一种新的网络对策评价方法及其应用[◦]

朱稼兴　陈　哲

(北京航空航天大学管理学院, 北京 100083)

摘要　用一种新类型网络对策的势指标集理论建立了工作性质不同的合作部门之间的评价方法, 给出了问题的数学模型及其有关证明, 最后以民航为例作实例分析。

关键词　合作对策　势指标集　网络　流

Evaluating Method Based on a New Type of Network Cooperative Game Theory and It's Application

Zhu Jiaxing　Chen Zhe

(Management School, Beijing University of Aeronautics & Astronautics 100083)

Abstract　This paper introduces a new method of evaluating system consisted of many section with different characters. The method is based on a new type of network cooperative game theory. A mathematics model of this method and related proof are given. At the end of the paper, we use a simple example of CAAC profession MIS. to examine our method.

Keywords　cooperative game theory; power index set theory; network; flow

1　问题的提出

一个大型项目的开发往往涉及到几个公司, 项目进行过程中, 各个公司相互配合, 工作相互渗透。项目完成后, 这些公司要分配所得收益, 但是应该怎样分呢? 这需要对各个公司的工作成果进行公正的评价。又如: 从宏观角度看, 一个企业是一个可以完成一定的功能的大系统, 而这个大系统的功能是由它的子系统或企业的各个部门相互协作完成的。对一个企业来说, 经常要了解这样一个问题: 既然企业功能的实现是依靠它各个部门。那么, 各部门的功能在企业总系统中到底占多大比重呢? 也就是, 怎样评价企业这个大系统的各个子系统的功能呢? 这需要建立一个系统评价的指标, 对一个有许多有机组成部分的大系统的各个子系统的功能进行量化。这个问题对每个企业都是很有实用价值的, 它可以作为企业在各个部门之间分配收益的标准, 也可以作为企业各部门之间横向对比的依据。而解决这个问题是有一定困难的, 原因之一是系统的各个部分的功能是相互协调又相互渗透的, 所以它们之间的界限很难明确划分。之二是有些部分, 例如, 服务性部门, 技术性部门, 它们的功能往往含有难以量化的部分。这都给评价带来一定困难。本文将提出一种利用合作对策的势指标集理论, 通过用网络模型对系统功能进行分析, 来达到评价中分系统功能价值的方法。

2　合作对策的基本概念

在现实生活中, 人们往往涉及到团体与团体, 团体与个人之间的竞争和相互利益冲突问题, 如体育比

◦　本文于 1997 年 1 月 20 日收到

赛, 市场经济中价格争执, 战争冲突等。我们称这类冲突问题的理论模型为博奕或对策论。按对策局中人之间的关系分, 可分为合作对策和非合作对策。非合作对策中, 局中人事先不能互通信息, 也不能做任何形式的协商, 对策收益也不在局中人之间转移; 而合作对策中允许局中人相互交流信息, 充分协商合作, 对策结束后的收益根据协议在局中人之间分配。

一个合作对策包括下列要素:

局中人集合: $N = \{1, 2, \cdots, n)$, $S \subseteq N$, 表示局中人的联盟, N 的局中人能形成 2^N 个结盟。

特征函数: $V(s)$, V 是一个映射, $V: 2^N \to R$, 2^N 指 N 的子集族, $S \in 2^N$, 对每个联盟 S, 赋给 $V(s)$ 一个实数, 表示联盟 S 的收益。

满足:

$$V(\varnothing) = 0 \tag{1}$$

$$V(s \cup t) \geq V(s) + V(t) \qquad s \cap t = \varnothing \tag{2}$$

以后我们就用序偶 (N, V) 表示 N 人合作对策。显然, 一个 N 人合作对策 (N, V) 取决于特征函数集 V。

分配及分配集:

设 n 维向量 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中 x_i, $i \in N$ 为局中人 i 所得到的支付。向量 X 表示 $V(N)$ 的一种分配, 又称支付向量。显然, 对每个局中人来说, 他至少期望得到的 x_i 应满足:

$$x_i \geq V(i) \qquad i \in N \tag{3}$$

否则, 局中人 i 宁愿自己单独干, 而不与任何人结盟。式(3) 称为个体合理性条件。

另外 x_i 还必需满足

$$\sum_{i \in N} x_i = V(N) \tag{4}$$

因为所有局中人所得之和等于总体联盟所得。式(4) 称群体合理性条件。

定义 1 给定对策 (N, V), 满足条件(3)、(4) 的 n 维向量 $X \in R^N$ 称对策的支付向量。所有支付向量的集合记为 $E(N, V)$, 或 $E(V)$, 称对策的分配集。即:

$$E(V) = \left\{ X \mid X \in R^N: \quad \sum_{i \in N} x_i = V(N), \quad x_i \geq V(i) \quad i \in N \right\}$$

合作对策的一个主要课题是: 给定对策 (N, V), 最大联盟为 N, 怎样在局中人之间分配收入 $V(S)$, 才能使合作形成。也就是找到一个或一些分配向量, 使所有局中人能接受, 或不得不接受这种分配, 否则他只能得到更小的支付。

自从 1944 年 Von Neumann 和 Moregenster 引入对策以来, 提出了许多在局中人之间公平分配的收入的方法。于是, 人们决定以特征函数为依据, 寻求一种准则, 它对所有对策都有且只有一种分配方案, 这方面的理论称为势指标集理论。其工作开始于 Shapley, 他于 1953 年提出 Shapley 值, 以后, 陆续又有许多人提出有关理论, 如半值、Banzhaf-Coleman 值等等。Shapley 值是基于以下思想: 每个局中人所应得的支付应以他在对策中的"势力"为根据, 而势力大小的判定应根据局中人在合作中带来的收益的能力, 他提出了一个满足三条公理的算子, 被称为 Shapley 值。

定理 1 给定 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$, 特征函数为 V, 于是对策存在唯一的 Shapley 值 Φ_i 满足下式:

$$\Phi_i = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(|N| - 1 - |S|)!}{|N|!} \left(V(S \cup \{i\}) - V(S)\right) \tag{5}$$

式中 $|S|$、$|N|$ 表示集合 S、N 中局中人的个数。从式(5) 可以看出, Shapley 值实际上是局中人边际收益的加权和, 它常常作为衡量局中人拥有"势力"的象征, 或作为对策中分配收益的标准。近年来, 势指标集理论是国内外对策论研究中最活跃的分支, 尤其是 Shapley 值, 对它的应用十分广泛, 例如, 资源分配, 成本分摊, 股份分红等等。

3 网络对策评价方法原理

回到原来的问题, 我们仍以项目合作为例。一个项目的功能既然是由许多活动相互合作、协调共同来

完成的, 而各个活动之间的关系又正好有合作性, 这与合作对策的局中人有类似之处。我们如果找到一种对应, 把一个工程项目问题转化成合作对策问题, 就可以用合作对策的势理论对它进行研究了。基于上述思想, 本文提出用对策的势指标集理论来建立系统评价指标的方法。

那么, 使用哪一个值作为评价指标呢? 由于 Banzhaf-Coleman 值是基于联盟的思想而提出的, 而在项目中的合作的各方都是合作关系, 不存在某方的独有的联盟, 而用 Shapley 值则无此限制并且 Banzhaf-Coleman 值和 Shapley 值都是边际收益的加权和, 其区别仅仅在于他们的加权值不同。Banzhaf-Coleman 值的权值为定值, Shapley 值的权值是随联盟的变化而变化的, 这要比 Banzaf-Coleman 值更合理。因为假如局中人 1、局中人 2 分别给联盟 1、联盟 2 带来相同的边际收益, 假如联盟 1 中的局中人数大于联盟 2 的中的局中人数, 则显然局中人 1 的提供支付的能力比局中人 2 强, 可见相同的边际收益对不同的联盟其意义是不同的。因此选用 Shapley 值作为评价指标比 Banzhaf-Coleman 值更合理。

为了用对策的势指标集理论来建立系统评价指标, 我们必须先详细的把一个工程项目问题表达出来。PERT 图经常被用来描述一个工程项目问题, 我们准备对它进行一些修改, 使之适合本问题的需要。具体做法是: PERT 图的结点和弧的拓扑结构不变, 但用结点 P_i 表示活动, 而赋予每个结点一个权, 用 W_i 表示, 权值等于结点所表示的活动的价值投入, 可以用投入的单位劳动力价值×工作时间表示。弧表示活动的先后顺序。如果活动 P_i 是活动 P_j 的紧前活动, 则有一条 P_i 指向 P_j 的弧。我们暂时称这种图为项目图。通过这种方法, 我们就有一个全面描述项目的各个活动的逻辑关系和投入价值数量的工具了。

为了叙述方便, 我们先给出以下说明:

假设一网络 N, 结点为 P_i, $i \in N = \{1, 2, \cdots, n\}$, 结点集用 P_S 表示, $S \subseteq N$, 每个结点的权, 用 W_i 表示。弧集为 E。网络中只有出弧的结点称源结点, 记为 B, 只有入弧的结点称收结点, 记为 F。

定义 2 形成流: 网络中包含收结点和源结点的道路称形成流。

为了用对策理论研究工程项目, 我们现在定义一个项目图上的对策, 也就是定义项目图上的局中人和特征函数。通常, 把需要评价的对象定义为局中人, 对于本问题来说, 局中人就是图的结点 P_i, 或项目的活动。联盟就是结点集 P_S。

现在局中人有了, 下一个问题是怎样确定“局中人”和“联盟”的特征函数。在合作对策论中, 特征函数值是用某一结局下局中人或联盟所得收益或效用表示的。而在本问题中的局中人和联盟的收益与对策中的收益相比, 不那么直观。为了得到这些特殊的“局中人”和“联盟”的特征函数, 我们先对这些“局中人”和“联盟”进行分析。项目图中的结点(集)的效用, 首先应该包含结点(集)的投入价值, 也就是它权值 w_i。但是, 光用权值表示效用还有片面性。原因如下:

项目的各项活动是一个有机的整体。每个活动都与其他活动有联系, 并且, 会对其他活动产生影响。这是它效用的一个十分重要的方面。也是活动之间有合作性的表现。所以, 为了达到全面评价各个活动的目的, 就应该把结点在项目活动中对其他结点的影响和与其他结点的合作的能力也考虑进去。其实, 各个结点这方面的效用是有很大的不同的, 例如, 项目中关键路上的活动比其他活动重要, 它的延误导致整个项目的推迟。而其他结点则没有这种性质。很显然, 这种效用与网络结点的拓扑的结构有关, 所以, 把结点的这方面的效用称之为拓扑效用, 用 S_i 表示。为了确定结点的拓扑效用, 我们先从纯网络的角度来对网络中结点的功能进行分析。

网络的一个重要功能就是能传送一定的流量, 并且项目图表示的也是一种价值的流动和积累过程。所以, 用结点(集)在网络中负载流量的能力作为它的拓扑效用值比较好。

既然用对策的势理论来评价网络中的结点的拓扑效用, 我们必须先定义结点拓扑效用的特征函数, 记为 $T(P_S)$, 或简记为 $T(S)$。用结点拓扑效用特征函数的 Shaprey 值作为结点拓扑效用值 U_i。

对于结点 P_i 来说, 拓扑效用的特征函数 $T(P_i)$ 应等于结点的载流能力, 记为 $L(P_i)$, 或 L_i。

通过对网络的分析可知, 结点的载流能力 L_i, 应与网络中除去结点及结点关联的弧后损失形成流的条数 A 成正比。不过, 这损失的形成流中还包括了不关联于结点的弧。所以, 还应在 A 上乘以一个比例系数。这个比例系数应该是结点相关的弧的数目, 在所有通过它的形成流包含的弧的数目中占的比例。

下面我们就定义结点的拓扑效用特征函数。

设网络中除去结点 P_i 中结点及结点关联的弧后损失形成流的条数为 A_i; 结点 P_i 关联的弧的数量为 N_i; 所有通过它的形成流包含的弧的数目为 M_i。

定义 3　结点 P_i 载流能力 $L(P_i)$:

$$L(P_i) = A_i \times \frac{N_i}{M_i} \tag{6}$$

上述定义的结点载流能力 $L(P_i)$ 仅仅表示单人结点的效用。下面定义结点集 P_S 的效用。我们知道, 一个有机系统, 最显著的特征就是: 总体效用大于部分效用之和。所以对于结点集 P_S, 它的效用应比它包含的结点的效用之和要大。大多少呢? 显然, 这与 P_S 中结点的合作关系是否紧密程度有关。我们用合作性系数 $R(s)$ 表示结点集 P_S 中结点间的合作关系紧密程度, 而用它包含的结点的效用之和乘以 $R(s)$ 表示结点集 P_S 的效用。

下面我们来定义结点集 P_S 间的合作性系数 $R(s)$。首先, 当结点间无关时, 它应该为 1, 即结点集 P_S 的效用总体效用等于它包含的结点的效用之和。其次, 它还应随着结点间关系紧密增加而增加。在图中, 结点的关联是用弧来表示的。所以我们就用图中至少含一个端点在结点集 P_S 中的边的条数 $C(s)$ 作为合作性系数 $R(s)$ 变量。

定义 4　结点的合作性系数 $R(s)$:

$$R(s) = \frac{e^{c(s)}}{c(s)+1} \tag{7}$$

显然(7)满足上述条件即: $C(s) = 0$ 时 $R(s) = 1$, 且 $R(s)$ 是 $C(s)$ 的增函数。

定义 5　结点拓扑效用的特征函数 $T(s)$:

当 S 表示单个结点时, $T(s) = L(P_i)$　　(8)

当 S 表示结点集时,　$T(s) = R(S)\sum_{P_i \in S} L(P_i)$　　(9)

显然, 从(8)、(9)式可以得出以下定理:

定理 2　给定一网络 W, 结点为 P_i, $i \in N = \{1, 2, \cdots, n\}$, 弧集为 E, $S \subseteq N$, 给定此网络上的对策, s, t 为网络中结点集, 则特征函数 T 满足:

$$T(\varnothing) = 0 \tag{10}$$

$$T(s \cup t) \geq T(s) + T(t) \qquad s \cap t = \varnothing \tag{11}$$

证明　(10)式显然, 只证(11)式。由特征函数 T 的定义有:

$$T(s \cup t) = R(s \cup t)\sum_{P_i \in (s \cup t)} L(P_i)$$

$$= \frac{e^{c(s \cup t)}}{c(s \cup t)+1}\sum_{P_i \in (s \cup t)} L(P_i) \tag{12}$$

根据网络理论及 C 函数的定义可知

$$C(s \cup t) \geq C(s) + C(t) \tag{13}$$

根据高等数学的知识可知, 函数 $R(s)$ 即是增函数, 又是凸函数。首先根据 $R(s)$ 的增函数性质和(13)式得:

$$R(s \cup t) = \frac{e^{c(s \cup t)}}{c(s \cup t)+1} \geq \frac{e^{c(s)+c(t)}}{c(s)+c(t)+1} \tag{14}$$

又由于 $R(s)$ 是凸函数所以有,

$$\frac{e^{c(s)+c(t)}}{c(s)+c(t)+1} \geq \frac{e^{c(s)}}{c(s)+1} + \frac{e^{c(t)}}{c(t)+1} = R(s) + R(t) \tag{15}$$

将(14)代入(15)式得

$$R(s \cup t) \geq R(s) + R(t) \tag{16}$$

将(16)式代入(12)式得

$$
\begin{aligned}
T(s \cup t) &= R(s \cup t) \times \sum_{P_i \in (s \cup t)} L(P_i) \\
&\geq (R(s) + R(t)) \times \sum_{P_i \in (s \cup t)} L(P_i) \\
&= R(s) \times \sum_{P_i \in (s \cup t)} L(P_i) + R(t) \times \sum_{P_i \in (s \cup t)} L(P_i)
\end{aligned} \tag{17}
$$

又因为 $L(P_i) \geq 0$, 所以

$$
\begin{aligned}
R(s) \times \sum_{P_i \in (s \cup t)} L(P_i) + R(t) \times \sum_{P_i \in (s \cup t)} L(P_i) &\geq R(s) \times \sum_{P_i \in s} L(P_i) + R(t) \times \sum_{P_i \in t} L(P_i) \\
&= T(s) + T(t)
\end{aligned}
$$

定理得证。由此可见, $T(s)$ 满足对策特征函数的条件。

用 $T(s)$ 作为网络对策的特征函数代入(5)式计算出 Shaprey 值, 网络对策中结点 P_i 的拓扑效用值:

$$
U_i = \sum_{s \subset N \setminus \{i\}} \frac{|s|!(|N|-1-|s|)!}{|N|!} (T(s \cup \{i\}) - T(s)) \tag{12}
$$

式中 $|s|$、$|N|$ 表示集合 S、N 中结点的个数。结点集 P_s 的拓扑效用值等于 P_s 中所包含结点的 S_i 值的和。到此为止, 我们已经建立了一种评价一个功能系统的各个分系统功能指标体系的方法, 其具体步骤如下:

1. 分析项目功能, 绘制 $PERT$ 图, 由此绘制项目图;
2. 计算活动的 W_i、$L(P_i)$ 值;
3. 计算结点集的 $R(s)$、$T(s)$ 的值;
4. 计算结点 U_i 值;
5. 活动的评价指标为 $W_i \times U_i$;
6. 计算公司的评价指标, 某公司的评价指标等于公司所进行活动评价指标值的和。

4 应用举例

我们以某单位为例, 应用此方法, 对其各个部门进行评价。假定经过系统分析后, 其主要部门抽象成项目图如图 1。图 1 中结点 B 和 F 表示项目的开始和结束, 没有实际意义, 所以不计算它的 U_i 值。由于 W_i 值与于本文讨论的内容无关, 根据上述 3 中的方法, 计算网络的拓扑效用值结果如下:

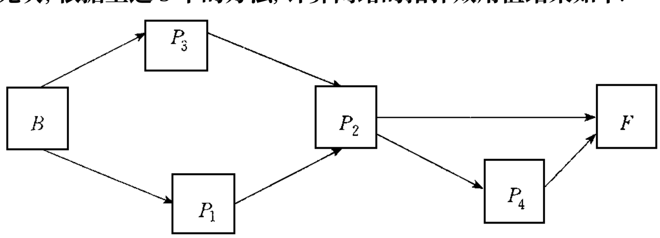

图 1

计算 T 值: $T(1) = T(3) = 0.8$; $T(2) = 2.2857$; $T(4) = 0.6667$; $T(12) = 4.1939$; $T(13) = 1.69$; $T(14) = 1.4667$; $T(23) = 4.1939$; $T(24) = 4.0127$; $T(34) = 1.4667$; $T(234) = 9.2422$; $T(134) = 2.2667$; $T(124) = 9.2422$; $T(123) = 9.5706$; $T(1234) = 22.8593$。将上述结果代入(12)式得: $U1 = 4.6471$; $U2 = 7.9528$; $U3 = 4.6471$; $U4 = 4.4741$;

从上述结果中, 可以看到, $U2$ 最大, $U1 = U3$; 这说明部门 2 在图中的拓扑效用最大。这是与图中的实际情况相吻合的, 因为, 从网络的拓扑结构上看, $P2$ 是网络的一个点断集, 除去它则网络流量减为 0 而其他结点都没有这种性质。另外, $U1 = U3$; 可以说明部门 1 与部门 3 的拓扑效用是相等的。而实际情况也正是如此, 因为, 在网络 P_1, P_3 是两个并联边上的点它们的拓扑位置是互为对称的, 所以它们的拓扑效用也必然相等。这都说明, 本方法是与实际情况相符号。

5　结论

近年来, 随着价值工程理论的发展, 出现了许多评价方法。例如AHP 方法、灰色关联度法等, 而这些方法都是基于人工打分的, 虽然用了种种方法消除主观偏差, 但主观性总难以完全克服。因为对策的势指标集理论本来就是用来评价局中人的, 所以本方法用对策的势指标集理论来建立系统评价指标, 这在国内外尚属首次。这样不用人工打分, 完全消除了人工打分的主观偏差。不过, 用对策的势指标理论需要知道特征函数, 所以, 确定特征函数是本方法的一个重要方面。对于不同的评价内容特征函数也不同。这就需要具体情况具体分析。特征函数定义得好与坏直接关系到评价的准确程度。本文定义的特征函数仅仅作为一个例子, 并不一定是网络对策的最好的特征函数。但不论什么样的特征函数, 都应满足式(1) (2), 即总体大于部分之和。

参 考 文 献

1　Thomas, Games L C. Theory and Application, Halsted Press, 1984

2　Kailai E, Zemel Z. Totally balanced games and games of flow, Math Oper. Res 1987

3　卢开澄. 图论及其应用, 北京: 清华大学出版社, 1994

4　赵景柱, 叶田祥. 策理论与应用, 北京: 中国科学技术出版社, 1995

(上接第 10 页)

从预警结果看, 只有 2 个与原警度不同, 由(15)式可得到误判概率等于 2/36(即为 0. 056), 表明以表 2 的判别系数构成的Bayes 预警判别函数, 其预警判别效果不错。

8　结论

概率模式分类预警系统的设计虽然需要先验概率、条件概率或后验概率, 但模式识别和多元统计分析已提供了很多理论方法, 可以解决预警实际应用中的许多困难。此外, 概率模式分类法可以得到最小的误判概率, 其有关分类误判概率等方面的理论, 极为适合研究预警系统的预警可靠性。因此, 概率模式分类在预警系统的设计和应用中是很有前途的。

参 考 文 献

1　顾海兵等. 中国工农业经济预警. 北京: 中国计划出版社, 1992

2　顾海兵等. 未雨绸谬——宏观经济问题预警研究. 北京: 经济日报出版社, 1993

3　蔡元龙. 模式识别. 西北电讯学院出版社, 1986

4　边肇祺等. 模式识别. 北京: 清华大学出版社, 1988

5　沈清等. 模式识别导论. 北京: 国防科技大学出版社, 1991

6　Tou J T, Gonzalez R C. Pattern Recognition Principles, 1974

7　Manetsch J M. An Approach to Early Warning of Slowly Evolving Crises with Reference to Food Shortage Forecasting. IEEE TRANS., Syst. Man. Cybern., Vol, SMC-14, No. 3 MAY/JUNE, 1984