文章编号:1000-6788(2008)S0-0027-08

群体行为的一致性问题及研究

郑毓蕃[1,2],束玲琳[2],林志□[3]

(1.华东师范大学 数学系,上海 200062;2.上海大学 数学系,上海 200444;
3.浙江大学 系统科学与工程系,杭州 310027)

摘要: 群体行为的建模、机理、模拟、及控制近年来已成为系统科学领域的一个重要课题.从系统科学的观点看,群体行为的研究对于理解自然与社会中的复杂现象具有非常重要的意义.目前,用系统科学的观点与方法研究群体行为仅处在起步阶段.到目前为止,群体行为的一致性问题(包括同步现象)及可实现条件已经有了比较深入的研究并已形成了相对完整的、系统的理论.而对于更加复杂的群体行为,除了个别例子及一些特殊情况外,还没有系统性的理论结果.本文综述了一致性问题目前研究的主要内容及相应的主要结果.

关键词: 多个体系统;网络拓扑结构;群体行为;一致性

中图分类号: O19,TP273^{+}.3 **文献标志码:** A

Recent research and progress on consensus problem

ZHENG Yu-fan[1,2], SHU Ling-lin[2], LIN Zhi-yun[3]

(1.Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China;2.Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China;3.Department of System Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Recently it has gained increasing research interests in the problems of modeling, simulation, analysis and control of swarm behaviors. Theoretical studies of these problems are valuable because they help us understand the mechanisms of how global system behaviors emerge from local interactions in nature and social society, and because they also yield insight into the development of new technologies and applications. Although the wide applicability of swarming has inspired a great deal of research from control, physics and computer science, the applicability of state-of-the-art analysis for swarm behaviors has been limited to some special situations. Consensus problem however has been widely investigated in the field in recent years. The paper presents a survey of recent research and progress on the consensus problem from several specific technical aspects.

Key words: multi-agent system; network topology; swarm; consensus

1 导论

群体行为的建模、机理、模拟、及控制近年来已成为系统科学领域的一个重要课题.这项研究形成与发展的轨迹可以从哲学、自然科学、技术科学等几个层面来追溯.回顾人类的科学思想史,几个世纪以来科学研究的方法论中,起主导地位的是所谓的还原论.为了了解一个对象,将它作为一个整体,分门别类的研究,例如将生物界作种、群分类.为研究人体,将人体作解剖,分别研究呼吸系统、消化系统、神经系统等的功能.到二十世纪,研究的对象已达到基因层次,力图解破基因密码,DNA结构.而化学、物理学着力于物质的化学成分与物质结构研究,深入到分子、原子、电子,一直到基本粒子等的性质与运动规律的研究.还原论对近代自然科学起了巨大的作用,但还原论的研究方法所具有的局限性人们亦早已有所认识.到二十世纪中期随着系统科学作为一门独立科学领域的出现与迅速发展,突破还原论的呼声也越来越高.从方法论的角度讲,对群体的整体行为的研究,正反映了人类突破还原论思维模式的一种努力.

收稿日期:2007-10-19

作者简介:郑毓蕃,华东师范大学、上海大学教授,Melbourne大学名誉教授,主要从事线性大系统、非线性系统理论与应用的研究;束玲琳,上海大学系统科学研究生;林志□,浙江大学特聘研究员,主要研究方向为切换系统、混杂系统的理论研究,多整能系统(包括群体生物、物理系统的建模及机制分析,多自主移动机器人的协调合作控制等)以及利用系统控制理论方法研究生化反应网络,如基因调节网络、蛋白质合成.

自然界以及人类社会的活动(运动)都可看作是由个体组成的群体行为.生物个体可以是细菌,昆虫,鸟、鱼等.人类社会是由物性个体及人性个体组成.一定数量的自主个体(也可称智能个体)通过相互交流信息与协作,在集体层面上呈现出(相对于个体)更为有效、更为强大功能的行为,并能实现个体不可能实现的目标(目的).自然界与人类社会呈现的群体行为是与个体的属性有关,但群体表现的行为、功能往往绝非个体能力的总和,人类的社会活动说明了这个事实.这类涌现性群体行为的例子在自然界中有很多,例如,鸟能成群结队的飞翔与迁徙,鱼群能聚集在一起有序地在不同的江海区域休养、生息、繁衍生殖,蚂蚁、白蚁、蜜蜂的群居.脱离群体的生物个体,在自然界是很难生存的.群体所形成的活动能力,战斗力,保证了族群在恶劣的自然环境和与生物种群的争斗中繁衍生息.

从系统科学的观点看,群体行为的研究对于理解自然与社会中的复杂现象具有非常重要的意义.一方面,该研究的重大进展能更深刻地阐释、了解、揭示自然的秘密,能够帮助人们深入理解人类社会活动、经济活动的规律.另一方面,该研究的重大进展将会帮助人类不断完善、发展新技术.近年来,群体动力学的协同控制研究直接为多移动机器人系统,无人驾驶的飞行体器群、军事应用中的战术编队、调控,交通系统的控制、对突发事件的应对、传染病的防治、生态的维护、可持续发展战略的制定与提供理论指导.同时对解释生命的起源,意识的形成等也具有极其重要的意义.

人们研究群体行为往往从观察自然现象开始.当人们观察自然现象时很容易发现鸟群、鱼群并没有一个统一指挥系统,依靠个别鸟之间的联系以及一些本能的反应形成一定的飞行队形,达到运动的一致性.一致性问题在分布式计算科学方面早有研究[1].Reynolds 在 1987 年提出的 Boid 模型,将自然界群的集体行为用三条简单的规则来描述 避免碰撞原则(collision avoidance),速度匹配原则(velocity matching)及集队原则(flocking centering).通过计算机模拟可以发现这些无统一指挥的群体通过个体之间相互交换信息及本能的反映,例如跟随邻近的鸟飞,最终会形成有序的、协调一致的行为.1995 年 Vicsek 等人用一些非常简单的数学方程描述个体的动力学模型,用网络建立起个体之间的信息传递及一些简单的相互作用关系.通过计算机模拟仿真,发现了令人惊讶的结果,整个群体出现行为上的一致性.

系统科学中 Consensus 这个词理解为群体中的成员通过与其他成员的信息交流及共同约定的简单相互作用,使群体达成共同的意向.Consensus 是保留在英文中的拉丁词汇.con = 共同,sensus = 感觉,consensus = 共同的感知,共同的认识,共谋.在中文文献中将它译为一致性.实际上,consensus 的含义要比汉语的一致性更广泛、更多义.Boid 模型和 Vicsek 模型引起了计算机和物理学家、生物学家和数学家的关注.系统科学家对这种计算机模拟的呈现现象力图给出严格的理论解释.根据作者的了解,第一批用严格的数学方法给出一类群体行为一致问题的数学描述,并给出实现这类群体一致性的精确条件的论文大约出现于 2002 ~ 2004 年间[2~6].这些文献中用简单的线性动力系统描述个体的行为,个体之间的信息交换用某些能够测量的量,例如个体间的距离、相对位置等来描述.个体之间的相互作用有各种表现 如两个个体之间有信息交换则这两个个体就相互靠近 ;一些比较复杂行为规定表现为两个个体太靠近,它们会排斥,以保持合理的各自活动的距离.个体的行为还可用非线性动力学模型来描述.

用系统科学的观点与方法研究群体行为目前仅处在起步阶段.用功能强大的计算机及相关软件对群体行为进行模拟,是一种有效的研究方法.但模拟的结果往往事先无法预测,结果的正确性也无法用解析的手段来验证,只能与现实中的类似现象作比较.而系统科学作为一门实证的科学,人们更希望了解群体能够形成或具有各种各样能力、行为的机理,并建立适当的数学模型来说明、演绎这种能力与行为及群体行为形成的机理,再通过计算来预测、并调控群体的行为.

到目前为止,在各种复杂的群体行为中,对群体行为的一致性(包括同步现象)及可实现性的条件,科学家研究的比较深入,已形成了相对完整的系统理论,而对更复杂行为的数学理论,除了个别例子及一些特殊情况,一般来说,还没有系统的理论结果.

2 群体行为一致性的数学描述

对群体行为系统科学家经常用微分或差分形式的动力学方程来描写.群体在科技文献中常称之为多个体网络系统(multi-agent system in network).从系统科学的观点来看,群体是更一般的概念.构成群体及它

的行为有三个要素：

1)动力学个体(agent),科技文献中常称之智能个体；

2)个体之间的信息交换的通信网络拓扑结构(network topology)；

3)个体接受到其它个体信息后的反应规则,称控制协议(control protocol).

群体的动力学系统(行为)是由(大量)个体(agent),个体间通信网络拓扑结构及控制协议确定.考虑有 M 个动力学个体的群体,记为 $p_i,i=1,2,\cdots,M$.个体之间通过通信网络保持某种信息交流,这种信息交换的网络拓扑结构可以用一个图来描述.如果第 i 个个体 p_i 可以接收到第 j 个个体 p_j 的信息(例如,位置、速度等),那么存在 p_i 到 p_j 的信息通道,记为 e_{ij}.相反,如 p_j 也将获得 p_i 的信息,则记为 e_{ji}.这样 M 个个体之间的通讯网可以用图 $G=(V,E,W)$ 来表示,其中 $V:=\{p_1,p_2,\cdots,p_M\}$ 为图 G 的节点集,对应于这 M 个个体,$\boldsymbol{E}\subset\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}:=\{e_{ij};i,j=1,2,\cdots,M\}$ 则为图 G 的边集,$W=\{w_{ij}\}$ 是定义在相应边 e_{ij} 上的权重系数,满足以下条件：

1) $w_{ij}>0$,如果 $e_{ij}\in E$；

2) $w_{ij}=0$,如果 $e_{ij}\notin E$；

3) $w_{ii}=0$,对 $i=1,2,\cdots,M$.

若 $\forall\, i,j,w_{ij}=w_{ji}$,那么称这个网络图是对称的、无向的图.若 $\exists\, i,j,w_{ij}\neq w_{ji}$,那么称这个网络图是有向的图.如果 w_{ij} 是时间的函数,记为 $w_{ij}(t)$,则 $G(t)$ 被称为动态(时变)有向图(或无向图).若 w_{ij} 是随机变量,那么 G 称为随机网络图.

记节点 p_i 的邻集为 $N_i=\{p_j\in V:e_{ij}\in E\}$.令 $d(p_i):=\sum_{j=1,j\neq i}^{M}w_{ij}$ 表示节点 p_i 的度,记为 $d_i=d(p_i)$.同时定义 $M\times M$ 矩阵 L,L 中第 ij 个元素($i\neq j$)为 $-w_{ij}$,第 ii 个元素为 d_i,矩阵 L 被称为图 G 的 Laplacian 矩阵.

用 $x_i\in\boldsymbol{R}^n$ 表示个体 p_i 在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的状态(这个状态可以是位置,速度等感兴趣的变量).从宏观的角度出发,对群体而言,个体可以看成是一个简单动力学单元.在研究中往往撇开个体复杂的动力学性质,抽象其最基本的性质.例如,把它看作一个质点,在连续时间下,满足简单的动力学规则：

$$\dot{x}_i=u_i,\quad i=1,2,\cdots,M,\tag{1}$$

那么对于以上系统,考虑下面这个非常简单的控制协议

$$u_i=\sum_{j\in N_i}w_{ij}(x_j-x_i)\tag{2}$$

我们将可以给出连续时间下的群体行为动态模型

$$\dot{x}_i=\sum_{j\in N_i}w_{ij}(x_j-x_i),\quad i=1,2,\cdots,M.\tag{3}$$

相应地,在离散时间下的群体行为动态模型可以表示成

$$x_i(t+1)=b_ix_i(t)+\sum_{j\in N_i}w_{ij}x_j(t),\tag{4}$$

其中 $b_i=1-\sum_{j\in N_i}w_{ij}$.

我们称群体趋向于一致,就是认为它们的状态渐近收敛到一个共同状态空间(agreement space),也就是最终实现

$$x_1=x_2=\cdots=x_n,$$

那么,一致性的含义就是,任给初始状态 $x_i(0);i=1,2,\cdots,M$

$$\lim_{t\to\infty}x_i(t)=x^*;\quad i=1,2,\cdots,M,$$

其中 x^* 与系统的动力学方程有关,也与个体的初始状态有关.

当 $x_i\in\boldsymbol{R}$,这个一致的状态可以表示为 $x=\alpha 1,1=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,其中 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ 是群体的总体决策意向.不失一般性,下面我们只考虑 $x_i\in\boldsymbol{R}$.

3 时不变网络条件下群体行为的一致性

在时不变网络条件下，对任何一个体 p_i，它的邻集 N_i 都是固定不变的，并且权重系数 w_{ij} 也是固定不变的.

那么系统(3)可以用下面这个线性时不变系统来表示

$$\dot{x}(t) = -Lx(t),$$

其中 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_M(t))^{\mathrm{T}}$，常数矩阵 L 是对应网络图的 Laplacian 矩阵.

Laplacian 矩阵在研究线性一致性问题上是一个核心概念. 对一个图而言，Laplacian 矩阵的特征根总是非负实部的，并且起码具有一个零特征根. 一般我们用 $\{\lambda_i(L);i=1,2,\cdots,M\}$ 表示 L 的 M 个特征根，并满足以下条件

$$0 = \lambda_1(L) \leqslant \mathrm{Re}\{\lambda_2(L)\}\cdots \leqslant \mathrm{Re}\{\lambda_M(L)\}.$$

借助于图论和矩阵分析的知识，对于固定无向拓扑网络结构下，上述群体系统，实现一致性的充分必要条件是网络具有连通的拓扑图[4]. 在有向信息交流网络下，群体系统达到一致性当且仅当交流网络拓扑图中有一个可达点，也即拓扑图的 Laplacian 矩阵具有单个零特征根[7,8]. 换句话说，一致性的代数判别准则是：

定理 1 系统 $\dot{x}(t)=-Lx(t)$ 实现一致性的充分必要条件是 $\mathrm{Re}\{\lambda_2(L)\}>0$.

如果群体模型用离散时间系统(4)，则我们有

$$x(t+1) = Ax(t),$$

其中第 ii 个元素为 b_i，第 ij 元素($i\neq j$)为 w_{ij}. 那么为了实现一致性，图的连通性条件和连续系统完全一样. 记 A 的特征根为 $\rho_i(A);i=1,2,\cdots,M$，$|\rho_1(A)|=1\geqslant|\rho_2(A)|\geqslant\cdots\geqslant|\rho_M(A)|$. 为了实现一致性，它相应的代数判别准则是 $|\rho_2(A)|<1$.

谢等[9] 的工作将该问题做了一些推广，当动态个体满足 $F=ma$ 运动律时，获得了类似的结果. 即只要网络图是连通的，群体行为即能实现一致性. 个体的动态的性质若更复杂一些，网络的连通性不再是充分条件. 实现状态一致还需要个体动态系统满足一些附加条件. 若群体间通讯信息是数字网络(采样系统)，系统为了实现一致性，除了网络的连通性，也还须需其它条件[10,11].

4 时变网络条件下群体行为的一致性

许多群体的网络系统具有时变的性质. 通讯过程中点和点连接的失败，传输过程中信息丢失等等的原因，都能造成网络系统具有时变的性质. 在 Olfati-Saber[4] 的论文中已讨论了 switching 网络下的平均一致性问题. 虽然他们讨论的网络是时变的，但网络的连通性在整个过程中是保证的，在这种条件下群体实现一致性的条件与时不变网络没有本质的区别.

人们最关心的一类情况是：群体在整个活动过程中，通讯网络的连通性在过程中是无法保证的；甚至在任何时刻，系统的网络都是不连通的. 对这类时变通讯网络条件下，Jadbabaie，Tsitsiklis 等研究了离散时间群体在时变网络条件下的一致性问题[2,3,12~14]. 为了实现群体行为的一致性，Jadbabaie，Tsitsiklis 等提出了联合连通性的概念，他们研究的主要对象是离散时间系统，即

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad t = 0,1,2,\cdots,$$

其中 $A(t)$ 是一个分段常数矩阵，取决于群体在 t 时刻的通讯网络结构. 该系统的动态网络图用 $G(t)=(V,E(t),W(t))$ 来描述.

令时刻 $\{t_1,t_1+1,t_1+2,\cdots,t_2\}$ 对应一组网络图集 $\{G(t_1),G(t_1+1),\cdots,G(t_2)\}$. 相应有网络图的边集 $\{E(t_1),E(t_1+1),E(t_1+2),\cdots,E(t_2)\}$，定义 $\bar{E}=\bigcup_{t=t_1}^{t_2}E(t)$ 称之为联合网络图边集. 如果联合网络图 $G(t)=(V,\bar{E})$ 是连通的(或具有一个可达点)，则称网络在区间 $[t_1,t_2]$ 上是联合连通的(或联合有可达点).

一个基本的结果是：令 $[0,\infty]=\bigcup_{i=0}^{\infty}[t_i,t_{i+1}]$，若群体的网络在所有的区间 $[t_i,t_{i+1}]$，$i=0,1,2,\cdots$，上都是联

合连通的(或联合有可达点),那么这个群体的行为实现一致性.文献[15]和[16]等运用联合连通性很好地解决了一些与一致性收敛相关的问题.

在 switching 网络的框架下(也即,邻集 N_i 是随着时间变化而变化的,但对应于相同的拓扑结构,其权重系数是仍然是常的),Lin 等[17] 对一致性问题作了初步的研究,并给出了和离散系统一致的联合联通的概念和条件,其完整的充分必要条件可参考文献[8].

对于时变权重系数、时变网络条件下的一致性的问题,Moreau 作了一些研究[18,19].他提出了 δ-连通的概念,δ-连通要求网络是连通的,而且具有足够强度的连通性,亦即是,当去掉图中那些权重系数小于 δ 的边后,仍然是连通的.考虑一个动态拓扑图 $G(t)$,其相应的时变 Laplacian 矩阵为 $L(t)$,在$[T,T+\Delta T)$上定义 $\bar{L}=\int_T^{T+\Delta T}L(s)\mathrm{d}s$.若相应于 $\bar{L}$ 的图是 δ-连通的,则称 $G(t)$在$[T,T+\Delta T)$是积分 δ-连通的.很明显,图 $G(t)$在任一时刻 $t\in[T,T+\Delta T)$可能是不连通的,但却是积分连通的.Moreau 讨论了网络是有向图的情况.他的一个重要结果是 对于群体动力学用 $\dot{x}(t)=-L(t)x(t)$描述的系统,其中 $L(t)$是时变的,若存在 $\delta>0$ 及 $T>0$ 使得 $\forall t\in[0,\infty)$,$\bar{L}=\int_t^{t+T}L(s)\mathrm{d}s$ 是δ-连通的,那么该群体实现一致性.Moreau 提出了积分连通的概念,但对积分连通矩阵的代数性质没有作深入的讨论.

另外,曹等在文[20]指出,给定图 $G(t)$,$L(t)$是它的 Laplacian,$\bar{L}$ 是$L(t)$在$[T,T+\Delta T)$上的积分,$G(t)$在$[T,T+\Delta T)$上的积分连通的条件是 $\lambda_2(\bar{L})>0$,并对积分连通矩阵的代数性质作了深入的讨论,指出 $G(t)$在$[T,T+\Delta T)$上的积分连通的充要条件是

$$\bigcap_{t\in[T,T+\Delta T)}ker(L(t))=span\{1\}.$$

当 $G(t)$是一个无向图时,如果$\int_0^\infty\lambda_2(L(t))\mathrm{d}t=\infty$,群体 $\dot{x}(t)=-L(t)x(t)$实现一致性.当网络是一个周期为 T 的函数时,群体实现一致性的充要条件是 $G(t)$在$[0,T)$上积分连通,用 Laplacian 矩阵 $L(t)$的代数特性表示:$G(t)$在$[0,T)$上积分连通等价于 $\lambda_2(\bar{L})>0$,其中 $\bar{L}=\frac{1}{T}\int_0^T L(t)\mathrm{d}t$ 对网络是非周期时变图时,也有相应的结果.特别需要指出在时变网络条件下,实现一致性收敛往往仅满足渐近收敛性.而对时不变网络,大多情况下实现一致性都满足指数收敛性质.

5　时滞系统中的一致性问题

当个体之间的网络通信存在时滞时,就会影响群体的整体行为.以连续时间系统为例,假设从个体 p_j 到个体p_i 的信息传递交流存在时滞τ_{ij},个体通常采用控制协议

$$u_i=\sum_{j\in N_i(t)}\omega_{ij}(x_j(t-\tau_{ij})-x_i(t-\tau_{ij}))\tag{5}$$

或者

$$u_i=\sum_{j\in N_i(t)}\omega_{ij}(x_j(t-\tau_{ij})-x_i(t)).\tag{6}$$

假设时滞 τ_{ij}是时不变的,而且等于一个常数,那么有以下定理.

定理 2[4]　假设通讯网络是一个无向固定的连通拓扑图,并且所有的时滞 $\tau_{ij}=\tau$,那么对于任意的初始状态,协议(5)解决群体行为一致性的充要条件是 $\tau\in\left[0,\frac{\pi}{2\lambda_n}\right)$,其中 λ_n 是连通拓扑图的 Lapalaican 的最大特征值.

在无向网络条件下,文[21]给出了时滞通讯网络关於一致性方面一些最新的结果.考虑时变有向通讯网络,如果个体采用控制协议(6),则对于任意的常数时滞 τ,在一定条件下群体也可以解决一致性问题[18].假设时滞 $\tau_{ij}=\tau(t)$是单时变的时候,常采用 Lyapunov 函数和 LMI 方法探讨解决群体行为的一致性问题[22,23].当时滞为多变量,即对于任意 $i,j\in\underline{M}$,$\tau_{ij}(t)$是不同的时间函数,数值研究结果显示群体系统会出现多频震荡现象[24].对于离散时间线性系统而言,常常采用提升状态维数的方法,在时滞受限的情况下

群体系统可以达到一致性[25].

6 随机网络下群体行为的一致性

早期,人们对群体行为的一致性研究主要集中在确定性网络条件下考虑.最近几年,随机网络条件下群体行为一致性研究也相当活跃,获得一些有价值的结果.在文献[26]中,Hotona 等讨论了群体行为用离散时间线性随机动态方程 $x(t+1)=W_t x(t)$ 来描述的系统.其中 $\{W_t, t=0,1,2\cdots\}$ 是一个独立、同分布(i.i.d)随机矩阵序列.文章证明,如果对应矩阵 W_t 的随机图 $G(W_t)$ 的每一条边都以等概率地相互独立(即满足 Erdos-Renyi 随机图模型),那么 $x(t)$ 每个分量(即每个个体)都以概率 1(几乎必然的)达到一致性.

Wu 的文章[27]中假定随机网络图 $\{G(W_t), t=0,1,2,\cdots\}$ 是有向的,边之间不必是独立的.其获得的主要结果涉及群体以某种概率实现一致性,而不是几乎必然地实现一致性.

Tahaz-Salehi 等在文献[28]给出了更进一步的研究结果,而 Hotona 和 Wu 的结果都可看作是其特殊情况.注意到在随机网络拓扑结构下,相应的离散系统可表示为 $W(t)=x(t+1)=W_t x(t)$,其中 $W_t=(w_{ij}(t))_{M\times M}$ 被称为随机矩阵,满足 $\sum_{j=1}^{M} w_{ij}(t)=1, \forall i$.进一步如果同时满足 $\sum_{i=1}^{M} w_{ij}(t)=1, \forall j$,那么 $W(t)$ 被称为是双重随机的(doubly stochastic).

群体行为可用一个向量序列来表示,$x(t), t=0,1,2,\cdots$,并有

$$x(t+1) = W_t W_{t-1} \cdots W_2 W_1 x(0).$$

所谓一致性可定义为,任给 $x(0)\in \boldsymbol{R}^M$,

$$\lim_{t\to\infty} | x_i(t) - x_j(t) | = 0(p.p.) \quad \forall i, j.$$

为了给出随机网络条件下的一致性条件,Tahhas-Saleh 等运用了著名的各态历经性(ergodicity),包括弱(weak)各态历经性及强(strong)各态历经性概念.他们证明了对上述系统乘积 $U^{(t)}=W_t W_{t-1}\cdots W_1$,强弱各态历经性是等价的.

与确定性网络下讨论一致性的情况类似,离散系统的一致性的可实现与网络图 Laplacian 矩阵的第二大特征值有关.记 $E\{W_t\}$ 是随机矩阵 W_t 在 t 时刻的均值阵,那么 $\rho_i, i=1,2,\cdots,M$ 是矩阵 $E\{W_t\}$ 的特征值.对随机矩阵序列 $\{W_t\}_{t=0}^{\infty}$,若 $|\rho_2(E\{W_t\})|=1$,可证明,它几乎总不是各态历经的.文章证明了:

定理 3

1) 如果 $|\rho_2(E\{W_t\})|<1$,那么随机矩阵 $\{W_t\}_{t=0}^{\infty}$ 几乎总是各态历经的.

2) 如果矩阵序列 $\{W_t\}_{t=0}^{\infty}$ 不论强或弱各态历经性成立,则

$$\lim_{t\to\infty} U^{(t)} = 1 d^{\mathrm{T}},$$

其中 d 是一个常数向量,$1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

很明显,各态历经性描述了群体中各个体趋于一致这样一个现象.从随机的角度来看个体间的信息交流,其交流通信过程中会有外部不确定的白噪音影响,利用控制系统中建立滤波器的方法,以期能让群体系统达到一致性文献[29,30].进一步,文献[31,32]研究交流网络拓扑结构是随机图或者小世界网络的情况.

7 非线性群体系统的一致性

在研究群体系统一致性问题的时候,实际的诸多物理的、生物的、社会的系统本质上是非线性的,从而在研究其一致性问题的时候,群体的个体动态模型往往是非线性的,并有必要采用非线性一致控制协议.

我们考虑使用一个具有普适性的非线性互联,切换系统来描述.考虑以下一族基于个体的非线性动态方程.

$$\Delta_{x_1} = f^1_{\sigma(t)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\Delta_{x_2} = f^2_{\sigma(t)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

……

$$\Delta_{x_n} = f^n_{\sigma(t)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中 Δ 表示微分算子(在连续时间系统中)或者差分算子(在离散时间系统中). σ :$[0,\infty)\to P$ 是一个切换信号.基于这样的一种描述,我们可以定义一个动态有向图(或无向图)来描述它们之间的耦合关系.当在 t 时刻第 i 个个体的动态方程中出现 x_j,我们说在动态图里在 t 时刻存在一条从节点 j 到节点 i 的连接.基于这样的非线性描述,文章[33]考虑了连续时间下的系统一致性问题并给出了一个充分必要条件,要求这个非线性系统必须具备一定的条件,例如,动态有向图必须足够大的连接范围和强度,每个个体的向量场必须落在由它依赖的个体和它自己组成的一个最小的扇形里面.相应的,在文章[19]中,每个个体根据非线性更新的下一步状态,要求落在一个由它依赖的个体和它自己(即 $f^i_{\delta(t)}$ 的定义域)张成的凸集里.那么这个多个体系统的一致性问题就完全依赖于动态有向图的连通性.在文[34]中,这样的假设被放松到允许有界时延的存在,并且下一步的状态也只要求落在一个具有某种收敛特性的集合里面.这样的集合不一定是凸的.在非线性下,一致性问题的分析方法就完全不同于线性系统下一致性分析方法.前者主要基于正不变集理论和非光滑分析,而后者则主要基于代数图论和矩阵论.非线性群体行为的分析结果包含了所有在线性条件下所获得的结论.所以非线性群体行为的研究给出了一种新的有效的理论方法.除此之外,在文[35]中,无源性理论被用来分析非线性群体系统下的一致性问题,它的优点是允许这个非线性模块也可以是一个高阶动态系统.这样,有些结论就可以被扩展到双积分系统或者甚至更加复杂的系统中,但是它的缺点就是要求耦合结构图是双向对称的.除了状态一致性问题外,文章[36]还研究了非线性输出函数下的输出一致性问题.有了这些非线性结果,我们就可以用来研究聚集(Rendezvous)问题.理论上已证明,如果每个个体只具备局部检测和通讯能力,而且仅使用线性控制协议,连通性就不能被保证,聚集也可能不能实现,而非线性控制策略则能解决这个问题[33].同时,非线性分析结果可以被用于耦合振荡器的同步问题研究上,因为耦合振动器往往是非线性的,这对同步问题的研究是一个极大的补充,特别是当耦合结构是随着时间变化而变化的.另外,这些结果还可以被用于生化反应网络的平衡状态和收敛性分析以及多移动机器人的队形控制和群体路径跟踪控制.其他有关非线性群体系统的一致性问题文献有[37,38]等.

参考文献:

[1] DeGroot M H. Reaching a consensus[J]. J Am Statist Assoc, 1974, 69(345):118-121.

[2] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[C]//Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002:2953-2958.

[3] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Trans. Automatic Control, 2003, 48(6):988-1001.

[4] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delay[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2004, 49(9):1520-1533.

[5] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus protocols for networks of dynamic agents[C]//Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003:951-956.

[6] Fax J A. Optimal and Cooperative Control of Vehicle Formations[D]. California Institute of Technology, 2001.

[7] Lin Z, Francis B, Maggiore M. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2005, 50(1):121-127.

[8] Lin Z. Coupled Dynamic Systems: From Structure towards Stability and Stabilizability[D]. University of Toronto, 2005.

[9] Xie G, Wang L. Consensus control for a class of networks of dynamic agents[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2006, 17(10-11):941-959.

[10] Leng C P, Zheng Y F, Yu H W. A formation control for dynamical agents in digital network[C]//Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Control and Automation, 2007:1474-1479.

[11] Yu H W, Zheng Y F, Leng C P. Collective behavior of multi-agent systems under digital communication network[C]//Submitted to the 17th IFAC World Congress, 2008.

[12] Blondel V D, Hendrickx J M, Olshevsky A, et al. Convergence in multiagent coordination, consensus, and flocking[C]//Proceedings of the Joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, 2005:2996-3000.

[13] Olshevsky A, Tsitsiklis J N. Convergence speed in distributed consensus and averaging[C]//Submitted for publication,2006.

[14] Tsitsiklis J N, Bertsekas D P. Comment on' coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules '[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2007, 52(5):368 – 969.

[15] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Trans. Automatic Control, 2005, 50(5):655 – 661.

[16] Hong Y, Gao L, Cheng D, et al. Lyapunov-based approach to multiagent systems with switching jointly connected interconnection [J]. IEEE Trans Automatic Control, 2007, 52:943 – 948.

[17] Lin Z, Broucke M, Francis B. Local control strategies for groups of mobile autonomous agents[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2004, 49(4):622 – 629.

[18] Moreau L. Stability of continuous-time distributed consensus algorithms[C]//Proceedings of the 43th IEEE Conference on Decision and Control, 2004:3998 – 4003.

[19] Moreau L. Stability of multi-agent systems with time-dependent communication links[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2005, 50 (2):168 – 182.

[20] Cao L, Zheng Y F, Zhou Q. Consensus of dynamical agents in time-variant network[C]//Submitted to the 17th IFAC World Congress,2008.

[21] Bliman P, Ferrari-Trecate G. Average consensus problems in networks of agent with delayed communications[J]. Submitted to Automatica,2007.

[22] Lin P, Jia Y. Average consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay[J]. Physica A, 2008, 387:303 – 313.

[23] Hu J, Hong. Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays[J]. Physica A, 2007, 374:853 – 863.

[24] Chen Z, Chu T. Numerical simulation of swarm dynamics[R]. Peking University, 2006.

[25] Xiao F, Wang L. Dynamic behavior of discrete-time multi-agent systems with general communication structures[J]. Physica A, 2006, 370:364 – 380.

[26] Hatona Y, Meshahi M. Agreement over random netwoks[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2005, 50(11):1867 – 1872.

[27] Wu C W. Synchronisation and convergence of linear dynamics in random directed networks[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2006, 51(7):1207 – 1210.

[28] Tahhaz-Salehi A, Jadbabaie A. On consensus and random networks[C]//Proceedings of 44th Annual Allerton Conference, 2006: 1315 – 1321.

[29] Olfati-Saber R, Shamma J S. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion[C]//Proceedings of 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005:5692 – 5697.

[30] Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2004, 49 (9):1465 – 1476.

[31] Hatano Y, Mesbahi M. Agreement over random networks[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2005, 50(11):1867 – 1872.

[32] Olfati-Saber R. Ultra-fast consensus in small-word networks[C]//Proceedings of the American Control Conference, 2005:2371 – 2378.

[33] Lin Z, Francis B, Maggiore M. State agreement for continuous-time coupled nonlinear systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2007, 46(1):288 – 307.

[34] Angeli D, Bliman P A. Stability of leaderless discrete-time multi-agent systems[J]. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 2006,18:293 – 322.

[35] Arcak M. Passivity as a design tool for group coordination[J]. IEEE Trans Automatic Control,2007.

[36] Hayashi N, Ushio T, Harada F, et al. Consensus problem of multi-agent systems with nonlinear performance functions[J]. IEICE Fundamentals, 2007, E90-A(10):2261 – 2264.

[37] Dario-Bauso L, Pesenti R. Distributed consensus protocols for coordinating buyers[C]//Proceedings of the American Control Conference, 2003:588 – 592.

[38] Qu Z, Chunyu J, Wang J. Nonlinear cooperative control for consensus of nonlinear and heterogeneous systems[C]//Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, 2007:2301 – 2308.