一类非线性波动方程混合问题解的爆破

张正萍
(重庆工业高等专科学校 基础科学系,重庆 400050)

摘要: 依据势井理论,通过构造不稳定集,应用经过改进的凸性分析方法,简明地证明了一类非线性波动方程 $u_{tt} - \Delta u = |u|^{\gamma-1}u$ 的混合问题解的爆破性质,即当初值属于不稳定集,初始能量为正但有适当上界时,解在 L^2 范数意义下在有限时刻发生爆破.

关键词: 波动方程; 势井; 凸形分析方法; 爆破
中图分类号: O175.29 **文献标识码**: A **文章编号**: 1007 - 855X(2004)05 - 0152 - 03

Blow - up of the Solution to the Mixed Problem of Some Nonlinear Wave Equations

ZHANG Zheng-ping
(Department of Fundamental Science, Chongqing Polytechnic College, Chongqing 400050, China)

Abstract: According to the potential well theory, the blowup property of the solution for the mixed problem of some nonlinear wave equations $u_{tt} - \Delta u = |u|^{\gamma-1}u$ is proved in a simple way by constructing unstable set and using the revised convexity method. Roughly speaking, when the initial data stay in the unstable set and the initial energy has properly positive upper bound, the solution will blow up in finite time under the L^2 norm.

Key words: wave equation; potential well; convexity method; blow up

0 引言及主要结果

考虑如下非线性波动方程的初边值问题

$$u_{tt} - \Delta u = |u|^{\gamma-1}u \qquad x \in \Omega, t > 0 \tag{1}$$

$$u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad t > 0 \tag{3}$$

其中 $\gamma > 1$,Ω 是 R^n 中的有界区域, 其边界 $\partial\Omega$ 是充分光滑的.

杜心华在文[1] 中利用基于半群[2] 和稳定性集[3,4] 的方法, 简单地证明了非线性波动方程(1) 的混合问题在 $t \in [0, +\infty]$ 上整体解的存在性、唯一性及当 $t \to +\infty$ 时的增长性质.

相应地, 本文则构造不稳定集[3,4] 并利用文[5,6] 所用的经过改进的凸性分析方法, 用比文[4] 更直接的方式简明地证明了问题(1)—(3) 的解的爆破性质. 所得的主要结果是:

定理: $u_0 \in V, u_1 \in L^2(\Omega), E(0) < d$, u 为问题(1) ~ (3) 的局部解, 则存在有限常数 $\widetilde{T}$,使得当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时成立 $|u|_2 \to \infty$, 即 u 在有限时刻发生 blow - up.

注 1: $V, E(0), d$ 的含义稍后给出.

注 2: 为方便计,现在及以后,将函数的 $L^\gamma(\Omega)$ 范数记为 $|\cdot|_\gamma$, $H_0^1(\Omega)$ 范数记为 $\|\cdot\|_{0,1}$; C 均代表一个正常数,但不同地方的具体值可能不一样.

在给出主要结论的证明之前先作一些准备.

收稿日期: 2003 - 12 - 16. **基金项目**: 重庆工业高等专科学校资助课题(项目编号: Z0429).
作者简介: 张正萍(1973.2 ~),女,讲师. 主要研究方向: 偏微分方程和最优化理论.

1　准备工作

定义与(1) ~ (3) 相关的能量泛函为

$$E(t) = E(u(t)) = \frac{1}{2}| u_t |_2^2 + \frac{1}{2}\| u \|_{0,1}^2 - \frac{1}{\gamma + 1}| u |_{\gamma+1}^{\gamma+1}$$

于是与(1) – (3) 相关的初始能量为

$$E(0) = E(u(0)) = \frac{1}{2}| u_1 |_2^2 + \frac{1}{2}\| u_0 \|_{0,1}^2 - \frac{1}{\gamma + 1}| u_0 |_{\gamma+1}^{\gamma+1}$$

将(1) 两边同乘以 u_t 然后在 $\Omega \times [0,t]$ 上积分可得能量恒等式:

$$E(t) = E(0). \tag{4}$$

记

$$a(u) = \| u \|_{0,1}^2, b(u) = | u |_{\gamma+1}^{\gamma+1}, j(u(t)) = \frac{1}{2}a(u) - \frac{1}{\gamma + 1}b(u)$$

$$I(u(t)) = a(u) - b(u), d = \inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u)$$

对于 d 我们有

引理 1　$d > 0$.

证明:见文[1].

现在引进不稳定集 V

$$V = \{u \mid u \in H_0^1(\Omega), I(u(t)) < 0, J(u(t)) < d\}$$

对于不稳定集 V 有如下性质:

引理 2　设 $u_0 \in V, u_1 \in L^2(\Omega), E(0) < d, u(x,t)$ 为问题(1)—(3) 在$[0, T)$ 上的局部解,则对任意的 $t \in [0,T)$ 有 $u(x,t) \in V$.

证明:假设存在 $t_1 \in [0, T)$ 使得对 $t \in [0, t_1)$ 有 $u(x,t) \in V$ 而$u(x,t_1) \notin V$.则由 V 的定义及 $J(u(t))$ 和 $I(u(t))$ 关于 t 的连续性知$J(u(t_1)) = d$ 或$I(u(t_1)) = 0$.

因 $J(u(t_1)) \leq E(t_1) = E(0) < d$ 则$J(u(t_1)) = d$ 是不可能的.

若 $I(u(t_1)) = 0$ 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(\lambda u(t_1)) |_{\lambda=1} = 0, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}J(\lambda u(t)) |_{\lambda=1} = (1 - \gamma)a(u) < 0(\gamma > 1)$$

从而$\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u(t_1)) = J(\lambda u(t_1)) |_{\lambda=1} = J(u(t_1)) \leq E(t_1) = E(0) < d$,这与 d 的定义矛盾,那么不可能有 $I(u(t_1)) = 0$.

因此对任意的 $t \in [0,T)$ 有 $u(x,t) \in V$.

证毕.

引理 3　在引理 2 的假设下,对任意的 $t \in [0, T)$ 有 $a(u) \geq \frac{2(\gamma + 1)}{\gamma - 1}d$.

证明: 由 d、V 的定义及引理 2 知

$$d \leq \frac{\gamma - 1}{2(\gamma + 1)}((a(u)^{\gamma+1})/b(u)^2)^{1/(\gamma-1)} \leq \frac{\gamma - 1}{2(\gamma + 1)}((a(u)^{\gamma+1})/a(u)^2)^{1/(\gamma-1)} \leq \frac{\gamma - 1}{2(\gamma + 1)}a(u)$$

证毕.

2　主要结果的证明

证明:　记 $F(t) = | u |_2^2$

$$\text{有 } F_t(t) = 2\int_\Omega u u_t \mathrm{d}x = 2 \tag{5}$$

$$F_{tt}(t) = 2\int_\Omega u_t^2 \mathrm{d}x + 2\int_\Omega u u_{tt} \mathrm{d}x \tag{6}$$

在(1) 两边同乘以 u,然后关于 x 在 Ω 上积分可得:

$$\int_{\Omega} u u_{tt} \mathrm{d}x = -I(u) \tag{7}$$

将(7) 代入(6) 得:

$$F_{tt}(t) = 2\int_{\Omega} u_1^2 \mathrm{d}x - 2I(u) \tag{8}$$

(8) 式结合能量恒等式(4) 得:

$$F_{tt}(t) = (\gamma + 3) \mid u_t \mid_2^2 + 2(\gamma - 1)(a(u) - 2(\gamma + 1)E(0) \tag{9}$$

由引理 3, (9) 式将导致:

$$F_{tt}(t) \geq (\gamma + 3) \mid u_t \mid_2^2 + 2(\gamma + 1)(d - E(0)) \tag{10}$$

$$> 0(因\ E(0) < d) \tag{11}$$

可见 $F(t)$ 是下凸函数.

将(10) 两边在$[0,t]$上积分则 $F_t(t) > 2\int_{\Omega} u_0 u_1 \mathrm{d}x + 2(\gamma + 1)(d - E(0))t$

这意味着存在 t_0 使得对 $t \in [t_0, \infty)$ 有 $F_t(t) > 0$, 那么对所有 $t > t_0, F(t)$ 严格单调递增, 对 $\alpha > 0$ 而言 $F(t)^{-\alpha}$ 严格单调递减.

由(10)(11) 及 H&lder 不等式知:

$$F_{tt}(t)F(t) - ((\gamma + 3)/4)F_t(t)^2 \geq (\gamma + 3)((F(t) \mid u_t \mid_2^2 - (\int_{\Omega} u u_t \mathrm{d}x)^2) > 0$$

因$(F^{-\alpha})_t = -\alpha F(t)^{-\alpha - 1} F_t(t)$

$(F^{-\alpha})_{tt} = -(\alpha / F(t)^{\alpha + 2})(F_{tt}(t)F(t) - (\alpha + 1)F_t(t)^2)$

从而对 $\alpha = (\gamma - 1)/4 > 0$ 有$(F^{-\alpha})_{tt} < 0$,即 $F(t)^{-\alpha}$ 是上凸函数, 再结合它的严格单减性, 所以存在有限的 $\widetilde{T}$,使得当 $t \to \widetilde{T}^{-}$ 时,有 $F(t)^{-\alpha} \to 0$,即 $F(t) \to +\infty$.

证毕.

参考文献:

[1] 杜心华.一类非线性波动方程混合问题解的存在唯一性[J].四川师范大学学报(自然科学版),1994,17(4):35~42.

[2] Pazy A.Semigroups of Linear Operators and Applications to PDE[M].New York:Springer~Verleg,1983.

[3] D.H.Sattinger.On Global Solution of Nonlinear Hyperbolic Equations[J].Arch.Rat.Mech.Anal,1968,30:148~172.

[4] L.E.Payne and D.H.Sattinger.Saddle Points and Instability of Nonlinear Hyperbolic Equations[J].IsRael Journal of Mathematics,1975,(22):273~303.

[5] 张宏伟,呼青英.一类耦合非线性 Klein-Gordon 方程组的稳定集和不稳定集[J].纯粹数学与应用数学,2002,18(3):207~210.

[6] 陈勇明,张正萍,唐恒书.一类非线性波方程解的爆破[J].重庆工学院学报,2003,17(6):38~39,49.

(上接第 151 页)

1) 如果 $Q \cap J_i \neq \Phi$,则 $V(Q:(\sum J_i)) = \Phi$;

2) 如果 $Q \cap J_i = \Phi$,则 $Q:(\cap J_i)$ 是 P-准素理想;

3) 如果 $J_i \cap P = \Phi$,则 $V(Q:(\cap J_i)) = V(Q)$.

参考文献:

[1] 何青.计算代数(M).北京:北京师范大学出版社,1997.95~198.

[2] 刘木兰.Gröbner 基理论及其应用(M).北京:科学出版社,2000.15~78;77~78.

[3] Bhubaneswar Mishra.Algorithmic Algebra(M).Spring-Verlag.New York,Inc,1993.

[4] 贾双盈.关于交换环中理想的商(J).西安公路交通大学学报,1998.