

# 菲涅耳衍射变换及其在二元光学设计中的应用

李俊昌

(昆明理工大学 理学院, 云南 昆明 650093)

**摘要:** 导出菲涅耳衍射的逆运算表达式, 定义菲涅耳衍射变换, 并基于二元光学设计的 Gerchberg - Saxton(GS)算法, 将菲涅耳衍射变换用于二元光学元件的设计, 给出对产品表面作激光标记的光学元件的设计实例.

**关键词:** 衍射计算; 二元光学; 光学设计

**中图分类号:** O438 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007 - 855X(2004)04 - 0221 - 05

## Fresnel Diffraction Transform and its Application in the Design of Binary Optics

LI Jun-chang

(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

**Abstract:** The expression of the inverse calculation of Fresnel diffraction has been derived and the definition of Fresnel diffraction transform is given. Based on Gerchberg - Saxton(GS) calculation method, Fresnel diffraction transform is applied to the design of binary optical elements and an example of optical element design is provided, which is used in the laser marking on the surface of the products.

**Key words:** diffraction calculation; binary optics; optic design

### 0 引言

在激光应用研究中, 沿着光传播方向研究光波从一个空间平面到另一个空间平面的衍射是一件十分重要的工作, 在许多情况下, 例如二元光学设计<sup>[1]</sup>及实时全息精确测量<sup>[2]</sup>, 还涉及到逆着光波传播方向的衍射逆运算问题. 在标量衍射理论研究领域, 沿着光波传播方向的衍射计算及其逆向运算有多种方法求解<sup>[3]</sup>. 我们不但可以从基尔霍夫公式、瑞利 - 索末菲公式以及衍射的角谱理论出发, 导出可以用傅里叶变换表述及使用快速傅里叶变换—FFT(The Fast Fourier Transform)运算的表达式, 而且, 还可以将菲涅耳衍射积分的逆运算表示为与菲涅耳衍射积分非常对称的形式, 建立可以用 FFT 计算的菲涅耳衍射变换. 对上述计算方法的灵活使用, 可以十分方便和有效地解决许多重要的光学计算及光学设计问题.

本文简要导出菲涅耳衍射变换, 并基于二元光学设计的 Gerchberg - Saxton(GS)算法<sup>[1]</sup>, 将菲涅耳衍射变换用于菲涅耳衍射区衍射元件的设计, 给出可以用于产品表面进行激光标记的衍射元件设计实例.

### 1 菲涅耳衍射变换

按照标量衍射理论, 直角坐标系中的菲涅耳衍射表述如下<sup>[3]</sup>:

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \exp\left\{\frac{jk}{2d}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0 \quad (1)$$

收稿日期: 2004 - 05 - 16. 基金项目: 国家自然科学基金资助(项目编号: 60178004).

作者简介: 李俊昌(1945.9~), 男, 昆明理工大学理学院激光所所长, 博士生导师. 主要研究方向: 数字光信息处理及激光与物质相互作用. E-mail: jcli@vip.163.com

式中,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  是光波长;  $U_0(x_0, y_0)$  为平面  $x_0y_0$  上的光波场,  $U(x, y)$  是经过距离  $d$  的衍射后, 观测平面  $xy$  上的光波场.

对上式两边作傅里叶变换并利用空域卷积定律得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{U(x, y)\} &= \mathcal{F}\{U_0(x_0, y_0)\} \mathcal{F}\left\{\frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \exp\left[\frac{jk}{2d}(x^2 + y^2)\right]\right\} \\ &= \mathcal{F}\{U_0(x_0, y_0)\} \exp\left\{jkd\left[1 - \frac{\lambda^2}{2}(f_x^2 + f_y^2)\right]\right\} \end{aligned} \quad (2)$$

式中,  $f_x, f_y$  是与空间坐标  $x, y$  对应的频域坐标. 这样, 物平面  $x_0y_0$  上光波场的傅里叶变换表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{U_0(x_0, y_0)\} &= \mathcal{F}\{U(x, y)\} \exp\left\{-jkd\left[1 - \frac{\lambda^2}{2}(f_x^2 + f_y^2)\right]\right\} \\ &= \mathcal{F}\{U(x, y)\} \mathcal{F}\left\{\frac{\exp(-jkd)}{-j\lambda d} \exp\left[-\frac{jk}{2d}(x^2 + y^2)\right]\right\} \end{aligned} \quad (3)$$

上式两边作逆傅里叶变换即得到与(1)式形式十分对称的逆运算表达式

$$U_0(x_0, y_0) = \frac{\exp(-jkd)}{-j\lambda d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp\left\{-\frac{jk}{2d}[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]\right\} dx dy \quad (4)$$

为便于下面的讨论, 将(1)式表征的非涅耳衍射定义为非涅耳衍射正变换, 用符号  $F_{(d)}\{\}$  表示, 相应地, (4)式定义为非涅耳衍射逆变换, 简称为  $F_{\bar{d}}\{\}$ , 每个符号的下标  $d$  为非涅耳衍射距离. 于是非涅耳衍射变换对可以简单地表示为:

$$U(x, y) = F_{(d)}\{U_0(x_0, y_0)\} \quad (5)$$

$$U_0(x_0, y_0) = F_{\bar{d}}\{U(x, y)\} \quad (6)$$

由于上述正变换及逆变换均表示为卷积形式, 按照线性系统理论, 作适当的离散处理后就能通过 FFT 进行卷积的快速计算求解.

另外, 如果将(1)、(4)两式写为:

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \exp\left(\frac{jk}{2d}x^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[U_0(x_0, y_0) \exp\left(\frac{j\pi}{\lambda d}x_0^2\right)\right] \exp\left[-j2\pi\left(\frac{x}{\lambda d}x_0 + \frac{y}{\lambda d}y_0\right)\right] dx_0 dy_0 \quad (7)$$

$$U_0(x_0, y_0) = \frac{\exp(-jkd)}{-j\lambda d} \exp\left(\frac{jk}{2d}x_0^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[U(x, y) \exp\left(\frac{j\pi}{\lambda d}x^2\right)\right] \exp\left[j2\pi\left(\frac{x}{\lambda d}x_0 + \frac{y}{\lambda d}y_0\right)\right] dx dy \quad (8)$$

两积分式进行合理的离散处理后, 也可以用 FFT 作直接快速计算.

非涅耳衍射变换的建立为许多实际应用提供了方便, 例如, 将非涅耳衍射变换用于衍射元件设计的 GS 算法, 可以方便地进行非涅耳衍射区衍射元件的设计.

## 2 非涅耳衍射变换在二元光学设计中的应用

在光束整形的应用研究中, 通常期望光波通过二元光学系统后成为一个给定强度分布并沿某预定方向传播的平行光. 这种既变换振幅又变换波面的二元光学系统通常可以由两个二元光学元件组成<sup>[1]</sup>. 图 1 为所研究问题的示意图, 图中平面  $x_0y_0$  上的第一个元件作振幅变换, 使到达  $xy$  平面的第二个元件表面的光波强度分布满足设计要求; 第二个元件则作波面整形, 使透过元件的光波成为沿光轴传播的平面波. 以下通过非涅耳衍射变换讨论光学元件的设计问题.

设第一个元件的复振幅变换函数为  $T_0(x_0, y_0)$ , 复振幅为  $U_i(x_0, y_0)$  的光束自左向右传播, 期望通过距离  $d$  的传播到达  $xy$  平面时形成复振幅为  $U(x, y)$  的光波场. 根据图 1 有

$$U(x, y) = F_{(d)}\{U_i(x_0, y_0)T_0(x_0, y_0)\} \quad (9)$$

对(9)式两边作非涅耳衍射逆变换后容易得到

$$T_0(x_0, y_0) = \frac{F_{\bar{d}}\{U(x, y)\}}{U_i(x_0, y_0)} \quad (10)$$

令  $T_A(x_0, y_0)$ ,  $p_0(x_0, y_0)$  以及  $\exp[j\phi(x_0, y_0)]$  分别为二元光学元件的振幅透过率、光瞳及位相变换

因子<sup>[3]</sup>,可将该元件的复振幅透过函数表示为

$$T_0(x_0, y_0) = T_A(x_0, y_0)p_0(x_0, y_0)\exp[j\phi(x_0, y_0)] \quad (11)$$

于是得到

$$p_0(x_0, y_0)\exp[j\phi(x_0, y_0)] = \frac{F(\bar{d})\{U(x, y)\}}{T_A(x_0, y_0)U_i(x_0, y_0)} \quad (12)$$

由于光瞳内  $p_0(x_0, y_0) = 1$  是实函数,理想的纯位相型元件应满足

$$T_A(x_0, y_0) = 1 \quad (13)$$

给定入射到元件表面的光波场  $U_i(x_0, y_0)$  及期望通过光学系统形成的光波场强度分布  $I(x, y)$  后,二元光学元件的设计主要任务是求出满足制作工艺要求的位相变换因子,由于第二个光学元件的设计比较简单,以下主要对第一个元件的设计作讨论.

基于GS算法,现提出一种用菲涅耳衍射变换进行上述衍射元件设计的方法.

(1) 令  $Q(x, y)$  为  $0 \sim 2\pi$  间满足给定约束条件的随机数,观测平面的初始振幅可设为

$$U_1(x, y) = |U(x, y)| \exp(iQ(x, y)) \quad (14)$$

式中,  $|U(x, y)| = \sqrt{I(x, y)}$ ,约束条件是  $Q(x, y)$  所确定的波面法线方向是来自第一个元件光瞳并指向  $I(x, y)$  的非零区域的方向.

(2) 二元光学元件的理论尝试解即为

$$T_{01}(x, y) = \frac{F(\bar{d})\{U_1(x, y)\}}{U_i(x_0, y_0)} \quad (15)$$

(3) 对上面得到的相位分布作量化处理,得到符合光刻要求的尝试解  $T_{01}(x_0, y_0)$ :

$$|T_{01}(x_0, y_0)| = |T_{01}(x_0, y_0)| \quad (16)$$

例如,利用二值化掩膜处理工艺的尝试解的幅角可按下式作量化

$$\arg[T_{01}(x_0, y_0)] = \text{INT} \left\{ 2^L \frac{\arg[T_{01}(x_0, y_0)]}{2\pi} \right\} \frac{2\pi}{2^L} \quad (17)$$

式中  $L$  为正整数,INT $\{\}$  表示对 $\{\}$  内的数据作取整操作.当设计完成后,  $L$  次掩膜融刻处理便能生成具有  $2^L$  级不同位相调制的衍射元件<sup>[1]</sup>.

(4) 将尝试解归一化,重新表示出观测平面的复振幅

$$U'_1(x, y) = F(d) \left\{ U_i(x_0, y_0) \frac{T_{01}(x_0, y_0)}{|T_{01}(x_0, y_0)|} \right\} \quad (18)$$

(5) 上式规一化并将观测平面复振幅重新设为

$$U(x, y) = |U(x, y)| \frac{U'_1(x, y)}{|U'_1(x, y)|} \quad (19)$$

(6) 将上述结果作为新的迭代计算初始值,反复进行从(2)到(5)的操作,直到获得满足误差要求或达到设定迭代次数的复振幅变化函数  $T_{01}(x_0, y_0)$ .

如果应用研究中只需要在  $xy$  平面形成预期的强度分布,可以不使用第二个光学元件.反之,如果期望经过  $xy$  平面后的光波变为具有预期强度分布的平面波,在上面的设计已经达到要求后,将最后一次迭代时到达观测平面的复振幅  $U'_1(x, y)$  作类同于(17)式的量化处理,第二个光学元件的复振幅透过函数应满足:

$$T_1(x, y) = \exp[i\phi_1(x, y)] \quad (20)$$

$$\phi_1(x, y) = - \text{INT} \left\{ 2^L \frac{\arg[U'_1(x, y)]}{2\pi} \right\} \frac{2\pi}{2^L} \quad (21)$$

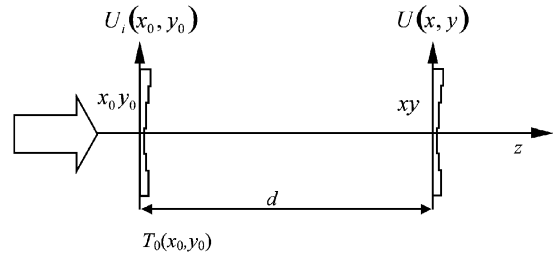


图 1 二元光学元件及坐标定义

Fig.1 Binary optical element and the definition of coordinates

至此,基本完成了将光束强度分布进行变换并准直的二元光学设计.

### 3 激光标记技术及二元光学标记元件设计实例

在激光对材料表面改性处理应用研究中,利用激光在材料表面烧融成特殊的图案或文字的激光标记技术获得了重要应用.在二元光学技术出现之前,激光对材料表面进行标记主要采用两种方式:其一,设计图案标记模板,激光照射模板后通过成像元件将图案成像到需要标记的工件表面.这种技术的特点是标记作用时间短,但能量利用率低.因为标记模板上不允许光束透过的部分将吸收去大量光能,在强激光使用条件下,不但要考虑模板的冷却问题,而且,为获得高质量的图像,必须较好地保证产品表面是图案的像平面;其二,将脉冲激光聚焦到材料表面,通过对光束偏转控制,让激光焦点在产品表面的烧融孔排列成标记图案.这种技术的特点是能量利用率高,图案的生成及光束的控制均可以通过计算机控制的伺服系统实现,然而,完成标记时间将取决于图案的复杂程度.对于生产流水线上处于运动过程中的产品,获得质量较高或有一定复杂性的标记图案十分困难.

不难看出,只要将给定衍射距离的光波场强度分布设计成与被标记的图案相对应的形式,二元光学技术就可以方便地用于激光标记元件的设计,获得能量利用率高,标记时间短,标记图案丰富多彩的标记元件.以下,给出二元光学元件的一个设计实例.

#### 3.1 设计光束定义

在二元光学设计中,入射光波场可以根据实际光束复振幅的测量确定.但为简明起见,设入射光波场功率为  $P_0$ ,波面半径为  $R$  的球面波,其复振幅由 TEM00 与 TEM01 模式合成

$$U_i(x_0, y_0) = u_0(x_0, y_0) \exp\left[jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2R}\right] \quad (23)$$

$$U_0(x_0, y_0) = \sqrt{\frac{4P_0}{\pi w^2(2\eta + 1)}} \left[ \eta + \frac{x_0^2 + y_0^2}{w^2} \right] \exp\left(-2 \frac{x_0^2 + y_0^2}{w^2}\right) \quad (24)$$

式中,  $w, \eta$  为常数.选择不同的数值可以获得不同的强度分布<sup>[3]</sup>.设  $w = 5 \text{ mm}, \eta = 0.2, P_0 = 2000 \text{ W}, R = 500 \text{ mm}$ ,图 2(a) 给出该光束的强度分布形貌.

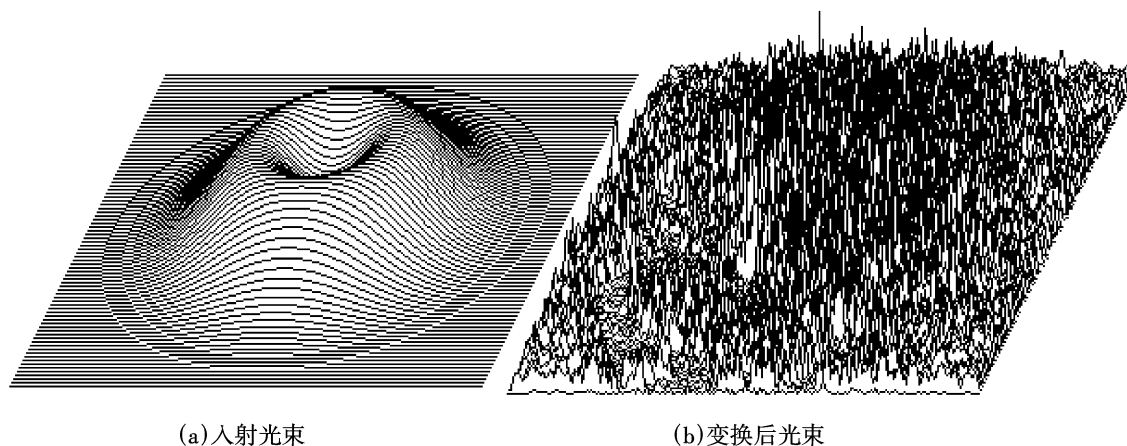


图 2 入射光束(a)及变换后光束(b)的强度分布比较(图面尺寸 30mm'30mm)

Fig.2 Comparison of intensity distributions between incident light (a) and transformed light (b) dimension: 30mm × 30mm

#### 3.2 设计实例

以人像作为标记图案(见图 3(a)),令二元光学元件具有边长  $D$  的方形光瞳,实际制作时划分为  $N \times N$  个方形单元,即每个单元的宽度为  $\Delta = D/N$ ,并且,设  $N = 256, D = 30 \text{ mm}$ ,衍射距离  $d = 200 \text{ mm}$ .将(1)、(4)两式作  $N \times N$  点离散处理,取样宽度为  $\Delta$ ,图 2(b) 给出经过 10 次迭代处理后在平面  $xy$  上光斑的强度分布.

为简明地显示变换后光束在材料表面的标记效果,令材料表面对作用光束强度分布响应的阈值为变

换后光束强度分布极大值的5%,即大于该阈值的光束作用于材料表面后,将在材料表面留下热化学作用的印迹.图3(b)给出大于阈值后的光束强度分布图案.与原图比较容易看出,“标记图案”是原图的较忠实的复现.



图3 标记图案(a)及标记光束强度图案(b)比较

Fig.3 Mark pattern (a) and comparison of intensity distributions of the marks (b)

#### 4 讨论

由于菲涅耳衍射变换可以通过FFT快速计算,作为菲涅耳衍射变换的一种应用,我们基于GS算法,提出了在菲涅耳衍射区纯位相型衍射元件的快速设计方法,并简单地给出了一个设计实例.应该指出,由于设计只采用位相自由度,较难达到十分满意的设计目标,可以证明,如果在设计中增加振幅自由度,通过为数不多的迭代计算就能较好地达到要求,但这种设计通常会使得衍射效率下降<sup>[1]</sup>,对于具有热效应的强激光而言,过多的衍射效率下降将引入对衍射元件的冷却问题,纯位相型元件设计方法的研究有重要意义.如果期望对设计结果作进一步优化,改善变换后光束的局部强度分布均匀性,可以将设计结果作为YG算法<sup>[4]</sup>的叠代初始值<sup>[1]</sup>,再通过YG算法获得较好的结果.此外,随着微光学元件加工技术的进步,目前已经可以不使用掩膜分层融刻工艺,利用连续浮雕微光学元件的直写技术<sup>[5]</sup>,直接对元件进行融刻达到足够精度的二元光学元件设计要求.

对于给定波长的光束,不同性质的材料对激光的物理及化学变化的响应是不相同的,为在材料表面获得视觉质量高的标记图案,还必须通过理论及实验研究确定最优化的光束功率及作用时间.例如,如果知道材料能够留下色彩或烧融变化印迹的温度阈值时,可以利用我们研究成功的任意分布光束热作用的快速计算方法<sup>[3]</sup>,理论上计算瞬态温度场,有效地预计材料标记的结果.根据实际问题的需要,通过不同衍射计算公式的合理选择,可以较好地完成衍射元件的设计任务.

#### 参考文献:

- [1] 金国藩,严英白,邬敏贤,等.二元光学[M].北京:国防工业出版社,1998.238.
- [2] Junchang Li, Bingheng Xiong, Liyun Zhong, et al. Inverse calculation of diffraction and its application to the real-time holographic interferometry, Proc[J]. SPIE Practical Holography XVI, San Jose, CA, USA, 2000,4659:284~290.
- [3] 李俊昌.激光的衍射及热作用计算[M].北京:科学出版社,2002.159.
- [4] 杨国桢,顾本源.衍射光学元件的设计方法[J].物理,1994,23(4):200~205.
- [5] 赫尔齐克 H P.微光学[M].周每宪,等译.北京:国防工业出版社,2002.107~145.