"混合的"数据包络分析模型的灵敏度分析°

吴文江

(武汉工业大学北京研究生部, 北京 100024)

摘要 对文献[1]所讨论的"混合的"DEA 模型,进行灵敏度分析,对原来DEA 有效的决策单元给出了在改变其输入与输出后仍保持DEA 有效的充分条件。

关键词 决策单元 "混合的"数据包络分析模型 灵敏度分析

Sensitivity Analysis of the Mixed Model in DEA

Wu Wenjiang

(Beijing Graduate School of Wuhan University, Beijing 100024)

Abstract For the mixed model in DEA discussed in reference[1], this paper studies its sensitivity analysis. Sufficient condition for simultaneous change of all outputs and all inputs of an efficient decision making unit which preserves efficiency are established.

Keywords decision making unit; mixed model in DEA; sensitivity analysis

1 引言

要评价 n 个决策单元。若输入的绝对指标(如资金)增加 K 倍时,输出的绝对指标(如产量)也增加 K 倍,而输入的相对指标(如每吨产品能耗)与输出的相对指标(如产品合格率)都保持不变,这时就要用"混合的"DEA 模型来评价。在评价后,某有效的决策单元的输入与输出不免有所变化,因此有必要来研究在这种变化下该决策单元保持其有效性的充分条件,这就是灵敏度分析所要解决的问题。这方面,近年来只对DEA 中的 C^2R 模型及 C^2GS^2 模型有所研究[2~4],本文将探讨"混合的"DEA 模型的灵敏度分析。

2 基本理论

设要评价 n 个决策单元。输入中有绝对指标 $x_i(i=1,\cdots,m)$,相对指标 $u_i(i=1,\cdots,p)$,输出中有绝对指标 $y_i(i=1,\cdots,l)$、相对指标 $z_i(i=1,\cdots,t)$。令 $X=(x_1,\cdots,x_m)^T$, $U=(u_1,\cdots,u_p)^T$, $Y=(y_1,\cdots,y_l)^T$, $Z=(z_1,\cdots,z_t)^T$。对第 j 个决策单元(简记为 DMU_j),相应地有指标值 x_{ij}, u_{ij}, y_{ij}, z_{ij} 及向量 X_j, U_j, Y_j, Z_j, $(j=1,\cdots,n)$, 设 DMU_{j0} 记为 DMU_0, 对应 X_0, U_0, Y_0, Z_0, ϵ 为非阿基米德无穷小, $J=\{1,\cdots,n\}$。考虑问题 (D_ϵ)

$$\begin{aligned}
\min\ & [\theta-\epsilon(\hat{e}^TS^-+e^TR^-+e^TS^++\bar{e}^TR^+)]\\
\text{s.t.}\ & -\theta X_0+\sum_{j\in J}X_j\lambda_j+S^-=0\\
& -\delta U_0+\sum_{j\in J}U_j\lambda_j+R^-=0\\
& -\sum_{j\in J}Y_j\lambda_j+S^+=-Y_0
\end{aligned}$$

° 本文于1997年3月21日收到

$$\delta Z_0 - \sum_{j\in J} z_j\lambda_j + R^+ = 0$$
$$\delta - \sum_{j\in J}\lambda_j = 0$$
$$S^-,\ R^-,\ S^+,\ R^+,\ \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^T \geq 0,\ \delta \geq 0$$

由文献[1]可知下列引理成立。

引理 1 若 $X_j \geq 0 (j\in J)$, Y_0 中有正分量, 问题(D_ϵ)有最优解 $\theta^0, \delta^0, \lambda^0, S^{0-}, R^{0-}, S^{0+}, R^{0+}$, 则最优解中 θ, δ 还有 λ_j 为基变量, 且 DMU_0 为DEA 有效(M)的充要条件为 $S^{0-} = 0,\ R^{0-} = 0,\ S^{0+} = 0,\ R^{0+} = 0,\ \theta^0 = 1$。

将问题(D_ϵ)的等式约束中右端向量记为 b, 系数矩阵记为 $A = (P_1, \cdots, P_k)$, 它有 $f = m + p + l + t + 1$ 行, $k = n + 2 + (f - 1)$ 列, 目标函数中系数向量记为 $C = (c_1, \cdots, , , c_k)$。

若 DMU_0 为 DEA 有效(M), 在引理 1 的条件下, 易知 $\theta^0 = 1,\ \delta^0 = 1, \lambda_{j0} = 1,\ \lambda_j = 0 (j\in J \setminus \{j_0\}), S^{0-} = 0,\ R^{0-} = 0,\ S^{0+} = 0,\ R^{0+} = 0$ 为问题(D_ϵ)的最优解, 设它对应基阵 B。为了书写方便, 不妨设基变量 $\theta, \delta, \lambda_{j0}$ 依次对应矩阵 B 中前三列, 且对应 $B^{-1}b$ 中前三行, 即

$$B^{-1}b = (1, 1, 1, 0, \cdots, 0)^T \tag{1}$$

设 DMU_0 的输入与输出有变化

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{X}_0 = X_0 + \beta_1, & \hat{U}_0 = U_0 + \beta_2 \\ \hat{Y}_0 = Y_0 - \alpha_1, & \hat{Z}_0 = Z_0 - \alpha_2 \end{array}\right\} \tag{2}$$

此时目标函数中系数向量 C 不变, 而等式约束中右端向量及基阵分别变为

$$\hat{b} = b + d,\quad \hat{B} = B + D = B(I + B^{-1}D) \tag{3}$$

其中

$$d = \begin{pmatrix} O_{m\times1} \\ O_{p\times1} \\ \alpha_1 \\ O_{t\times1} \\ O \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & +\beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

则

$$G = B^{-1}D = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ G_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

其中 G, G_1 分别为 f 阶及三阶矩阵。

引理 2 若 G 与 H 为 f 阶矩阵, G_1 为 h 阶矩阵, I 与 I_1 分别为 f 阶及 h 阶单位矩阵, 若 $(I_1 + G_1)^{-1}$ 存在, 且

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ G_2 & 0 \end{pmatrix},\quad H_1 = \begin{pmatrix} -G_1 \\ -G_2 \end{pmatrix}(I_1 + G_1)^{-1},\quad H = (H_1, 0) \tag{6}$$

则 $(I + G)^{-1}$ 存在, 且 $(I + G)^{-1} = I + H$。

证 由(6)式可得

$$\begin{aligned} H(I + G) &= (H_1, 0)\begin{pmatrix} I_1 + G_1 & 0 \\ G_2 & I_2 \end{pmatrix} \\ &= (H_1(I_1 + G_1),\ 0) = \begin{pmatrix} -G_1 & 0 \\ -G_2 & 0 \end{pmatrix} = -G \end{aligned}$$

故 $(I + H)(I + G) = I + G + H(I + G) = I$, 因而结论成立。

定理 在引理 1 的条件下, 问题(D_ϵ)的最优解 $\theta^0 = 1,\ \delta^0 = 1,\ \lambda_{j_0} = 1,\ \lambda_j = 0 (j\in J \setminus \{j_0\}), S^{0-} = 0,\ R^{0-} = 0,\ S^{0+} = 0,\ R^{0+} = 0$, 对应基阵 B, 非基变量的下标集为 J', 有检验数 $\gamma_j (j\in J')$。在(2)式变换下, 设(5)式

与(6)式成立, $(I_1+G_1)^{-1}$存在, 若

$$\gamma_j \geq C_B H B^{-1} P_j, \quad j \in J' \tag{7}$$

则变换前后 DMU_0 都为 DEA 有效(M)。

证　在定理的条件下, 且(3)式成立, 由引理 2 可知

$$\left.\begin{aligned} (I+B^{-1}D)^{-1} &= (I+G)^{-1} = I+H \\ \hat{B}^{-1} &= (I+B^{-1}D)^{-1}B^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

于是

$$\hat{B}^{-1}\hat{b} = (I+H)B^{-1}(b+d) = B^{-1}b + B^{-1}d + HB^{-1}b + HB^{-1}d$$

由(4)式可见

$$D(1, 1, 1, 0, \cdots, 0)^T = d$$

由此式及(5)式得

$$B^{-1}d = B^{-1}D(1, 1, 1, 0, \cdots, 0)^T = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ G_2 & 0 \end{pmatrix}(1, 1, 1, 0, \cdots, 0)^T = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由(1)式与(6)式得

$$HB^{-1}b = H_1(1, 1, 1)^T$$

$$HB^{-1}d = (H_1, 0)\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = H_1G_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因而

$$B^{-1}d + HB^{-1}b + HB^{-1}d = \left[\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} + H_1(I_1+G_1)\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由(6)式可知此式为零, 于是

$$\hat{B}^{-1}\hat{b} = B^{-1}b = (1, 1, 1, 0, \cdots, 0)^T \tag{9}$$

若以问题(D_ϵ)的最优解对应的基变量作为以(2)式变换后的问题的基变量, 其检验数 $C_B - C_B\hat{B}^{-1}\hat{B} = 0$, 由(7)及(8)式可知非基变量对应的检验数

$$C_j - C_B\hat{B}^{-1}P_j = C_j - C_B(I+H)B^{-1}P_j = \gamma_j - C_BHB^{-1}P_j \geq 0 \quad j \in J'$$

故以(2)式变换后的问题对应基阵 $\hat{B}$ 的基本解为最优解, 且由(9)式可知最优解中 $\theta = 1, S^- = 0, R^- = 0, S^+ = 0, R^+ = 0$, 由引理 1 即得, 以(2)式变换后 DMU_0 仍为 DEA 有效(M)。　证毕。

以上是在 $\theta, \delta, \lambda_0$ 依次对应矩阵 B 的前三行、前三列的情况下来论证, 其实, 一般情况下也可按上述思路来论证。

3　举例说明

有四个决策单元, 其输入的绝对指标 x, 相对指标 u, 输出的绝对指标 y, 相对指标 z, 取值如表 1。

表 1

j	1	2	3	4
x	8	6	2	3
u	0.2	0.6	0.8	0.7
y	2	4	2	2
z	0.2	0.2	0.3	0.4

取 DMU_0 为 $DMU4$。在问题(D_ϵ)的最优解中只 $\theta = \delta = \lambda_4 = 1$, 其余变量值为零, 由引理 1, $DMU4$ 为 DEA 有效(M)。最优解对应的基变量依次为 θ、R^-、λ_3、λ_4、δ, 有

$$B=\begin{pmatrix}-3&0&2&3&0\\0&1&0.8&0.7&-0.7\\0&0&-2&-2&0\\0&0&-0.3&-0.4&0.4\\0&0&-1&-1&1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&0&-1/2&-10/3&4/3\\0&1&0&-1&1.1\\0&0&0&10&-4\\0&0&-1/2&-10&4\\0&0&-1/2&0&1\end{pmatrix}$$

$$C_B=(1,-\epsilon,0,0,0),\qquad B^{-1}b=(1,0,0,1,1)^T$$

非基变量 λ_1, λ_2, S^-, S^+, R^+ 的检验数分别为 $\gamma_1=7/3-0.6\epsilon$, $\gamma_2=2/3-0.3\epsilon$, $\gamma_3=1/3-\epsilon$, $\gamma_4=1/6+(0.1/2)\epsilon$, $\gamma_5=10/3-\epsilon$, 当 $0<\epsilon<1/3$ 时均为正数。

今研究 $DMU4$ 改为对应 $(3+\beta_1, 0.7+\beta_2, 2-\alpha_1, 0.4-\alpha_2)^T$ 后的 DEA 有效性, 于是

$$d=\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha_1\\0\\0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-\beta_1&0&0&\beta_1&0\\0&0&0&\beta_2&-\beta_2\\0&0&0&\alpha_1&0\\0&0&0&\alpha_2&-\alpha_2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$G=B^{-1}D=\begin{pmatrix}\beta_1/3&0&0&-\beta_1/3-\alpha_1/2-10\alpha_2/3&10\alpha_2/3\\0&0&0&\beta_2-\alpha_2&-\beta_2+\alpha_2\\0&0&0&10\alpha_1&-10\alpha_2\\0&0&0&-\alpha_1/2-10\alpha_2&10\alpha_2\\0&0&0&-\alpha_1/2&0\end{pmatrix}$$

$$G_1=\begin{pmatrix}\beta_1/3&-\beta_1/3-\alpha_1/2-10\alpha_2/3&10\alpha_2/3\\0&-\alpha_1/2-10\alpha_2&10\alpha_2\\0&-\alpha_1/2&0\end{pmatrix}$$

$$I_1+G_1=\begin{pmatrix}1+\beta_1/3&-\beta_1/3-\alpha_1/2-10\alpha_2/3&10\alpha_2/3\\0&1-\alpha_1/2-10\alpha_2&10\alpha_2\\0&-\alpha_1/2&1\end{pmatrix}$$

若 $|I_1+G_1|=(1+\beta_1/3)(1-\alpha_1/2-10\alpha_2+5\alpha_1\alpha_2)\neq 0$, 则 $(I_1+G_1)^{-1}$ 存在。将 $(-G)$ 中第 1, 4, 5 列所成矩阵左乘 $(I_1+G_1)^{-1}$ 后得 $H_1=(h_{ij})_{5\times 3}$, 令

$$H=\begin{pmatrix}h_{11}&0&0&h_{12}&h_{13}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\h_{51}&0&0&h_{52}&h_{53}\end{pmatrix}$$

若(7)式成立, 则 $DMU4$ 改为对应 $(3+\beta_1, 0.7+\beta_2, 2-\alpha_1, 0.4-\alpha_2)^T$ 后仍为 DEA 有效(M)。

参 考 文 献

1 吴文江. "混合的"数据包络分析模型. 系统工程理论方法应用, 1993, (1)

2 Charnes A, Neralic L. Sensitivity Analysis of the Additive Model in DEA. European Journal of Operational Research, 1990(48): 332～342

3 许伟, 邓斐, 肖承忠. 数据包络分析中 C^2GS^2 模型的灵敏度分析. 系统工程, 1992, (6)

4 朱乔, 陈遥. 数据包络分析的灵敏度研究及其应用. 系统工程学报, 1994(1)