文章编号:1000-6788(2008)05-0092-06

基于核子解的最终交叉效率权系数确定方法

吴　杰,梁　□,查迎春
(中国科学技术大学 管理学院,合肥 230026)

摘要: 介绍了交叉效率评价方法,分析了利用最终平均交叉效率值来对 DMU 进行评价时所存在的诸多缺陷,结合合作博弈理论,放松最终确定效率值的平均化假设,把需要作评价的各个决策单元作为合作博弈的局中人,并定义了包含所有局中人在内的联盟博弈及其各种子联盟的特征函数值,在分析各种联盟博弈解优劣的基础上,选择核子作为联盟博弈的解,并通过遗传算法求解出该博弈的核子解,从而确定了最终交叉效率的权系数.最后通过一个算例说明该方法的有效性.

关键词: DEA;交叉效率;合作对策;核子
中图分类号: C934　　　　**文献标志码:** A

Determination of the weights of ultimate cross efficiency based on the solution of nucleolus

WU Jie, LIANG Liang, ZHA Ying-chun
(School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: This paper firstly introduced the cross efficiency evaluation method, then analyzed the flaws when the ultimate average cross efficiency were used to evaluate DMUs, we eliminated the assumption of average and combined the theory of cooperative games, the DMUs evaluated were considered as the players of the game, and we defined the coalitional game included all DMUs and the characteristic function values of every coalition. Based on the analysis of solutions of the coalitional game, we chose the nucleolus to be final solution and used the genetic algorithm (GA) to get the nucleolus, and determined the final weights of every DMU. In the end, an empirical example was illustrated to examine the validity of the proposed method.

Key words: DEA; cross efficiency; cooperative games; nucleolus

1　引言

DEA 方法作为处理多输入和多输出的一种非参数规划技术,自从第一个模型(CCR 模型)提出以来,就越来越受到重视,被广泛应用于学校、医院等非营利机构的效率评估和基准选择[1].近年来,利用 DEA 对决策单元进行排序的方法[2]层出不穷,但是直接用 CCR 模型中的多指标效率值进行评价存在诸多缺陷[3],如原始的 CCR 模型只能分辨出决策单元是 DEA 有效还是非有效,即将群体一分为二,不具备对决策单元进行分级、排序的能力;用于计算效率值的权系数只在对被评价单元最有利(使其效率值最大)的特定范围内取值,容易形成夸大长处、回避缺陷,以自评为主的氛围,产生表面上 DEA 有效,但在互评中却处于不利地位的伪有效单元.

由于存在以上的问题,学者们开始对 CCR 模型加以适当的改进和完善,Sexton 等人(1986)[4]提出的交叉效率评价方法是一个典型代表,该方法的主要思想是利用自互评体系来消除(减轻)传统的 DEA 方法中的单纯依靠自评体系来对决策单元(DMU)进行评价的弊端,该方法能够判断出全局最优的 DMU 从而对所有的 DMU 进行充分排序,并且能够解决传统 DEA 方法中的权系数过于极端和不现实的问题,因此,交叉

收稿日期:2006-12-28
资助项目:国家杰出青年基金(70525001);中国科学院研究生科学与社会实践资助专项
作者简介:吴杰(1981-),男(汉),安徽庐江人,中国科学技术大学管理学院博士生,研究方向:数据包络分析;梁□(1962-),男(汉),北京人,中国科学技术大学管理学院执行院长,教授,博士生导师,研究方向:数据包络分析,供应链管理等;查迎春(1978-),男(汉),安徽怀宁人,中国科学技术大学管理学院博士生,研究方向:数据包络分析,供应链管理等.

效率评价方法在业绩评价和排序方面都有广泛的应用，如护理之家的效率评估[4]，先进制造技术的识别[5]，柔性制造系统的选择[6]以及 R&D 项目的选择[7]等等.

但是在利用最终平均交叉效率值来对 DMU 进行评价时，依然存在诸多缺陷，如平均交叉效率值和权重之间没有相应的联系从而不能帮助决策者改进其效率[8]，并且最终的平均交叉效率值并不是帕累托最优的，从而所有的 DMU 都不会有接受这些评价结果的动机[9]. 本文针对交叉效率评价方法在评价过程中由于最终的平均化所导致的弊端，放松最终确定效率值的平均化假设，结合合作博弈理论，把需要作评价的各个决策单元作为合作博弈的局中人，通过定义包含所有局中人在内的联盟博弈及其各种子联盟的特征函数值，求解出联盟博弈的核子解，并通过遗传算法求解出该核子解，从而得到各个 DMU 在最终评价中的权重，并确定最终的交叉效率值！该方法思路清晰，涵义明确，各 DMU 对所获得的最终交叉效率值都能接受，最后的算例也说明了该方法的有效性！

2 交叉效率评价方法[11]

交叉效率评价方法是由 Sexton 等人(1986)[4]提出的，该方法是对传统 CCR 模型的改进和完善，其主要思想是利用自互评体系来消除(减轻)传统的 CCR 模型单纯依靠自评体系来对决策单元进行评价的弊端. 该方法自提出后就在业绩评价和决策单元排序方面得到广泛应用.

设 $DMU_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的输入和输出向量分别为：

$$X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})^{\mathrm{T}} > 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$
$$Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \cdots, y_{sj})^{\mathrm{T}} > 0, \quad j = 1,2,\cdots,n,$$

则 CCR 模型为：

$$\begin{aligned} &\max \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rd} = \theta_d \\ &\text{s.t.} \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \\ &\quad \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_{id} = 1 \\ &\quad \omega_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m \\ &\quad \mu_r \geqslant 0, \quad r = 1,2,\cdots,s \end{aligned} \tag{1}$$

在模型(1)中，DMU_d 是被评价单元，$\omega_1,\cdots,\omega_m,\mu_1,\cdots,\mu_s$ 是相关联的输入和输出权重，在上述 CCR 模型(1)中，变换被评价单元 $DMU_d(d=1,2,\cdots,n)$，则可以得到各决策单元 $DMU_d(d=1,2,\cdots,n)$ 的最优权重 $b_d^* = (\omega_{1d}^*,\cdots,\omega_{md}^*,\mu_{1d}^*,\cdots,\mu_{sd}^*)$ 和效率值 θ_d^*.

基于以上 CCR 模型所得到的最优权重，Sexton 等人定义 DMU_j 利用 DMU_d 的权重所获得的交叉效率为：

$$E_{dj} = \frac{\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}^* x_{ij}}, d, j = 1,2,\cdots,n \tag{2}$$

因此对于 $DMU_j(j=1,2,\cdots,n)$，所有 $E_{dj}(d=1,2,\cdots,n)$ 的平均值 $\bar{E}_j = \frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n} E_{dj}$ 可以作为第 j 个决策单元的总得分，按照 $\bar{E}_j(j=1,\cdots,n)$ 的大小可以对所有决策单元进行评价和排序.

3 交叉效率评价方法的合作对策描述

3.1 基本模型[13]

由公式(2)，定义交叉效率矩阵 $E=(E_{dj})\in R_+^{n\times n}$，其中 E_{dj} 表示 DMU_j 利用 DMU_d 的权重所获得的交叉

效率.我们假设 DMU_j 拥有选择一组非负权重 $w^j=(w_1^j,\cdots,w_n^j)$ 的权利,并且定义 DMU_j 对于所有得分的相对得分为:

$$\frac{\sum_{d=1}^{n} w_d^j E_{dj}}{\sum_{d=1}^{n} w_d^j\left(\sum_{p=1}^{n} E_{dp}\right)} \tag{3}$$

其中分母表示所有 DMU 采用 DMU_j 选择的权重所得到的整体得分,分子代表 DMU_j 的得分.DMU_j 希望通过选择最有利的权重来最大化以上的比值,从而得到以下的分式规划:

$$\max_{w^j} \frac{\sum_{d=1}^{n} w_d^j E_{dj}}{\sum_{d=1}^{n} w_d^j\left(\sum_{p=1}^{n} E_{dp}\right)} \tag{4}$$
$$\text{s.t. } w_d^j \geqslant 0(\forall d).$$

不失一般性,我们对交叉效率矩阵实行行单位化,即 $\sum_{p=1}^{n} E_{dp}=1$,为了达到这个目的,我们让行中各元素 $(E_{d1},\cdots,E_{dn})$ 除以 $\sum_{p=1}^{n} E_{dp}$,从而得到行中各元素 $(E'_{d1},\cdots,E'_{dn})$,而规划(4)不受单位化转换的影响,因此,利用 Charnes-Cooper 变换,规划(4)能用以下线性规划问题表示:

$$\begin{aligned} C(j) &= \max \sum_{d=1}^{n} w_d^j E'_{dj} \\ \text{s.t.} \sum_{d=1}^{n} w_d^j &= 1, w_d^j \geqslant 0(\forall d) \end{aligned} \tag{5}$$

3.2 联盟博弈及其特征函数值

设联盟 S 是局中人集 $N=(1,2,\cdots,n)$ 的一个子集,记

$$E_d(S) = \sum_{j\in S} E'_{dj}, \quad d = 1,\cdots,n. \tag{6}$$

该联盟的目的在于获得最大效率得分,记 S 的特征函数值 $C(S)$ 为此最大效率得分,则 $C(S)$ 是下列线性规划问题的最大值:

$$\begin{aligned} C(S) &= \max \sum_{d=1}^{n} w_d E_d(S) \\ \text{s.t.} \sum_{d=1}^{n} w_d &= 1, \\ w_d &\geqslant 0, \quad d = 1,\cdots,n. \end{aligned} \tag{7}$$

易得以下定理 1:

定理 1 $C(\Phi)=0, C(N)=1$.

因此 $C(S)$ 定义了联盟 S 的一个特征函数,并且定义该博弈为 (N,C).

3.3 联盟博弈的解及其核子

联盟博弈有多种解的定义[14],包括核心(core)、稳定集(stable set)、夏普利值(Shapley value)、谈判集(bargaining set)、核(kernel)以及核子(nucleolus)等.把核心中的分配作为合作博弈的解,一个致命的缺陷是核心经常是空的;而关于稳定集的计算和存在性的判别,至今尚无一种通用的方法.而夏普利值、谈判集以及核的共同缺点是不能保证唯一性.

核子是 Schmeidler 提出的合作博弈又一解的概念,它是对核心的扩展,关于核子的存在性和唯一性有如下定理:任何合作博弈的核子必非空,且只由一点组成,并且在核心非空的情况下,核子必是其中的一个核心!因此在本文中我们通过核子来定义联盟博弈的解.

核子与字典序有关.设 u,w 是两个 m 维向量,如果 u,w 不同,且在第一个不相同的分量中,u 的分量

比 w 的小，则我们说 u 按字典序小于 w，并记为 $u < w$.

对于合作博弈 (N, C)，设 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 是它的一个分配，联盟 S 关于 z 的超出值为：

$$e(S, z) = C(S) - \sum_{j \in S} z_j \tag{8}$$

$e(S, z)$ 可看成 S 对分配 z 的满意程度，$e(S, z)$ 越大，S 对分配 z 就越不满意. 现将所有联盟的超出值都列举出来，并按从大到小的顺序排列，这样就得到一个向量，记为 $\theta(z)$：

$$\theta(z) = (\theta_1(z), \cdots, \theta_{2^n-1}(z)) = (e(S_1, z), \cdots, e(S_{2^n-1}, z)) \tag{9}$$

$$e(S_1, z) \geqslant e(S_2, z) \geqslant \cdots \geqslant e(S_{2^n-1}, z)$$

定义博弈 (N, C) 的全体分配方案为 Z，则合作博弈 (N, C) 的核子 $\mu(Z)$ 就是使 $\theta(z)$ 按字典序达到最小的那种分配的全体，即

$$\mu(Z) = \{z \in Z \mid \theta(z) \leqslant \theta(y), \forall y \in Z\}. \tag{10}$$

按照这个定义，在核子中，优先考虑最不满意的联盟，选择的分配要使这种联盟的不满意程度达到最小. 在此基础上，再考虑次不满意的联盟，所选分配要使其不满意程度尽可能小，如此等等.

设最终求得的核子解为 $(l_1, l_2, \cdots, l_n)$，则 DMU_j 的最终交叉效率值为：

$$E_j = \sum_{d=1}^{n} l_d E_{dj}, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{11}$$

4　联盟博弈核子解的计算方法

核子的计算可通过求一系列线性规划来完成[14,15]，不过这种方法虽然在理论上是可行的，但真正实现这一算法时将相当费时，其计算复杂度为 $O(4^n)$，所以当 n 稍大时，这近乎无法实现. 现代优化算法的兴起为解决这类大型优化问题提供了可能，本文采用文献[14]中的遗传算法求解联盟博弈 (N, C) 的核子解，图 1 为算法的流程示意图.

遗传算法是应用较广的一种启发式优化算法其特点是群体多点搜索，不依赖于梯度信息，不要求目标函数连续，可有效求解复杂的优化问题. 遗传算法的基本思想是基于达尔文的进化论，按个体的适应度大小重复地进行选择、交叉和变异来实现群体内个体结构的重组，将性能良好的解结构遗传下去，提高后代的适应能力，从而进化到最优或次优解.

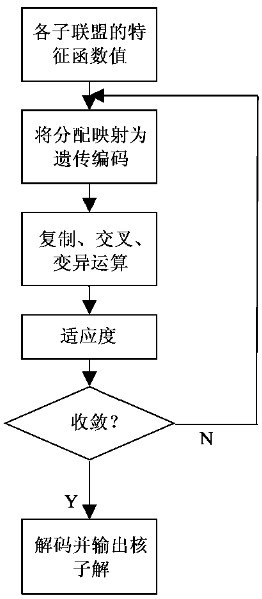

图 1　核子计算流程

染色体编码是应用遗传算法时要解决的首要问题，它把一个问题的可行解从其解空间转换到遗传算法所能处理的搜索空间. 一般而言，二进制码或格雷码具有简单易行、便于实现交叉和变异运算等优点，但对于多维连续函数的优化问题，两种编码方式均存在搜索空间与映射误差之间的矛盾，因而本文采用了浮点编码方式，将分配直接映射为染色体编码.

根据核子的定义式，核子 $\mu(Z)$ 就是使 $\theta(z)$ 按字典序达到最小的那种分配的全体，因而在构造适应度函数时我们将 $\theta(z)$ 中的最大值作为遗传算法的优化目标，以使其达到最小：

$$\begin{cases} \min\limits_{z} \max\limits_{i} \theta_i(z) \quad i = 1, 2, \cdots, 2^n - 1. \\ z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 1 \end{cases} \tag{11}$$

并且算法以染色体群的平均 Hamming 距离作为其收敛依据，Hamming 距离 d_H 即两个染色体各个对应位置取值不同的个数：

$$d_H = \sum_{i=1}^{l} (a_i \otimes b_i) \tag{12}$$

其中，l 为染色体的长度. 符号‘$\otimes$’表示两染色体对应位的‘异或’.

5 实例分析

我们以表 1 中的数据来说明上述方法，在表 1 中有五个 DMU，每个 DMU 有三种输入 X_1，X_2，X_3 和两种输出 Y_1，Y_2. 求解 CCR 模型(1)，按照公式(2)确定交叉效率矩阵如表 2 所示，从而得到各 DMU 的传统平均交叉效率值为：

$$E_1 = 0.47428, E_2 = 0.8793, E_3 = 0.98556, E_4 = 0.55544, E_5 = 0.55866$$

对交叉效率矩阵进行行单位化处理，得到归一化后的交叉效率矩阵如表 3 所示.

根据(7)式计算各种子联盟的特征函数值，由于有 5 个 DMU，所以需要计算 $2^5 - 1 = 31$ 个特征函数值，限于篇幅，计算结果不一一列出！值得提出的是，随着 DMU 数目的增多，特征函数值的计算复杂度也在不断增大，但是现代优化算法的兴起为解决这类问题提供了可能，如文献[14]采用遗传算法设计出了特征函数值的计算模块！

表 1 各 DMU 的输入和输出值

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2
DMU_1	7	7	7	4	4
DMU_2	5	9	7	7	7
DMU_3	4	6	5	5	7
DMU_4	5	9	8	6	2
DMU_5	6	8	5	3	6

表 2 交叉效率矩阵

	DMU_1	DMU_2	DMU_3	DMU_4	DMU_5
DMU_1	0.6857	0.9333	1.0000	0.8000	0.4500
DMU_2	0.4478	1.0000	0.9965	0.7323	0.4643
DMU_3	0.3710	0.7489	1.0000	0.2092	0.6402
DMU_4	0.4587	1.0000	0.9313	0.8571	0.3817
DMU_5	0.4082	0.7143	1.0000	0.1786	0.8571

表 3 进行行单位化后的交叉效率矩阵

	DMU_1	DMU_2	DMU_3	DMU_4	DMU_5	行元素和
DMU_1	0.17723	0.24123	0.25846	0.20677	0.11631	1
DMU_2	0.12299	0.27466	0.27370	0.20113	0.12752	1
DMU_3	0.12494	0.25221	0.33680	0.07045	0.21560	1
DMU_4	0.12641	0.27557	0.25664	0.23619	0.10519	1
DMU_5	0.12925	0.22617	0.31664	0.05655	0.27139	1

在得到各子联盟的特征函数值后，就可以利用遗传算法进行核子的计算，算法经 12 代后收敛，最终得到的核子解为(0.12641，0.22617，0.31664，0.17107，0.15971)，各 DMU 的分配和等于 1，因而满足群体合理性条件，并且，由于各 DMU 各自的特征函数值为(0.17723，0.27466，0.33680，0.23619，0.27139)，所以各 DMU 的分配均小于各自的特征函数值，因而也满足个体合理性条件. 通过求得的核子解就可以确定各 DMU 的最终交叉效率为：

$$E_1 = 0.44910, E_2 = 0.86643, E_3 = 0.98746, E_4 = 0.50814, E_5 = 0.56679$$

各 DMU 的最终交叉效率值是在放松平均化假设，通过所有决策单元之间的合作博弈而得到的，与传统的平均交叉效率相比起来，所有的 DMU 更能接受这样的最终交叉效率评价结果！

6 总结

本文针对交叉效率评价方法在评价过程中由于最终的平均化所导致的弊端，放松最终确定效率值的平均化假设，结合合作博弈理论，把需要作评价的各个决策单元作为合作博弈的局中人，并定义了包含所有局中人在内的联盟博弈及其各种子联盟的特征函数值，在分析各种联盟博弈解优劣的基础上，选择核子作为联盟博弈的解，从而确定各个 DMU 在最终评价中的权重. 并且我们通过遗传算法来求解出该博弈的

核子解,从而解决了计算复杂度过大的问题.该方法概念清楚、涵义明确,最后的算例说明了该方法的有效性.

参考文献:

[1] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units[J]. European Journal of Operational Research, 1978, 2(6): 429 – 444.

[2] Zilla S S, Lea F. Review of ranking methods in the data envelopment analysis context[J]. European Journal of Operational Research, 2002, 140(2): 249 – 256.

[3] Doyle J, Green R, Cook W D. Preference voting and project ranking using DEA and cross evaluation[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 90(3): 461 – 472.

[4] Sexton T R, Silkman R H, Hogan A J. Data Envelopment Analysis: Critique and Extensions[M]. In: Silkman R H(Ed.), Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis, Jossey-Bass, San Francisco, 1986.

[5] Talluri S, Yoon K P. A cone-ratio DEA approach for AMT justification[J]. International Journal of Production Economics, 2000, 66(2): 119 – 129.

[6] Shang J, Sueyoshi T. A unified framework for the selection of a flexible manufacturing system[J]. European Journal of Operational Research, 1995, 85(2): 297 – 315.

[7] Oral M, Kettani O, Lang P. A methodology for collective evaluation and selection of industrial R&D projects[J]. Management Science, 1991, 37(7): 871 – 885.

[8] Despotis D K. Improving the discriminating power of DEA: Focus on globally efficient units[J]. Journal of the Operational Research Society, 2002, 53(3): 314 – 323.

[9] Doyle J R, Green R H. Cross-evaluation in DEA: Improving discrimination among DMUs[J]. INFOR, 1995, 33(3): 205 – 222.

[10] Green R, Doyle J. On maximizing discrimination in multiple criteria decision making[J]. Journal of the Operational Research Society, 1995, 46(2): 192 – 204.

[11] **吴杰,梁□.交叉效率评价方法中新单元导入的保序性**[J].**系统工程**,2006,24(7):111 – 115.
Wu J, Liang L. Rank preservation for adding new DMUs in cross efficiency method[J]. Systems Engineering, 2006, 24(7): 111 – 115.

[12] Owen G. On the core of linear production games[J]. Mathematics Programming, 1975, 9(1): 358 – 370.

[13] Ken Nakabayashi, Kaoru Tone. Egoist 's dilemma: A DEA game[J]. Omega, 2006, 34(2): 135 – 148.

[14] **王成山,吉兴全. 输电网合作投资的费用分摊方法**[J].**电力系统自动化**,2003,27(10):22 – 26.
Wang C S, Ji X Q. Allocation of transmission investment cost using cooperative game theory[J]. Automation of Electric Power Systems, 2003, 27(10): 22 – 26.

[15] Peyton Y H. Cost allocation, demand revelation and core implementation[J]. Mathematical Social Sciences, 1998, 36(3): 213 – 228.