

铸件充型过程数学模型的离散

闫金, 张希俊

(昆明理工大学 机电工程学院, 云南 昆明 650093)

摘要: 根据金属液流动遵循的物理规律, 通过分析反映物理现象的基本方程, 建立了铸件充型流动的数学模型. 在保证计算精度和稳定性的前提下, 利用有限差分法对基本方程进行了离散化, 得到了数学模型的差分格式. 为进一步的数值计算奠定了基础.

关键词: 铸造; 充型过程; 有限差分; 差分格式; 数学模型

中图分类号: TG211 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2004)02-0027-04

Finite Difference Forms of Govern Equations of Mold Filling in Metal Casting

YAN Jin, ZHANG Xi-jun

(Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: According to the physical regulations of fluid flow of metal liquid, govern equations of mold filling in metal casting are described and mathematics model is built. The finite difference forms of govern equations are derived which meet the demands of accuracy and calculation stability. These finite difference forms of govern equations can conduct fluid flow analysis.

Key words: casting; mold filling; finite-difference method; finite difference form; mathematical model

0 引言

作为铸造的一个阶段, 充型过程持续时间短, 流场领域随时间不断扩大, 自有表面位置和位向也在不断变化, 而且充型过程伴随有传热现象, 使流场和温度场都处于变化之中. 此外, 型腔内气体的背压力、金属液与铸型间的热阻、型壁状况、入流条件等都影响充型过程.

1 数学模型的建立

金属液体的流动属于带有自由表面的粘性不可压缩非稳态流动, 包含动量传递、质量传递和能量传递. 一般认为要完整描述金属液体在浇注系统中的流动过程, 可采用连续性方程、动量方程和能量方程描述这一过程:

1) 连续性方程(质量守恒定律). 此方程体现了在流动过程中的质量守恒, 因为一般金属液体为不可压缩流体, 故质量守恒定律中的流体密度不变, 经化解将不出现在方程中:

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

u, v, w 为速度矢量在坐标系中 X, Y, Z 方向上的分量.

2) 动量守恒方程(Navier-Stokes 方程). 体现了流动过程中的动量守恒, 一般以 Navier-Stokes 方程来描述:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 u \quad (2)$$

收稿日期: 2003-05-21.

第一作者简介: 闫金(1980~), 男, 在读硕士. 主要研究方向: 铸造过程的数值模拟. E-mail: yanjin_2002@hotmail.com

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \nabla^2 v \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \nabla^2 w \quad (4)$$

ρ 为金属流体密度; P 为单位密度的压力, 即压力 / 密度; μ 为运动粘度; g 为重力加速度; ∇^2 为拉普拉斯算子。

3) 能量守恒方程. 在此即为反映浇注过程中的金属液与铸型热交换规律的傅立叶导热方程, 在进行流动与传热耦合计算时将用到该方程, 本文仅概述流动过程中速度场与压力场的求解, 温度场的计算不作详细讨论:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

C_p 为材料的定压比热; k 为材料的导热系数; T 为温度。

上述方程只是基本的数学方程, 在用有限差分法求解时, 要把它变化为可用来进行计算机模拟的有限差分方程。

2 数学模型的差分格式

有限差分法的基本思想是把本来解连续空间和时间里的值的问题, 转化为在空间领域的有限个离散点上求值的问题. 因此, 首先必须将数学问题差分化, 时间亦然. 用差分代替微商得到全部内部区域和所有边界上的差分方程组成的线性方程组, 即差分格式。

2.1 交错网格技术

在动量方程、连续性方程中共包含有五个变量 (u, v, w, P, μ), 在交错网格技术中, 把压力 P 、粘度 μ 定义在网格控制单元的中心, 而把速度分量 u, v, w 定义在控制单元的表面. 各变量在网格中的布置如图 1 所示。

采用交错网格主要具有以下几个优点:

1) 对于典型的控制容积, 离散连续性方程将含有相邻速度分量的差, 避免了采用非交错网格时出现的高度不均匀速度场满足连续性方程的情况。

2) 采用交错网格法, 两个相邻网格点之间的压力差成了位于这个网格点之间的速度分量的自然驱动力, 与微分方程所反映的物理问题的要求相适应. 这样就避免了动量方程对一个不合实际的高度不均匀的压力场的“感受”与对均匀压力场的“感受”一样的不合理情况。

(3) 计算与型壁相邻的控制单元时不需要考虑压力边界条件, 提高了计算精度。

2.2 数学模型的离散

1) 连续性方程的离散形式:

$$D_{i,j,k}^{n+1} = \frac{u_{i+1/2,j,k}^{n+1} - u_{i-1/2,j,k}^{n+1}}{\delta x_i} + \frac{v_{i+1/2,j,k}^{n+1} - v_{i-1/2,j,k}^{n+1}}{\delta y_i} + \frac{w_{i+1/2,j,k}^{n+1} - w_{i-1/2,j,k}^{n+1}}{\delta z_i} \quad (6)$$

式中: $n, n+1$ —模拟计算的上一时刻和下一时刻。

2) 对 Navier - Stokes 方程的离散:

本文以 x 方向分量为例对(2)式方程进行离散化, (2)式可变化为(7)式所示, 对各项分别进行离散。

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{非稳态项}} + \underbrace{\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{对流项}} = \underbrace{- \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x}_{\text{源项}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right)}_{\text{粘性项}} \quad (7)$$

(1) 非稳态项采用向前差分格式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i+1/2,j,k}^{n+1} - u_{i+1/2,j,k}^n}{\delta t} \quad (8)$$

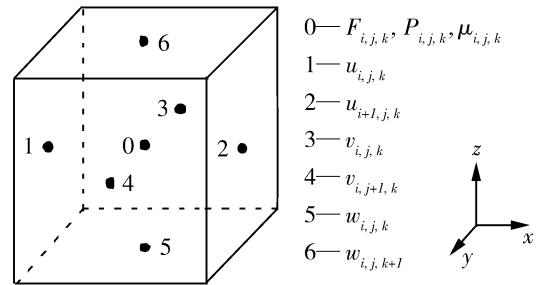


图 1 各变量在网格中的布置图

(2) 对流项离散

该项采用 SOLA - VOF 法中迎风格式与中心差分相结合的形式. 权重因子 α 是控制迎风格式程度的加权因子, 它的值可在 0 到 1 之间选取. 当 $\alpha = 0$ 时以下各式实际是中心差分格式, 当 $\alpha = 1$ 时以下各式实际是第一迎风格式. 通过取合适的 α 值, 可以将两者的优点结合起来, 在保证稳定性的前提下尽量减少数值误差.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = FUX = u_{i+1/2,j,k} \left(\frac{\delta x_{i+1} DUL + \delta x_i DUR + \alpha \operatorname{sgn}(u_{i+1/2,j,k}) (\delta x_{i+1} DUL - \delta x_i DUR)}{\delta x_{i+1} + \delta x_i + \alpha \operatorname{sgn}(u_{i+1/2,j,k}) (\delta x_{i+1} - \delta x_i)} \right) \quad (9)$$

$$\text{式中: } DUL = \frac{u_{i+1/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k}}{\delta x_i};$$

$$DUR = \frac{u_{i+3/2,j,k} - u_{i+1/2,j,k}}{\delta x_i + 1};$$

α —权重因子, 其值 $0 < \alpha < 1.0$;

sgn —符号函数.

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = FUY = v_{i+1/2,j,k} \left(\frac{\delta y_{j+1/2} DUB + \delta y_{j-1/2} DUT + \alpha \operatorname{sgn}(v_{i+1/2,j,k}) (\delta y_{j+1/2} DUB - \delta y_{j-1/2} DUT)}{\delta y_{j+1/2} + \delta y_{j-1/2} + \alpha \operatorname{sgn}(v_{i+1/2,j,k}) (\delta y_{j+1/2} - \delta y_{j-1/2})} \right) \quad (10)$$

$$\text{式中: } \delta y_{j+1/2} = \frac{\delta y_{j+1} + \delta y_j}{2}$$

$$\delta y_{j-1/2} = \frac{\delta y_j - \delta y_{j-1}}{2}$$

$$DUB = \frac{u_{i+1/2,j,k} - u_{i+1/2,j-1,k}}{\delta y_{j-1/2}}$$

$$DUT = \frac{u_{i+1/2,j+1,k} - u_{i+1/2,j,k}}{\delta y_{j+1/2}}$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} = FUZ = w_{i+1/2,j,k} \left(\frac{\delta z_{k+1/2} DUQ + \delta z_{k-1/2} DUH + \alpha \operatorname{sgn}(w_{i+1/2,j,k}) (\delta z_{k+1/2} DUQ - \delta z_{k-1/2} DUH)}{\delta z_{k+1/2} + \delta z_{k-1/2} + \alpha \operatorname{sgn}(w_{i+1/2,j,k}) (\delta z_{k+1/2} - \delta z_{k-1/2})} \right) \quad (11)$$

$$\text{式中: } \delta z_{k+1/2} = \frac{\delta z_{k+1} + \delta z_k}{2}$$

$$\delta z_{k-1/2} = \frac{\delta z_k - \delta z_{k-1}}{2}$$

$$DUQ = \frac{u_{i+1/2,j,k} - u_{i+1/2,j,k-1}}{\delta z_{k-1/2}}$$

$$DUH = \frac{u_{i+1/2,j,k+1} - u_{i+1/2,j,k}}{\delta z_{k+1/2}}$$

于是得

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = FUX + FUY + FUZ \quad (12)$$

(3) 压力梯度项的离散

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_{i+1/2,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}}{\delta x_{i+1/2}} \quad (13)$$

$$\text{式中: } \delta x_{i+1/2} = \frac{\delta x_i + \delta x_{i+1}}{2}$$

(4) 粘性项的离散

粘性项采用中心差分格式:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\mu_{i+1,j,k} DUR - \mu_{i,j,k} DUL}{\delta x_{i+1/2}} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\mu_{i+1/2,j+1/2,k} DUT - \mu_{i+1/2,j-1/2,k} DUB}{\delta y_j} \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\mu_{i+1/2,j,k+1/2} DUH - \mu_{i+1/2,j,k-1/2} DUQ}{\delta z_k} \quad (16)$$

于是得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = VISX \quad (17)$$

$\mu_{i+1/2,j+1/2,k}$ 、 $\mu_{i+1/2,j-1/2,k}$ 、 $\mu_{i+1/2,j,k+1/2}$ 、 $\mu_{i+1/2,j,k-1/2}$ 需要通过插值来确定,在这里采用几何平均来进行插值计算.几何平均表示式更能体现粘度的物理特性,比算术平均表示式要精确得多.

$$\mu_{i+1/2,j+1/2,k} = \frac{\delta y_j \left(\frac{\delta x_i \mu_{i+1,j+1,k} + \delta x_{i+1} \mu_{i,j+1,k}}{\delta x_i + \delta x_{i+1}} \right) + \delta y_{j+1} \left(\frac{\delta x_i \mu_{i+1,j,k} + \delta x_{i+1} \mu_{i,j,k}}{\delta x_i + \delta x_{i+1}} \right)}{\delta y_j + \delta y_{j+1}} \quad (18)$$

$$\mu_{i+1/2,j-1/2,k} = \frac{\delta y_{j-1} \left(\frac{\delta x_i \mu_{i+1,j,k} + \delta x_{i+1} \mu_{i,j,k}}{\delta x_i + \delta x_{i+1}} \right) + \delta y_j \left(\frac{\delta x_i \mu_{i+1,j-1,k} + \delta x_{i+1} \mu_{i,j-1,k}}{\delta x_i + \delta x_{i+1}} \right)}{\delta y_{j-1} + \delta y_j} \quad (19)$$

$$\mu_{i+1/2,j,k+1/2} = \frac{\delta z_k \left(\frac{\delta x_i \mu_{i+1,j,k+1} + \delta x_{i+1} \mu_{i,j,k+1}}{\delta x_i + \delta x_{i+1}} \right) + \delta z_{k+1} \left(\frac{\delta x_i \mu_{i+1,j,k} + \delta x_{i+1} \mu_{i,j,k}}{\delta x_i + \delta x_{i+1}} \right)}{\delta z_{k-1} + \delta z_k} \quad (20)$$

$$\mu_{i+1/2,j,k-1/2} = \frac{\delta z_{k-1} \left(\frac{\delta x_i \mu_{i+1,j,k} + \delta x_{i+1} \mu_{i,j,k}}{\delta x_i + \delta x_{i+1}} \right) + \delta z_k \left(\frac{\delta x_i \mu_{i+1,j,k-1} + \delta x_{i+1} \mu_{i,j,k-1}}{\delta x_i + \delta x_{i+1}} \right)}{\delta z_{k-1} + \delta z_k} \quad (21)$$

将式(8)、(9)、(10)、(12)、(13)、(17)代入 x 方向动量方程,可以得到 x 方向动量方程的离散方程:

$$u_{i+1/2,j,k}^{n+1} = u_{i+1/2,j,k}^n + \delta t \left(\frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i+1,j,k}^{n+1}}{\rho \delta x_{i+1/2}} + g_x - FUX - FUY - FUZ + VISX \right) \quad (22)$$

同理 y, z 方向动量方程的离散方程可以类似得出.

以上述差分方程组为基础,用 VC++ 编写了铸件充型过程的数值计算程序.经验证,推导的差分方程具有收敛性、求解过程稳定.利用上述差分格式求解微分方程时可求得较正确的解.

参考文献:

- [1] 柳百成,荆涛. 铸造过程的模拟仿真与质量控制[M]. 北京:机械工业出版社,2001.37~78.
- [2] 荆涛. 凝固过程数值模拟[M]. 北京:机械工业出版社,2002.56~77.
- [3] 杨全,张真. 金属凝固与铸造过程数值模拟[M]. 杭州:浙江大学出版社,1998.96~128.
- [4] 张凯锋. 材料热加工过程的数值模拟[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2000.100~120.
- [5] Lin H J, Hwang W - s. Combined Fluid Flow and Heat Transfer Analysis for the Filling of Castings[M]. AFS Transaction, 1988.447~458.
- [6] Yeh J L, Jong S H, Hwang W - S. Improved 3 - D Mold for Complex Castings and Experimental Verification[M]. AFS Transaction, 1993.1055~1063.
- [7] Upadhyaya G, Paul A J. Solidification Modeling: A Phenomenological Review[M]. AFS Transaction, 1994.69~80.