现代违约证券估值理论模型研究

王　琼[1]，袁泽沛[2]，冯宗宪[1]

（1.西安交通大学 应用经济博士后流动站，陕西 西安 710049；2.武汉大学，湖北 武汉 430072）

摘　要：介绍了两类不同假设条件下的模型的构造、验证及拓展，并就这两类模型的特点和存在的缺陷进行评述。

关键词：违约证券；资产价值；强度过程

中图分类号：F830.91　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001-7348（2006）06-0145-03

1　结构化模型(structural model)

1.1　莫顿模型

莫顿（1974）首先用 Black-Scholes 期权定价方法推出了违约债券的估价公式[1]。莫顿假定公司的资产价值 V，资本结构由简单的股权 E 和债权 D 组成，债权看作公司发行的到期日为 T，面值为 F 的零息债券。如果在到期日，当资产价值 V 低于其债务面值 F 时发生违约，资产转让给债权人。因此，在到期日 T，股票持有人的收益为：$E_T=\max\{F-V_T,0\}$；对债权人的支付为：$D_T=\min\{V_T,F\}=F-\max\{F-V_T,0\}$。公司的债权可以看作由买入一个无风险零息票债券和和卖出一个以公司价值为基础的，执行价格为 F 的看跌期权构成。可以直接运用 Black-Scholes 期权定价公式得到违约零息债券在 t 时刻的价格：

$$D_t=BS(V_t,F,r,\sigma,T-t)=e^{-r(T-t)}F[N(d_2)+\frac{1}{l}N(-d_1)] \tag{1}$$

其中，l 为衡量公司债务债权的杠杆比率，N(d)为标准正态分布的累计分布函数，l、d_2、d_1 分别为：

$$l=\frac{e^{-r(T-t)}F}{V}$$

$$d_1=\frac{\ln\frac{V_t}{F}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

莫顿模型指出违约债券的价格依赖于证券的到期日，资产的波动率、无风险利率以及债务债权的杠杆比率。该模型可应用于以风险资产为基础的违约证券估值分析中，如可转换债券，可通知偿还债券等。然而，沿 Black 和 Scholes（1973）及 Merton（1974）思路的传统的结构化模型存在 2 个薄弱点：①模型中得到的信用利差与现实相差太大，即使运用过高的波动率和资产负债率也难达到；②模型中假设过于严格，如固定利率，只存在单一种类的债务，违约只发生在到期日，以及严格绝对的优先权，这些假设与现实不符，限制了模型在实践中的应用。此后，大量的专家学者发展了莫顿模型，他们通过放松莫顿模型中的限制性假设，建立了更符合现实的一般化模型。

1.2　布莱克—科克斯模型

布莱克与科克斯（Black and Cox，1976）首先放宽了莫顿模型中违约只能发生在到期日的限制，引入了可在债务期限任何时点随时发生的违约时间 τ：$\tau=\inf\{t:V_t\le K_t\}$，其中 K_t 为违约边界，它是使得公司继续运作的最小的公司价值，表示为：$K_t\equiv Ce^{-\gamma(T-t)}$。布莱克与科克斯进一步将债务分为优先债务（senior dbet）和次级债务(junior debt)，表示为：D=SD+JD；次级债券的价值可以进一步改写为：$JD_t=[V_t-SD_t]-[V_t-SD_t-JD_t]$。因此，违约证券的价值可以看作两个看涨期权之间的值，因此我们通过 Black-Scholes 期权定价公式解得每一类违约证券的价值为：

$$D_t=\left(\frac{Ce^{-\gamma(T-t)}}{V_t}\right)^{2\frac{r-\gamma}{\sigma^2}-1}BS\left[\frac{(Ce^{-\gamma(T-t)})^2}{V_t},F,r,\sigma,T-t\right] \tag{2}$$

1.3　龙斯达夫—斯维茨模型

龙斯达夫与斯维茨（Longstaff and Schwartz，1995）追随 Black 和 Cox 的假定，进一步考虑了利率期限结构的随机运动对违约风险的重要作用，将违约证券估值模型扩展到随机利率的条件下[2]。模型假定利率由不确定性的 Vasicek 随机过程来描述，短期无风险利率服从动态过程：$dr_t=(a-br_t)dt+\sigma_r dW_r(t)$，其中，a 是向均值调整的速度，系数 b 是无风险利率 r_t 的长期均值，σ_r 是瞬时标准差。龙斯达夫与斯维茨假定违约边界值为常数 K，当公司资产价值低于边界值时，发生违约，债券持有者得到挽回率为 δ 的证券面值。则违约债券的价值在 t 时刻的表达式为：

$$D(t,T)=FP(t,T)[1-\delta Q(V/K,r,T)] \tag{3}$$

其中，Q(V/K，r，T)为违约概率，违约债券的价值依赖于公司资产价值 V 和违约边界 K。该模型不仅放松了固定利率的限制，并且

收稿日期：2005-08-15

基金项目：国家自然科学基金项目（0171005）

作者简介：王琼（1970-），女，陕西西安人，博士后，研究方向为金融风险控制和金融产品创新；袁泽沛，男，教授、博士生导师；冯宗宪，男，教授、博士生导师，研究方向为理论经济学、金融经济学、国际金融学。

考虑了利率与公司资产价值变化之间的相关关系。同时，在该模型中，资产结构也更加复杂，优先权规律也更多。然而，由于模型框架的复杂性，龙斯达夫与斯维茨并没有给出微分方程的闭式解。另外，由于模型中违约边界是外生给定的，也就是说，违约边界与资产价值水平无关，因此该模型存在一个重要缺陷，即不能保证公司债务到期时，对债权人的支付不大于违约时公司的价值。换言之，公司可能在债务到期时，公司资产价值高于违约边界值 K 但低于债务的面值，在这种条件下，尽管公司资产价值总在临界值之上，公司也并非真正能偿付债务。

1.4 Briys—de Varenne 模型

Briys 和 de Varenne（1997）针对这一缺陷将布莱克和科克斯，龙斯达夫和斯维茨违约边界推广到随机利率环境下，假定债权人受到一个安全约定保护，使债券持有者被允许触发提前破产，即赋予债券持有者让公司破产或公司重组的权利。假定随机违约边界 $v(t)$ 为安全约定触发点，表示为：$v(t)=\alpha\cdot F\cdot P(t,T)$，其中，$P(t,T)$ 为面值为 1 的无风险零息债券价值，$0\le\alpha\le1$。Briys 和 de Varenne 假设公司在 t 时刻发行零息债券（面值 F，期限为 T）的单一同质债权以及剩余权益（股权），使用风险中性定价技术得到时刻 t 违约风险零息债券的价格 D_t：

$$D_t=P(t,T)(f_1\alpha F1_{T_V<T}+F1_{T_V\ge T,V_T\ge F}+f_2V_T1_{T_V\ge T,V_T<F})\tag{4}$$

式中，T_V 型表示公司资产价值 V 第一次跨过边界 $v(t)$ 的时间，f_1（$0\le f_1\le1$）表示当违约发生在到期日之前时债券持有者得到外生规定的公司资产份额，f_2（$0\le f_2\le1$）表示当违约发生在到期日时的这一份额。从而公司违约债券分解为 3 个组成部分：第一项为其它条件相同的无风险零息债券；第二项为到期日之前的违约支付；第三项给出到期日，资产价值高于临界值但低于债券面值条件下债券持有者所得的最终现金流。Briys 和 de Varenne 模型关于安全约定触发点的假设保证了债权人不可能得到比公司价值更高的支付，从而纠正了 Longstaff 和 Schwartz 模型的缺陷。

2 基于强度过程的约化模型

随着现代风险环境的变化和信用衍生品的兴起，违约风险变得更加复杂，尤其是近年来金融危机和金融事件的不断发生，使公司不仅会因为经济因素中平常条件的变化（如长期利率、公司经营状况、税收政策等）引起违约，而且突发性的异常变化，如金融事件、金融危机等，同样会引发不可预料的违约。基于期权理论的结构化模型以连续时间的扩散过程描述资产价值，公司资产价值的变化属于平稳过程，因此不会因公司价值的突然下降而违约。经典的结构化模型基本假设条件与现实的市场发生偏差，使模型在新的市场环境中面临挑战。近年来，一种新的约化模型（Reduced-form models）引起了越来越多的重视[3]。该类模型放弃了对企业价值的假设，将违约看作由强度（intensity）决定的不可预测的泊松事件，强度消除了对资产结构的依赖，使得模型采用市场中易于得到的公司信用等级变动以及债券信用利差等数据进行违约风险证券定价，因此也称之为基于强度的约化模型[4]。根据强度获取的资料途径不同可将约化模型分为以 Jarrow，Lando 和 Turnbull(1997)为代表的基于信用等级的强度模型和以 Duffie-Singleton（1997）、Hull 和 White (2000,2001)、Schönhucher(2000)、Houweling 和 Vorst(2001)为代表的基于信用利差的强度模型。

2.1 杰罗—兰德—特布尔模型

杰罗和特布尔（Jarrow and Turnbull，1995）首先将强度概念引入违约证券估值模型中，他们假设违约时间 τ 是由违约强度 λ 确定的泊松过程，在很短时段 Δt 上，公司发生违约的概率为：$\exp(-\lambda\Delta t)\approx\lambda\Delta t$，强度 λ 是市场对公司瞬时违约风险的风险调整灵敏度[5]。由于不同的公司违约率不同，因此，强度为常数 λ 的假设显然与现实不符。Lando (1998)发展了杰罗和特布尔关于违约强度的概念，进一步将强度看作随机变量[6]，违约时间为带有连续时间随机强度过程 $\lambda(t)$ 的 Cox 过程发生第一次跳跃时间，记为：$\tau=\inf\{t:\int_0^t\lambda(u)du\ge E\}$，其中，E 为独立于强度的单位随机变量。则在风险中性概率测度 Q 下，违约时间 τ 的条件生存概率 $P_t(\tau>t)$ 可表示为：

$$E^Q[1_{\{\tau>t\}}|Q_t]=\exp[t:\int_0^t\lambda(u)du]\tag{5}$$

违约强度过程意味非确定性违约时间的概率测度，它可视为在信息充分条件下，在时间 τ>t 时，违约发生的条件概率。在保险文献中，通常被称为危险率。

杰罗、兰德和特布尔（Jarrow，Lando and Turnbull，1997）通过信用等级转移矩阵确定违约强度，将违约强度过程看作有限状态的马尔可夫过程，提出了基于信用等级的定价模型，简称 JLT 模型。

假定违约时间 τ 与无风险利率 r 相独立，在有限状态空间 $S=\{1,2,\cdots,K\}$ 中，违约发生在首次击中违约状态的时间，违约时间可进一步表示为：$\tau=\inf\{t\in0,1,\cdots,T\}C_t=K\}$，其中，离散时间的转移过程 C 为带有转移矩阵的奇次马尔可夫链。与泊松过程相似，在短时间 Δt 内，从状态 i 到状态 j 的概率记为：

$$P\{K_{t+\Delta t}=j|K_t=i\}=\lambda_{ij}\Delta t\tag{6}$$

在给定初始信用等级的违约债券条件下，未来债券的变化由随机过程来描述。因此得到连续时间的违约强度矩阵 Λ：

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,K-1} & \lambda_{1,K}\\ \lambda_{1,2} & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{2,K-1} & \lambda_{2,K}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_{K-1,1} & \lambda_{K-1,2} & \cdots & \lambda_{K-1} & \lambda_{K-1,K}\\ \lambda_{K,1} & \lambda_{K,2} & \cdots & \lambda_{K,K-1} & \lambda_{K,K}\end{bmatrix}$$

其中，λ_{ij} 为马尔可夫链中从 i 到 j 跳跃的转移强度。

假定违约与挽回率为外生变量，违约发生在任意时间 τ，τ<t。则违约证券的价值可分为一对或有债权 $[(F,T),(\delta,\tau)]$，其中 (F,T) 为不发生违约时，到期日 T 发行者支付面值 F；(δ,τ) 为发生违约事件时，债权人以挽回率 δ 得到的部分支付。在概率测度 Q 下违约证券的价值可以描述为：

$$D=F1_{\{\tau>t\}}+F\delta1_{\{\tau\le t\}}\tag{7}$$

假设市场不存在套利机会，在风险中性概率测度下，得到信用等级为 i 的零息违约证券价格：

$$D_t(t,T)=FP(t,T)(1-\delta P\{\tau\le T|C_t=i\})\tag{8}$$

信用等级为 i 的违约概率为：

$$P\{\tau\le T|C_t=i\}=P\{C_T=K|C_0=i\}=q_{iK}(t,T)$$

以上分析表明 JLT 模型可以通过历史经验数据如穆迪公司及 S&P 公司的信用等级转移矩阵中违约率来确定违约证券的价格，也可通过观察的违约证券的价格来确定同一信用等级的违约率[7]。但是，JLT 模型存在一个主要缺陷，即隐含的表示同一信用等级的公司具有相同的违约风险，使得模型的精度受到影响。

2.2 杜菲—辛戈理特恩模型

杜菲（Duffie）和辛戈理特恩（Singleton）

(1998)提出另一类约化模型，模型将无风险利率替换为带有违约强度过程调整的短期利率，按无风险债券的特点对违约风险债券期限结构进行相似定义，利用无风险债券的价格来推导出服从风险中性概率下，违约证券的估值模型。该模型将市场风险因素添加到违约证券估值模型中，得出即使信用等级不发生变化，信用利差也可能改变，克服了同一等级的违约风险相同的缺陷。

假定违约风险与无风险利率相互独立，根据强度过程的定义，违约风险债券贴现率 $R(u)=r(u)+\lambda(u)$，得到违约风险债券表达式：

$$D(t,T)=E_t[\exp(\int_t^T r(u)+\lambda(u)du)] \quad (9)$$

进一步假设违约事件发生时，债权人可以获得部分追索收入，即违约挽回率为 δ (9)式可改写为：

$$D(t,T)=E_t[\exp(-\int_t^T r(u)+\delta\lambda(u)du)] \quad (10)$$

则违约风险债券贴现率调整为：

$$R(u)=r(u)+\delta\lambda(u) \quad (11)$$

因此，我们可以应用无风险利率期限结构模型如 Vasicek，CIR 和 HJM 模型等对参数进行估计。

杜菲—辛戈理特恩模型提供了丰富动态的信用利差期限结构，我们可根据市场观测的相同期限的违约债券收益和无风险债券收益来确定违约强度过程，也可根据已有成熟的方法对无风险利率和违约强度的期限结构中的参数(Φ, α, σ)进行估计，进而应用基于期限结构的定价模型确定违约证券的价格。

随着国际金融全球化的发展，对违约证券估值中违约相关性研究引起了学者极大的兴趣。兰多 (Lando，1998) 用考克斯过程 (Cox process)来进行违约证券估价，该模型假设无风险利率期限结构和公司的违约特征之间存在一定的相关性，并提出了比 JLT 模型更加通用的马尔可夫模型。然而，这种方法的缺陷是当与经验违约相关度相比，违约相关性较低。Kijima (2000) 提出了联合生存概率 (joint survival probability)，对多期违约事件的证券进行估值分析，扩展了基于强度的约化模型。

3 模型的评析

3.1 结构化模型的优缺点

结构化模型结构简单直观，揭示了公司违约触发机制，给出公司资产结构变化对公司违约的影响，被广泛应用于不同的违约证券的定价分析中，如可转换债券、可赎回债券、可通知偿还债券、债券期权等。模型可以直接从公司价值评价证券的违约性，并适用于从分析公司财务状况如股东的偿债能力，信用或最优资产结构的设计。

随着现代风险环境的变化和信用衍生品的兴起，违约证券结构更加复杂。尤其是近年来金融危机和金融事件的不断发生，经典的以资产价值为基础的结构化模型的基本假设条件与现实的市场发生偏差，使模型在新的市场环境的运用中存在下列问题：

(1) 模型的数据限制。结构化模型依赖公司价值数据，公司资产价值和其动态变化的波动性通常在金融市场中是不易直接观察的。虽然股权的总价值可以通过股票的市场数据推出，但令人质疑的是，估算的股价波动率是否可作为公司资产价值波动估算的可信指标。而对一些发行者，如主权债务，不存在公司价值，这使得以公司价值为基础的结构化模型在实践中的执行相当困难。

(2) 模型假设的限制。结构化模型是以连续时间的扩散过程描述资产价值。在这种假设条件下，公司资产价值的变化属于平稳过程，因此不会因公司价值的突然下降而发生不可预料的违约事件。但是，在实际的金融市场中，公司不仅会因为经济因素中平常条件变化(如长期利率、公司经营状况、税收政策等)引起违约，而且一些突发性的异常变化，如金融事件、金融危机等，同样会引发不可预料的违约。因此，扩散过程缺乏对突发性事件的考虑，不能全面地反映违约风险的特征。

(3) 模型应用限制。结构化模型是以讨论单个公司单期违约事件发生机制为基础，简单假设违约发生在公司价值低于某一边界值。随着国际金融全球化的发展，违约事件的发生不仅受到各种环境因素的影响，而且公司之间违约变化存在一定相关性。因此，简单的资产结构假设已不适用于复杂的现代违约证券的定价分析，也无法扩展到多期违约模型。

3.2 约化模型的优缺点

基于强度的约化模型是近年发展起来的新一代的违约证券定价模型，与结构化模型相比，新的违约证券估值模型的重要发展主要有：

(1) 不确定性的违约事件。基于强度的约化模型假设违约是在不确定时间发生的，将违约看作由强度决定的随机过程，考虑了不可预测的违约事件对违约证券价值的影响，使模型更加接近于现实。

(2) 数据的可获取性。基于强度的约化模型放弃了资产价值服从扩散过程的假设，直接着眼于违约风险概率，利用市场易于获取的具体信息 (如信用利差) 对违约证券进行定价研究，避免了对公司价值的评价，既解决了结构化模型中存在的短时限问题，也考虑到模型数据的获取和计算。

(3) 模型的灵活性。该类模型打破了公司经济行为与违约事件的联系，通过强度过程给出非确定性违约时间概率测度，使得模型易于灵活处理。

然而，由于在约化模型中，违约强度被看作外生过程，违约过程后的经济机制被掩盖，因此，没有揭示出公司资产结构与公司违约风险的关系，也不能洞察到动态期限结构的成因。我们相信随着理论模型的进一步成熟和完善，新一代的模型将广泛应用于更加复杂的违约证券，如主权债务、互换和约、信用互换、信用利差期权等违约证券的估值研究中。

参考文献：

[1] 埃里克·布里斯，蒙齐尔·贝莱拉赫，胡·明·马伊，佛朗索瓦·德瓦雷纳.期权、期货和特种衍生证券的理论、应用和实践 [M].史树中等译.北京 机械工业出版社，2002.

[2] Merton,R.C.On the pricing of corporate debt:The risk structure of interest rates.Journal of Finance 1974，(29)：449-470.

[3] Duffie, D. and K.J. Singleton. Modelling Term Structures of Dfaultable Bonds. Review of Financial Studies,1999，(12)：687-720.

[4] Lando,D.On Cox processes and credit-risky securities.Review of Derivatives Research 1998，(2)：99-120.

[5] Longstaff，E.S. and Schwartz. A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt.Journal of Finance, 1995，(50)：789-819.

[6] Jarrow, R. and S. Turnbull. Pricing derivatives on financial securities subject to default risk. Journal of Finance 1995，(50)：53-86.

[7] Jarrow,R.A.,Yu,F.Counterparty risk and the pricing of defaultable securities.Working paper,1999.

(责任编辑 赵贤瑶)