 且具有 C^1 连续.

用此方法可以解决一类拓扑等价于球面的曲面上散乱数据的插值问题, 若参数曲面 D 拓扑等价于球面 S , 首先, 将 D 映射到单位球面 S 上转化为球面上的插值, 然后, 将球面上的插值函数映回到曲面 D 上. 具体的算法如下:

设 A 是曲面 D 对应的平面矩形参数区域, τ 是相应的参数变换

Step1. 对 $P_i \in D, i = 1, K, N$, 存在 $a_i \in A$ 使得 $\tau(a_i) = p_i$

Step2. 建立一个从矩形区域 A 到单位球面 S 的映射 $\delta: A \rightarrow S$, 从而可得从 S 到 D 的一个一一映射 $\sigma = \tau \delta^{-1}$.

Step3. 由映射 δ 可得到球面上对应的点 $s_i = \delta(a_i), i = 1, K, N$.

Step4. 在单位球面上由 $\{(s_i, f_i)\}^N, i = 1, s_i \in S$, 由上述的方法构造满足 $G(s_i) = f_i$ 的三元插值函数

$G(s)$.

Step5. $\forall p \in D$, 存在唯一 $a \in A$, 使 $p = \tau(a)$, 令 $f(p) = G[\delta(a)]$, 则 $f(p)$ 就是定义在 D 上满足插值 $f(p_i) = f_i$ 的函数, 其中 $A : [u_{\min}, u_{\max}] \times [v_{\min}, v_{\max}]$

$$\delta(u, v) = (-\cos(v')\sin(u'), \cos(v')\cos(u'), \sin(v'))$$

$$u' = \frac{u - u_{\min}}{u_{\max} - u_{\min}}2\pi, \quad v' = \frac{v - v_{\min}}{v_{\max} - v_{\min}}\pi - \frac{\pi}{2}$$

$F(p)$ 在 D 上的连续性取决于 $G(s)$ 在球面 S 和 S 到 D 的映射 $\sigma = \tau\delta^{-1}$ 的连续性.

2 数据试验

表 1 球面上散乱的插值数据点
Tab.1 Scattered interpolating datas on the sphere

x	y	z	F_1	F_2	F_3
-0.8	0.11	0.589 8	0.384 2	-0.043 8	0.080 6
-0.7	0.15	0.698 2	0.473 8	-0.061 9	0.007 75
-0.65	0.21	0.730 3	0.541 9	-0.084 2	0.074 0
-0.6	0.25	0.759 9	0.596 8	-0.096 2	0.074 5
-0.52	0.7	0.489 5	0.669 7	-0.156 5	0.209 2
-0.5	0.6	0.624 5	0.716 3	-0.158 3	0.153 5
-0.48	0.65	0.589 2	0.724 5	-0.155 3	0.178 5
-0.4	0.43	0.809 4	0.787 9	-0.117 5	0.100 3
0.35	0.25	0.902 8	0.776 9	-0.066 6	0.090 9
-0.2	0.34	0.918 9	0.882 6	-0.052 7	0.106 9
-0.1	0.9	0.424 3	0.866 2	-0.032 2	0.367 8
0.15	0.8	0.580 9	0.903 9	-0.058 8	0.281 8
0.18	0.6	0.779 5	1.046 3	0.071 1	0.217 7
0.2	0.3	0.932 7	1.005 1	0.047 2	0.174 0
0.25	0.34	0.906 6	1.024 4	0.065 0	0.184 3
0.28	0.4	0.872 7	1.041 8	0.082 4	0.193 7
0.31	0.45	0.837 5	1.053 3	0.098 6	0.206 5
0.34	0.65	0.679 6	1.058 1	0.126 8	0.271 8
0.42	0.72	0.552 4	1.034 9	0.141 1	0.326 7
0.5	0.6	0.548 7	1.034 1	0.155 3	0.323 1

表 2 测试函数在测试点处与相应插值函数的最大绝对误差值

Tab.2 Maximum errors among the test functions and the corrsponding interpolation functions on the testing datas

N	F_1	F_2	F_3
10 个点	0.003 73	0.001 82	0.006 30
15 个点	0.005 24	0.003 62	0.000 81
30 个点	0.001 36	0.004 95	0.000 14

分别对 $F_1 = (1 + 2x + 3y + 4z)/6$, $F_2 = (\sin x)(\sin y)(\sin z)$, $F_3 = (-1 + 2x - 3y + 4x^2 - xy + 9y^2 + 3z^2 - yz)/10$, 并将它们的定义域限制在单位球面上, 对这 3 个函数做了数据试验, 表 1 是在单位球面上任取的 20 个数据点和相应的函数值, 表 2 的数据表示对 3 个函数分别取不同个数的测试点所得最大的绝对误差值. $E = |\max(F(s_i) - f(s_i))|$

(下转第 160 页)

凸不平,象崎岖不平的泥泞地,这显然会降低磁带的表面光泽度,使耐磨性下降;而图4中磁带表面平整,磁粉分布均匀细密,象一块平整的地毯,这必然使磁带的表面光泽度和耐磨性都有提高.因此,从磁带的表面状况看,含有 $-\text{SO}_3\text{Na}$ 基团的聚氨酯对磁粉分散性明显高于不含 $-\text{SO}_3\text{Na}$ 基团的聚氨酯.

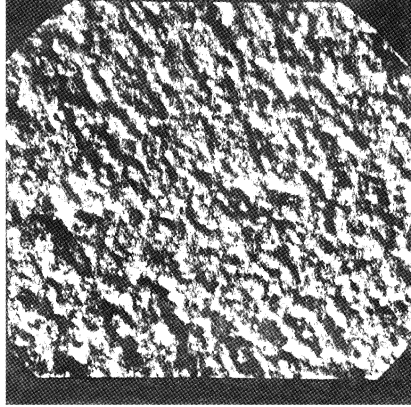


图3 不含 $-\text{SO}_3\text{Na}$ 基团的聚氨酯制成磁带的电镜组成分析(放大倍数:200)

Fig.3 The EMS image of the magnetic tape using PU binder without $-\text{SO}_3\text{Na}$ groups. Surface analysis (magnification:200)

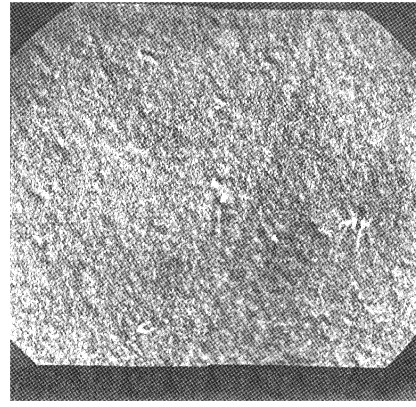


图4 含 $-\text{SO}_3\text{Na}$ 基团的聚氨酯制成磁带的电镜组成分析(放大倍数:200)

Fig.4 The EMS image of the magnetic tape using PU binder with $-\text{SO}_3\text{Na}$ groups. Surface analysis (magnification:200)

3 结论

本文通过沉降高度实验和电镜的组成及表面分析都证明含 $-\text{SO}_3\text{Na}$ 基团的聚氨酯对磁粉的分散性有显著提高.

参考文献:

- [1] Hitachi Maxell, Ltd. Surface treatment of recording powders[P]. Japan Kokai Tokkyo Koho JP84, 172208, 1984.
- [2] 陆家和, 陈长彦. 现代分析技术[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995. 1~20.

(上接第157页)

参考文献:

- [1] Lawson, C.L. . Surface interpolation for scattered data on a sphere[J]. Rocky Mountain J. Math, 1984, 14: 177~202.
- [2] Ramaraj, R. . Scattered data interpolation based upon generalized minimum norm network[J]. Constr. Approx, 1986, 7: 247~256.
- [3] Nielson, G.M. and Ramaraj, R. . Interpolation over a sphere based upon a minimum norm network[J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, (4): 41~57.
- [4] Barnhill, R.E. and Ou, H.S. . Surface defined on surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 1989, 7: 323~336.
- [5] Barnhill, R.E. . Surfaces in computer aided geometric design: A survey with new result, [J]. Computer Aided Geometric Design, 1985, (2): 1~17.
- [6] Nielson, G.M. The side - vertex method for interpolation in triangles[J]. Approx. Theory, 1979, 25: 318~336.
- [7] Freedman, W. . Scattered data interpolation: Tests of some methods[J]. Math. Comput, 1982, 38: 181~200.
- [8] Pottmann, H. . Interpolation on surface using minimum norm networks, [J]. Computer Aided Geometric Design, 1992, 9: 51~67.
- [9] Barnhill, R.E., Optiz, K., and Pottmann, H. . Fat surfaces: a trivariate approach to triangle - based interpolation on surfaces [J]. Computer Aided Geometric Design, 1992, 9: 365~378.
- [10] Foley, T.A., Lane, D.A., Nielson, G.M., Franke, R., and Hagen. . Interpolation of scattered data on closed surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 1990, 7: 303~312.