第30卷 第4期　　昆明理工大学学报(理工版)　　Vol. 30 No. 4
2005年8月　　Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology)　　Aug. 2005

基于微分求积法的三维非恒定、不可压 N-S方程的数值计算模型

徐天茂[1],张立翔[1],何士华[2]
(1.昆明理工大学 建筑工程学院,云南 昆明 650224; 2.昆明理工大学 电力工程学院,云南 昆明 650051)

摘要:采用SIMPLE算法与用高阶多项式来逼近的微分求积法(PDQ)结合,建立了在非交错网格系统上求解三维、非恒定、不可压、原始变量形式Navier-Stokes方程的计算方法.在本算法中,流动控制方程中的空间导数用PDQ法进行离散,流动控制方程以SIMPLE算法的思想进行求解;并提出了在非交错网格系统中保证在边界上满足连续性方程以及补充压力校正方程的边界条件的方法.

关键词:PDQ法;SIMPLE算法;Navier-Stokes方程;原始变量
中图分类号:TB332　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1007-855X(2005)04-0063-06

Numerical Computation Model of Unsteady 3D Incompressible Navier-Stokes Equations by Differential Quadrature

XU Tian-mao[1], ZHANG Li-xiang[1], HE Shi-hua[2]
(1. Faculty of Civil and Architectural Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650224, China;
2. Faculty of Electric Power Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650051, China)

Abstract: In this paper, the SIMPLE strategy is combined with the polynomial-based quadrature method (PDQ) discretizations on a non-staggered grid to solve unsteady three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations in primitive variable form. The spatial derivatives of governing equations are discretizated by PDQ method. SIMPLE algorithm is applied to solve flow governing equations. Meanwhile, the ways to enforce the continuity equation on the boundary and to implement the suitable boundary condition for pressure correction equation on a non-staggered grid are proposed.

Key words: PDQ method; SIMPLE algorithm; Navier-Stokes equation; primitive variable

0 引言

近年来,对于紊流的直接数值模拟(DNS)的研究日益受到重视.由于DNS针对包括从积分尺度到耗散尺度在内的全部尺度范围的涡进行模拟,这就要求数值计算方法具有相当高的精度和分辨率.DNS常用的方法有谱方法、谱元法、高精度有限差分法、样条函数法.由于高精度差分法具有格式简单,计算量小,边界条件处理灵活等优点,20世纪90年代以来,高精度差分方法被应用于DNS中,如Rai等的高精度差分格式[1],Lele的不限于三点的紧致有限差分格式[2],付德薰、马延文的迎风紧致格式[3]等.因此,发展高精度、高分辨率的有限差分格式及其它高精度的格式是提高流动计算精确度必须研究的课题.

微分求积法(The differential quadrature method,简称DQ法)是由Bellman[4]提出的.DQ法是一种等价于最高精度的有限差分方法[5].DQ法的思想是:把网格点上导数的离散形式表示成为求解区域中该导数自变量坐标方向上所有节上函数值的一种加权线性叠加.与其它方法相比,DQ法的主要优点是可以用较

收稿日期:2004-12-10. **基金项目**:国家自然科学基金重大基础研究计划项目(项目编号:90210005).
第一作者简介:徐天茂(1965.6~),男,副教授,在读博士研究生.主要研究方向:流固耦合振动.
E-mail:kmustxtm@sina.com

少的结点数获得较高的精度，并且边界条件处理比较容易. 但当结点取多时，所形成的矩阵是病态的，很难计算加权系数[5]. Shu 和 Richards 引入了用高阶多项式来逼近所求函数(The polynomial－based quadrature method，简称 PDQ 法)[5,6]，克服了这一困难.

不可压缩流体控制方程的求解，连续性方程是作为求解 Navier－Stokes 方程的约束条件给出的，其中没有压力项，也没有时间项. 求解 Navier－Stokes 方程不同于一般方程结合边界条件联立求解，必须寻求办法解决速度与压力耦合的问题，也就是连续性方程的处理方法. 根据连续性方程的处理方法不同，求解的主要方法有涡量－流函数失量法、速度－涡量法、速度－速度势法、原始变量法. 在这些方法中，原始变量法是较常用的方法. 然而，用原始变量法求解 Navier－Stokes 方程有两个困难：一是没有独立的压力方程，速度和压力是耦合的，速度既出现在连续性方程中，也出现在动量方程中，而压力仅出现在动量方程中. 二是边界上的连续性方程必须强制地满足.

Patankar 和 Spalding 在 1972 年提出的 SIMPLE (semi－implicit method for pressure－linked equations) 算法[7]很好的处理了用原始变量法求解 Navier－Stokes 方程中的速度与压力耦合问题. 通常，SIMPLE 算法使用交错网格. 即将求解压力 p 等标量的计算网格与求解各速度分量的计算网格相互错开半个网格间距，p 等标量布置在主结点上(主网格)，速度布置在主结点之间的界面上，这样，在离散动量方程时压力梯度是用一个网格间距上的相邻主结点上的压力的差分来表示的. 其优点一是可以避免压力场发生波动而连续性又无法检测出来的问题，二是边界上的连续性方程能自动满足. 交错网格虽然很有效，然而缺点也很明显，一是由于采用多套网格系统(三维情况下有四套网格系统)，占用更多的计算机内存. 二是要进行关于几何参数和物理参数大量的插值运算，这既耗费机时，又损害数值计算的精度. 在更为严重的情况下，交错网格甚至会失效，不能克服压力场发生波动的现象[8]. 出于交错网格的缺点，在复杂的流动计算中，非交错网格的优势更加明显.

综上所述，SIMPLE 算法是一种求解原始变量不可压 Navier－Stokes 方程的有效方法，PDQ 法是一种使用网格数少、精度高的离散格式. 本文将 SIMPLE 算法与 PDQ 法相结合，建立在非交错网格上求解原始变量的三维不可压 Navier－Stokes 方程的计算方法.

1　PDQ 法的基本思想

PDQ 法假定：函数是充分光滑的，函数在任意一个结点上的微分(一阶、二阶导数)的离散形式表示成为求解区域中该导数自变量坐标方向上所有节上函数值的一种加权线性叠加. 即：

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{xi}=\sum_{j=1}^{M} a_{i,j}\,\varphi(x_j) \qquad i=1,2,\cdots,M \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x}\right)_{xi}=\sum_{j=1}^{M} b_{i,j}\,\varphi(x_j) \qquad i=1,2,\cdots,M \tag{2}$$

其中，M 为 x 方向的结点数，$a_{i,j}$，$b_{i,j}$为一阶导数、二阶导数的加权系数. 加权系数 $a_{i,j}$，$b_{i,j}$的计算公式为[5].

$$a_{i,j}=\frac{Q^{(1)}(x_i)}{(x_i-x_j)\,Q^{(1)}(x_j)} \qquad (i\neq j), \qquad a_{i,i}=-\sum_{k=1,k\neq i}^{M} a_{i,k} \tag{3}$$

$$b_{i,j}=2a_{i,j}\left(a_{i,i}-\frac{1}{x_i-x_j}\right) \qquad (i\neq j), \qquad b_{i,i}=-\sum_{k=1,k\neq i}^{M} b_{i,k} \tag{4}$$

其中：

$$Q^{(1)}(x_i)=\prod_{k=1,i\neq k}^{M}(x_i-x_k) \tag{5}$$

PDQ 法是一种等价于最高阶有限差分格式的离散方法，当网格结点为 M 时，m 阶微分具有 $(M-m)$ 阶精度[5]. 这种方法既可用于均匀网格，也可用于非均匀网格.

2　流动控制方程及边界条件

本文以不考虑体积力的三维、非恒定、不可压流动为例，物理边界定义为：s_{x-y}：$0\leq x\leq 1$　$0\leq y\leq 1$，

s_{x-z}: $0 \le x \le 1 \quad 0 \le z \le 1$, s_{y-z}: $0 \le y \le 1 \quad 0 \le z \le 1$. 三维、非恒定、不可压流动的控制方程的无量刚形式为:

连续性方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

动量方程($N-S$ 方程):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 v \tag{8}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 w \tag{9}$$

u,v,w 分别代表 x,y,z 坐标方向的速度分量,p 代表压力,Re 是雷诺数. 物理边界条件定义为:

$$u=0 \quad v=0 \quad w=0 \quad \text{在 } s_{y-z}, x=0 \text{ 和 } x=1 \tag{10}$$

$$u=0 \quad v=0 \quad w=0 \quad \text{在 } s_{x-z}, y=0 \tag{11}$$

$$u=1 \quad v=0 \quad w=0 \quad \text{在 } s_{x-z}, y=1 \tag{12}$$

$$u=0 \quad v=0 \quad w=0 \quad \text{在 } s_{x-y}, z=0 \text{ 和 } z=1 \tag{13}$$

3 数值计算方法

采用 SIMPLE 算法的迭代过程求解流动控制方程(6)~(9),在控制方程中三个方向的空间导数采用 PDQ 法进行离散,非恒定项采用一阶向前差分格式.

给定某一时间层 n 的初估速度场 u^n、v^n、w^n 和一个初估的压力场 p^*,控制方程(7)~(9)可离散为:

$$u^*_{i,j,k} = u^n_{i,j,k} + \Delta t \cdot \left(A^n_{i,j,k} - \sum_{l=1}^{M} a_{i,l}\, p^*_{l,j,k}\right) \tag{14}$$

$$v^*_{i,j,k} = v^n_{i,j,k} + \Delta t \cdot \left(B^n_{i,j,k} - \sum_{l=1}^{N} \bar{a}_{j,l}\, p^*_{i,l,k}\right) \tag{15}$$

$$w^*_{i,j,k} = w^n_{i,j,k} + \Delta t \cdot \left(C^n_{i,j,k} - \sum_{l=1}^{L} \hat{a}_{k,l}\, p^*_{i,j,l}\right) \tag{16}$$

其中:

$$A^n_{i,j,k} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\sum_{l=1}^{M} b_{i,l}\, u^n_{l,j,k} + \sum_{l=1}^{N} \bar{b}_{j,l}\, u^n_{i,l,k} + \sum_{l=1}^{L} \hat{b}_{k,l}\, u^n_{i,j,l}\right) - u^n_{i,j,k}\sum_{l=1}^{M} a_{i,l}\, u^n_{l,j,k} - v^n_{i,j,k}\sum_{l=1}^{N} \bar{a}_{j,l}\, u^n_{i,l,k} - u^n_{i,j,k}\sum_{l=1}^{L} \hat{a}_{k,l}\, u^n_{i,j,l}$$

$$B^n_{i,j,k} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\sum_{l=1}^{M} b_{i,l}\, v^n_{l,j,k} + \sum_{l=1}^{N} \bar{b}_{j,l}\, v^n_{i,l,k} + \sum_{l=1}^{L} \hat{b}_{k,l}\, v^n_{i,j,l}\right) - u^n_{i,j,k}\sum_{l=1}^{M} a_{i,l}\, v^n_{l,j,k} - v^n_{i,j,k}\sum_{l=1}^{N} \bar{a}_{j,l}\, v^n_{i,l,k} - u^n_{i,j,k}\sum_{l=1}^{L} \hat{a}_{k,l}\, v^n_{i,j,l}$$

$$C^n_{i,j,k} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\sum_{l=1}^{M} b_{i,l}\, w^n_{l,j,k} + \sum_{l=1}^{N} \bar{b}_{j,l}\, w^n_{i,l,k} + \sum_{l=1}^{L} \hat{b}_{k,l}\, w^n_{i,j,l}\right) - u^n_{i,j,k}\sum_{l=1}^{M} a_{i,l}\, w^n_{l,j,k} - v^n_{i,j,k}\sum_{l=1}^{N} \bar{a}_{j,l}\, w^n_{i,l,k} - u^n_{i,j,k}\sum_{l=1}^{L} \hat{a}_{k,l}\, w^n_{i,j,l}$$

$a_{i,j}$,$b_{i,j}$分别代表 x 方向一阶导数、二阶导数的加权系数,$\bar{a}_{i,j}$,$\bar{b}_{i,j}$分别代表 y 方向一阶导数、二阶导数的加权系数,$\hat{a}_{i,j}$,$\hat{b}_{i,j}$分别代表 z 方向一阶导数、二阶导数的加权系数.

从(14)~(16)式求得的 $n+1$ 时间层的中间速度场 u^*、v^*、w^* 可能并不满足连续性方程(6)式,要满足(6)式,需对速度场、压力场进行校正,校正方程为:

$$u^{n+1} = u^* + u' \qquad v^{n+1} = v^* + v' \qquad w^{n+1} = w^* + w' \qquad p^{n+1} = p^* + p' \tag{17}$$

假设经过校正的 $n+1$ 时间层的速度场 u^{n+1}、v^{n+1}、w^{n+1}和压力场 p^{n+1}满足连续性方程(6)式,采用与(14)~(16)式同样的方法,可得出:

$$u^{n+1}_{i,j,k} = u^n_{i,j,k} + \Delta t \cdot \left(A^n_{i,j,k} - \sum_{l=1}^{M} a_{i,l}\, p^{n+1}_{l,j,k}\right) \tag{18}$$

$$v^{n+1}_{i,j,k} = v^n_{i,j,k} + \Delta t \cdot \left(B^n_{i,j,k} - \sum_{l=1}^{N} \bar{a}_{j,l}\, p^{n+1}_{i,l,k}\right) \tag{19}$$

$$w^{n+1}_{i,j,k} = w^n_{i,j,k} + \Delta t \cdot \left(C^n_{i,j,k} - \sum_{l=1}^{L} \hat{a}_{k,l}\, p^{n+1}_{i,j,l}\right) \tag{20}$$

将(14)~(16)式、(18)~(20)式代入(6)式得:

$$\sum_{l=1}^{M} a_{i,l} u'_{l,j,k} + \sum_{l=1}^{N} \bar{a}_{j,l} v'_{i,l,k} + \sum_{l=1}^{L} \hat{a}_{k,l} w'_{i,j,l} = -S^*_{i,j,k} \tag{21}$$

其中:

$$S^*_{i,j,k} = \sum_{l=1}^{M} a_{i,l} u^*_{l,j,k} + \sum_{l=1}^{N} \bar{a}_{j,l} v^{*'}_{i,l,k} + \sum_{l=1}^{L} \hat{a}_{k,l} w^*_{i,j,l}$$

将(18)式减去(14)式得到 $u'_{i,j,k}$、(19)式减去(15)式得到 $v'_{i,j,k}$、(20)式减去(16)式得到 $w'_{i,j,k}$后代入(21)式得到:

$$\sum_{l=1}^{M} a^{(2)}_{i,l} p'_{l,j,k} + \sum_{l=1}^{N} \bar{a}^{(2)}_{j,l} p'_{i,l,k} + \sum_{l=1}^{L} \hat{a}^{(2)}_{k,l} p'_{i,j,l} = \frac{S^*_{i,j,k}}{\Delta t} \tag{22}$$

其中:

$$a^{(2)}_{i,l} = \sum_{k1=2}^{M-1} a_{i,k1} a_{k1,l} \qquad \bar{a}^{(2)}_{i,l} = \sum_{k1=2}^{N-1} \bar{a}_{j,k1} \bar{a}_{k1,l} \qquad \hat{a}^{(2)}_{i,l} = \sum_{k1=2}^{L-1} \hat{a}_{k,k1} \hat{a}_{k1,l}$$

压力校正方程(22)式可用逐次松弛 (SOR) 法求解.

SIMPLE 算法与 PDQ 法结合求解不可压流动的求解步骤如下:

1)给定某一 n 时间层的初估速度场 u^n、v^n、w^n 和一个初估的压力场 p^*.

2)由(14)~(16)式计算 $n+1$ 时间层的中间速度场 u^*、v^*、w^*.

3)由(22)式示解校正压力 p'. 在迭代过程中,边界上的校正速度 u'、v'、w'总是为零.

4)由校正方程(17)式计算经校正后的 $n+1$ 时间层的速度场 u^{n+1}、v^{n+1}、w^{n+1}和压力场 P^{n+1}.

5)检查是否达到收敛的要求,如果达到了收敛要求,则停止整个迭代过程. 否则,将 u^{n+1}、v^{n+1}、w^{n+1}、p^{n+1}作为初估的速度场和压力场,返回到第(2)步,继续迭代直到达到收敛要求为止.

4　边界条件的处理

基于非交错网格上 SIMPLE 算法与 PDQ 法相结合求解原始变量的不可压 Navier－Stokes 方程面临两个必须解决的困难:一是如何保证在边界上满足连续性方程. 使用非交错网格,边界上的连续性方程不是自动满足的,而要获得真实的解,在边界上满足连续性方程是至关重要的. 二是如何恰当地补充压力校正方程(22)式的边界条件. 由于对校正压力并不存在物理边界条件,要求解压力校正方程,必须补充求解方程所需的边界条件. 这两个问题可通过在边界上求解流动控制方程来解决.

4.1　压力校正方程边界条件的补充

如果给出所求解问题边界上的压力,初估的压力场 p^* 总是取为所给定的边界上的压力值,并且,在边界上总是取校正压力 $p'=0$. 但是,一般情况下,并不总是能给出边界上的压力,但它可由动量方程导出在边界上的动量方程来求解边界上的压力.

从给定的边界条件(10)~(13)式,得出边界上的动量方程为:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 在\ x=0,1 \qquad 0<y<1 \qquad 0<z<1 \tag{23}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad 在\ y=0,1 \qquad 0 \le x \le 1 \qquad 0 \le z \le 1 \tag{24}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \qquad 在\ z=0,1 \qquad 0 \le x \le 1 \qquad 0<y<1 \tag{25}$$

用 PDQ 法离散(23)式的空间导数项,得出:

$$\sum_{l=1}^{M} a_{i,l} p_{l,j,k} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \sum_{l=1}^{M} b_{i,l} u_{l,j,k} \tag{26}$$

将(26)展开, 在边界 $i=1$、$i=M$ 面上得到:

$$p_{1,j,k} = \frac{1}{AXM} \left[(a_{M,M} D_{1,j,k} - a_{1,M} D_{M,j,k}) + \sum_{l=2}^{M-1} (a_{M,l} a_{1,M} - a_{1,l} a_{M,M}) p_{l,j,k} \right] \tag{27}$$

$$p_{M,j,k}=-\frac{1}{AXM}[(a_{M,1}D_{1,j,k}-a_{1,1}D_{M,j,k})+\sum_{l=2}^{M-1}(a_{M,l}a_{1,1}-a_{1,l}a_{M,1})p_{l,j,k}] \tag{28}$$

同上的处理办法,离散(24)、(25)式得到:

$$p_{i,1,k}=\frac{1}{AYN}[(\bar{a}_{N,N}E_{i,1,k}-\bar{a}_{1,N}E_{i,N,k})+\sum_{l=2}^{N-1}(\bar{a}_{N,l}\bar{a}_{1,N}-\bar{a}_{1,l}\bar{a}_{N,N})p_{i,l,k}] \tag{29}$$

$$p_{i,N,k}=-\frac{1}{AYN}[(\bar{a}_{N,1}E_{i,1,k}-\bar{a}_{1,1}E_{i,N,k})+\sum_{l=2}^{N-1}(\bar{a}_{N,l}\bar{a}_{1,1}-\bar{a}_{1,l}\bar{a}_{N,1})p_{i,l,k}] \tag{30}$$

$$p_{i,j,1}=\frac{1}{AZL}[(\hat{a}_{L,L}F_{i,j,1}-\hat{a}_{1,L}F_{i,j,L})+\sum_{l=2}^{L-1}(\hat{a}_{L,l}\hat{a}_{1,L}-\hat{a}_{1,l}\hat{a}_{L,L})p_{i,j,l}] \tag{31}$$

$$p_{i,j,L}=-\frac{1}{AXL}[(\hat{a}_{L,1}F_{i,j,1}-\hat{a}_{1,1}F_{i,j,L})+\sum_{l=2}^{L-1}(\hat{a}_{L,l}\hat{a}_{1,1}-\hat{a}_{1,l}\hat{a}_{L,1})p_{i,j,l}] \tag{32}$$

其中:

$$AXM=a_{1,1}a_{M,M}-a_{1,M}a_{M,1}\qquad D_{1,j,k}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\sum_{l=1}^{M}b_{1,l}u_{l,j,k}\qquad D_{M,j,k}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\sum_{l=1}^{M}b_{M,l}u_{l,j,k}$$

$$AYN=\bar{a}_{1,1}\bar{a}_{N,N}-\bar{a}_{1,N}\bar{a}_{N,1}\qquad E_{i,1,k}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\sum_{l=1}^{N}\bar{b}_{1,l}v_{i,l,k}\qquad E_{i,N,k}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\sum_{l=1}^{N}\bar{b}_{N,l}v_{i,l,k}$$

$$AZL=\hat{a}_{1,1}\hat{a}_{L,L}-\hat{a}_{1,L}\hat{a}_{L,1}\qquad F_{i,j,1}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\sum_{l=1}^{L}\hat{b}_{1,l}w_{i,j,l}\qquad F_{i,j,L}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\sum_{l=1}^{L}\hat{b}_{L,l}w_{i,j,l}$$

由(27)~(32)式可确定边界上的压力,此时,边界上的校正压力 $p'=0$.

在这一求解过程中,由于边界上的压力是直接由边界上的动量方程求解,而内部结点上的压力由SIMPLE 算法求解,因此,得到的压力场是一个真实的压力场.

4.2 边界上连续性方程的满足

仅有边界上的校正压力边界条件是不够的,这仍可导致不准确的数值解,为了获得准确的解,还必须在边界上强制性地满足连续性方程.从连续性方程出发,当边界上满足连续性方程时,导出边界上的速度Neumann 边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0\qquad 在\ x=0,1\qquad 0<y<1\qquad 0<z<1 \tag{33}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0\qquad 在\ y=0,1\qquad 0\le x\le 1\qquad 0\le z\le 1 \tag{34}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=0\qquad 在\ z=0,1\qquad 0\le x\le 1\qquad 0<y<1 \tag{35}$$

(10)~(13)式提供了一个速度边界条件,这一边界条件可作为边界结点上的速度,即:

$$u_{1,j,k}=0,u_{M,j,k}=0,u_{i,1,k}=0,u_{1,N,k}=1,u_{i,j,1}=0,u_{i,j,L}=0 \tag{36}$$

$$v_{1,j,k}=0,v_{M,j,k}=0,v_{i,1,k}=0,v_{1,N,k}=0,v_{i,j,1}=0,v_{i,j,L}=0 \tag{37}$$

$$w_{1,j,k}=0,w_{M,j,k}=0,w_{i,1,k}=0,w_{1,N,k}=0,w_{i,j,1}=0,w_{i,j,L}=0 \tag{38}$$

(33)~(35)式提供了另一个速度边界条件,这一边界条件能转换为邻边界结点上的速度方程.用PDQ 法离散(33)式的空间导数项,得出:

$$\sum_{l=1}^{M}a_{i,l}u_{l,j,k}=0 \tag{39}$$

将(39)式展开,并代入(36)式所给定的边界条件,在邻边界的 $i=2$ 、$i=M-1$ 面上得到:

$$u_{2,j,k}=\frac{1}{a_{1,2}a_{M,M-1}-a_{M,2}a_{1,M-1}}[\sum_{l=3}^{M-2}(a_{M,l}a_{1,M-1}-a_{1,l}a_{M,M-1})u_{l,j,k}] \tag{40}$$

$$u_{M-1,j,k}=\frac{1}{a_{M,2}a_{1,M-1}-a_{1,2}a_{M,M-1}}[\sum_{l=3}^{M-2}(a_{M,l}a_{1,2}-a_{1,l}a_{M,2})u_{l,j,k}] \tag{41}$$

同上的处理办法,离散(34)、(35)式可得到:

$$v_{i,2,k}=\frac{1}{\bar{a}_{1,2}\bar{a}_{N,N-1}-\bar{a}_{N,2}\bar{a}_{1,N-1}}[\sum_{l=3}^{N-1}(\bar{a}_{N,l}\bar{a}_{1,N-1}-\bar{a}_{1,l}\bar{a}_{N,N-1})v_{i,l,k}] \tag{42}$$

$$v_{i,N-1,k} = \frac{1}{\bar{a}_{N,2}\bar{a}_{1,N-1} - \bar{a}_{1,2}\bar{a}_{N,N-1}}\left[\sum_{l=3}^{N-2}(\bar{a}_{N,l}\,\bar{a}_{1,2} - \bar{a}_{1,l}\,\bar{a}_{N,2})v_{i,l,k}\right] \quad (43)$$

$$w_{i,j,2} = \frac{1}{\hat{a}_{1,2}\hat{a}_{L,L-1} - \hat{a}_{L,2}\hat{a}_{1,L-1}}\left[\sum_{l=3}^{L-2}(\hat{a}_{L,l}\,\hat{a}_{1,L-1} - \hat{a}_{1,l}\,\hat{a}_{L,L-1})w_{i,j,l}\right] \quad (44)$$

$$w_{i,j,L-1} = \frac{1}{\hat{a}_{L,2}\hat{a}_{1,L-1} - \hat{a}_{1,2}\hat{a}_{L,L-1}}\left[\sum_{l=3}^{L-2}(\hat{a}_{L,l}\,\hat{a}_{1,2} - \hat{a}_{1,l}\,\hat{a}_{L,2})w_{i,j,l}\right] \quad (45)$$

由(40)~(45)式可求出邻边界结点上的速度,邻边界结点上的速度是在边界上强制性地保证满足连续性方程的前提下求出的,这样边界上满足连续性方程就得到强制性的保证.边界结点、邻边界结点以外的内部结点上的速度由 SIMPLE 得法求解.

5 结 论

SIMPLE 算法已经成功地广范应用在低阶的有限差分法和有体积法中,是一种较为有效的求解原始变量 Navier - Stokes 方程的算法;PDQ 法是一种用较少的网格结点而获得较高的精度的高阶有限差分方法.将 SIMPLE 算法与 PDQ 法结合,集中了 SIMPLE 算法与 PDQ 法的所有优势特点,所建立的在非交错网格系统上用原始变量法求解三维、非恒定、不可压 Navier - Stokes 方程的计算方法,对提高流体数值计算的效率和精度有十分重大的意义.

参考文献:

[1] Rai MM, Moin P. Direct simulations of turbulent flow using finite difference schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1991,96:15 ~53.

[2] Lele SK. Compact finite difference schemes with spectral - like resolution[J]. Journal of Computational Physics,1992,103:16 ~42.

[3] 傅德薰,马延文. 计算流体力学[M].北京:高等教育出版社,2002.81 ~90.

[4] Bellman RE, Kashef BG, Casti J. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations[J]. Journal of Computational Physics,1972,10:40 ~52.

[5] Shu C, Chew Y T. On the equivalence of generalized differential quadrature and highest order finite difference scheme[J]. Computer methods in applied mechanics and engiheering,1998,155:249 ~260.

[6] Shu C, Richards BE. Application of generalized differential quadrature to solve two - dimensional incompressible Navier - Stokes equations[J]. International Journal for Nmerical Methods in Fluids,1992,15:791 ~798.

[7] S. V. 帕坦卡. 传热与液体流动的数值计算[M].北京:科学出版社,1984.143 ~157.

[8] 徐天茂,王煜,等. 贴体曲线坐标系中的非交错网格的 SIMPLE 算法[J].云南工业大学学报,1999,(4):42 ~46.