

文章编号: 1000-6788(2009)07-0027-08

VaR 风险度量下的 β 系数: 估计方法和实证研究

姚 京¹, 袁子甲², 李仲飞², 李 端³

(1. 复旦大学 金融研究院, 上海 200433; 2. 中山大学 岭南(大学)学院, 广州 510275; 3. 香港中文大学 系统工程与工程管理系, 香港)

摘 要 传统资本资产定价模型得出的 β 系数受到正态分布假设的约束. 为了更好地反映金融现实, 对 VaR- β 系数的估计问题 (VaR- β 系数是一种在 Value-at-Risk 风险度量下的 β 系数, 可以在各种概率分布假设下应用) 进行了研究. 在一些常用 VaR 估计方法的基础上, 发展了三种 VaR- β 系数估计方法: 核密度方法、高阶矩方法和 Copula 方法, 并得出了相应的解析表达式. 最后, 使用香港证券市场中的数据对核密度方法的应用进行了实证研究, 并论证了置信度水平可以做为反映投资者情绪的一个指标.

关键词 VaR- β ; 系数; 核密度; 高阶矩; Copula

中图分类号 F8 **文献标志码** A

Beta coefficient based on value-at-risk: estimation methods and empirical analysis

YAO Jing¹, YUAN Zi-jia², LI Zhong-fei², LI Duan³

(1. Institute for Financial Studies, Fudan University, Shanghai 200433, China; 2. Lingnan (University) College, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China; 3. Department of Systems Engineering and Engineering Management, Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, China)

Abstract In the traditional Capital Asset Pricing Model (CAPM), the β coefficient is estimated with an implicit normality assumption. To reduce the gap to the reality, this paper studies the issue of estimating VaR- β , an alternative type of β coefficient based on Value-at-Risk (VaR) with a distribution-free specification. Based on some common VaR calculation models, we propose three different estimation methods for VaR- β : kernel density method, higher moments method and copula method. And we also derive analytical expressions for the VaR- β s under these estimation methods. Finally, an empirical analysis of kernel density method is given for Hong Kong stock market, in which we demonstrate that the confidence level can be taken as a measurement of investors' sentiment.

Keywords VaR- β ; kernel density; higher moments; Copula

1 引言

资本资产定价模型 (Capital asset pricing model, CAPM, 参见文献 [1-3]) 是现代金融投资定量分析中的基本工具, 已经被广泛应用于经济金融中的各个领域. 这项开创性的工作对于金融理论和实践都有着非常

收稿日期: 2006-08-22

资助项目: 教育部人文社会科学研究规划基金 (07JA630031); 国家自然科学基金 (70518001); 国家杰出青年科学基金 (70825002)

作者简介: 姚京 (1980-), 男, 汉, 博士; 袁子甲 (1984-), 男, 汉, 博士研究生; 李仲飞 (1963-), 男, 汉, 博士, 教授, 博士生导师; 李端, 男, 汉, 博士, 教授, 博士生导师.

深远的影响, Sharpe 也因此于 1990 年被授予诺贝尔经济学奖. CAPM 的基本观点认为每一种资产的风险升水 (Risk premium) 都与“市场组合”的风险升水之间存在线性关系, 并使用 β 系数来反映这一线性关系. 可以说, β 系数是 CAPM 的灵魂, 人们也经常使用“ β 革命”一词来形容 CAPM 的影响.

然而, 传统 β 系数 (协方差与方差的比例) 是在一系列很强的假设下得出的结果, Sharpe 本人在 1964 年的经典论文中也明确指出文中的研究假定具有很大的局限性 (Highly restrictive). 这些局限性又引发了众多的后续研究, 并得出了一系列更接近现实状况同时又与传统的 CAPM 相似的结论. 我们认为传统的 CAPM 以及 β 系数一个最严重的局限性在于受到正态分布假设的约束: 众多研究 (如文献 [4-6]) 表明二阶矩上的信息 (方差、协方差、相关系数) 已经不足以刻画近年金融市场中的复杂关系. 本文的研究对象是姚京、袁子甲和李仲飞^[7] 提出的 Value-at-Risk (VaR) 风险度量下的 β 系数 (简称 VaR- β 系数, 具体定义参见 (3) 式), 一种可以在各种概率分布假设下应用的 β 系数. 而传统 β 系数只是 VaR- β 系数在正态分布假设下的一个特例. 本文要研究的是如何将现实中各种可能的非正态特征反映到 VaR- β 系数估计中, 这对于处理实际中的资产定价问题无疑是积极有益的.

与传统 β 系数类似, VaR- β 系数既反映了个股或组合对市场变化的敏感性, 也反映了它们对系统风险的贡献度. 因此, VaR- β 系数的意义不仅体现在资产定价领域, 同时也是一种非常有用的风险管理工具. Ho, et al^[8] 早期提出 VaR- β 系数概念的初衷就是为了解决 VaR 中的风险分解问题, 但是他们所定义的 VaR- β 系数其实只适用于正态分布假设. 我们知道 VaR 的估计方法已经发展得相当成熟, 能够反映现实中的各种复杂关系及特征 (参见文献 [9-10]), 这意味着也应对 VaR- β 系数的估计提出更高的要求. 考虑到量化风险分析的系统性和完整性, 发展与常用的 VaR 估计方法相对应的 VaR- β 系数估计方法显得尤其重要. 本文研究的一个主要出发点就是将 VaR 在风险度量上的优势过渡到 VaR- β 系数上. 对此, 我们将选取几种最具代表性的方法进行详细分析.

本文的主要内容可以分成三个部分. 首先介绍如何按照传统 CAPM 的逻辑构造基于 VaR 的 CAPM, 并得出相应的 VaR- β 系数. 这一部分所得出的 VaR- β 系数没有涉及到具体收益率分布信息, 是最具一般性和普遍性的 VaR- β 系数. 然后, 我们转入研究 VaR- β 系数的具体估计方法. 通过参考几种估计 VaR 的代表性方法, 我们将研究如何利用核密度 (Kernel density)、高阶矩和 Copula 方法来估计 VaR- β 系数. 最后一部分针对资产定价问题使用香港证券市场中的数据对 VaR- β 系数进行实证研究. 在检验 VaR- β 系数解释风险升水能力的同时, 我们还说明了 VaR 中的置信度水平可以用于反映市场中的投资者情绪.

2 VaR 风险度量下的 CAPM 与 β 系数

下面我们转入 VaR 风险度量下的资本资产定价模型 (CAPM). 按照姚京、袁子甲和李仲飞^[7] 使用的定义, 本文仍将 VaR 定义为相对 VaR:

$$\text{VaR}(\alpha, X) = E[X] - q_\alpha(X), \quad q_\alpha(X) := \inf\{t \in \mathbb{R} : \Pr(X \leq t) \geq \alpha\} \quad (1)$$

其中 $1-\alpha$ 代表投资者选择的置信度水平 (通常取值为 95%-99%), X 为代表未来财富水平或未来收益率水平的随机变量. 本文的结论可以同时方便地推广到绝对 VaR 情形. 为了便于表示, 我们在下文的分析中将 $\text{VaR}(\alpha, X)$ 简记为 $\text{VaR}(X)$.

姚京、袁子甲和李仲飞^[7] 已经得出均值-VaR 模型下仍然存在两基金分离性质的结论¹. 那么, 依照经典 CAPM 的证明思路 (1), 可在市场组合 M 和风险资产 i ($i = 1, \dots, n$) 的基础上构造一个次优的组合 $p(a)$, 其中组合 M 所占的比例为 $1-a$, 资产 i 所占的比例为 a . 记 $\mathbf{x}_a = (a, 1-a)'$ 为投资权重向量, $\mathbf{r} = (r_i, r_M)'$ 为相应的收益率向量, 则可得组合 $p(a)$ 的收益率为

$$r_{a,i} = \mathbf{x}_a' \mathbf{r}$$

$r_{a,i}$ 的期望, VaR 都是 a 的函数, 分别简记为 $\mu_{a,i}$, $\text{VaR}_{a,i}$. 当 $a = 0$ 时, 组合 $p(a)$ 就成为组合 M , 有 $r_{0,i} = r_M$, $\text{VaR}_{0,i} = \text{VaR}(r_M)$.

1. 本节的模型设置与传统 CAPM 模型相似, 假设投资者均选择均值-VaR 有效组合、市场无摩擦、投资者信念同质 (Homogeneous). 此时, 两基金分离意味着所有投资者都会选择无风险资产与市场组合 M 的线性组合. 一些更为具体的讨论可以参见文献 [7].

仿照经典理论体系中的定义,我们将 $\frac{E[r_M]-r_f}{\text{VaR}(r_M)}$ 称为风险价格 (r_f 为无风险利率),它反映了均衡状态下投资个体在期望收益率和 risk 的最优搭配,也即最优的期望收益率和 risk 的边际替代率.按照边际收益等于边际成本的微观经济学原理,每种风险资产在组合 M 处的边际转换率都应相等,且均等于最优的边际替代率.综合上述分析可以推出

$$\text{MRT}_M^i = \frac{\partial \mu_{a,i}/\partial a}{\partial \text{VaR}_{a,i}/\partial a} \Big|_{a=0} = \frac{E[r_i] - E[r_M]}{\text{VaR}'_{0,i}} = \frac{E[r_M] - r_f}{\text{VaR}(r_M)}, \quad \text{其中 } \text{VaR}'_{0,i} := \frac{\partial \text{VaR}_{a,i}}{\partial a} \Big|_{a=0}$$

上式中的 MRT_M^i 代表资产 i 的在 M 处的边际转换率,即曲线 $p(a)$ 在 VaR-均值平面上在点 M ($a=0$) 处的斜率.将上式整理后就可以得到 VaR 风险度量下的资本资产定价公式

$$E[r_i] - r_f = \frac{\text{VaR}'_{0,i} + \text{VaR}(r_M)}{\text{VaR}(r_M)} (E[r_M] - r_f), \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

按照姚京、袁子甲和李仲飞^[7]对 VaR- β 系数的定义

$$\beta_i^{\text{VaR}} := \frac{\text{VaR}'_{0,i} + \text{VaR}(r_M)}{\text{VaR}(r_M)} \quad (3)$$

可以将 (2) 式简化成

$$E[r_i] - r_f = \beta_i^{\text{VaR}} (E[r_M] - r_f), \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

上式表明每一种风险资产的风险升水与组合 M 的风险升水之间存在线性关系,其结构与文献 [1-3] 提出的 CAPM 相同.在 (3) 式中, VaR- β 系数最为关键的部分为 $\text{VaR}'_{0,i}$, 我们可以解出其一般表达式为 (参见文献 [7]):

$$\text{VaR}'_{0,i} = E[r_i] - E[r_i | r_M = q_\alpha(r_M)] - \text{VaR}(r_M) \quad (5)$$

从而有

$$\beta_i^{\text{VaR}} := \frac{E[r_i] - E[r_i | r_M = q_\alpha(r_M)]}{\text{VaR}(r_M)} \quad (6)$$

3 VaR- β 系数的估计方法

上一节的分析为 VaR- β 系数提供了理论基础,并得出了 VaR- β 系数的一般形式.那么我们在实际应用中应该如何估计 VaR- β 系数呢?一个非常自然的想法就是:我们可以在常用的 VaR 估计方法的基础上发展与之相对应的 β 系数估计方法.为了实现这个想法,下面我们将分别在核密度、高阶矩和 Copula 方法的基础上研究如何估计具体的 VaR- β 系数.

3.1 核密度方法

核密度方法是一种常用的非参数方法,其本质是对直方图的推广^[11-12].Butler 和 Schachter^[13] 将核密度方法引入到 VaR 估计中,这里我们将核密度方法用于估计 VaR- β 系数.

根据 (1) 式中对 VaR 的定义,有

$$\Pr(\mu_{a,i} - r_{a,i} > \text{VaR}_{a,i}) = \alpha \quad (7)$$

记 $\mathbf{r}_t = (r_{i,t}, r_{M,t})'$ ($t = 1, \dots, T$) 为收益率向量的 T 个样本点,通过核密度方法可以将 (7) 式转化成:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Phi\left(\frac{\mu_{a,i} - \mathbf{x}_a' \mathbf{r}_t - \text{VaR}_{a,i}}{h}\right) = \alpha \quad (8)$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的概率分布函数, $h > 0$ 为窗宽².当 $a = 0$ 时,有 $\mathbf{x}_a' \mathbf{r}_t = r_{M,t}$, $\mu_{a,i} = E[r_M]$, $\text{VaR}_{a,i} = \text{VaR}(r_M)$, 此时 (8) 式可用于确定市场组合收益率 r_M 序列的窗宽 h 并估计出其 VaR 值.将 (8) 式两边对 a 求导可得

$$\frac{1}{Th} \sum_{t=1}^T \phi\left(\frac{\mu_{a,i} - \mathbf{x}_a' \mathbf{r}_t - \text{VaR}_{a,i}}{h}\right) \left(E[r_i] - E[r_M] - (r_i - r_M) - \frac{\partial \text{VaR}_{a,i}}{\partial a} \right) = 0 \quad (9)$$

2. 这里我们选用的是高斯核,其它类型核的处理程序类似.窗宽 h 的确定也有多种途径供选择,下一节的实证研究中使用最小化均方误差 (MISE) 准则来确定窗宽.

其中 $\phi(\cdot)$ 为标准正态分布的概率密度函数. 当 $a = 0$ 时, 对 (9) 式进行整理可以求得

$$\text{VaR}'_{0,i} = \sum_{t=1}^T \frac{\phi\left(\frac{E[r_M] - r_{M,t} - \text{VaR}(r_M)}{h}\right)}{\sum_{t=1}^T \phi\left(\frac{E[r_M] - r_{M,t} - \text{VaR}(r_M)}{h}\right)} (E[r_i] - E[r_M] - (r_{i,t} - r_{M,t})) \quad (10)$$

将上式带入 (3) 就得到了 VaR- β 系数在核密度方法下的表达式.

总的来说, VaR- β 系数的核密度估计方法可以分成两步: 第一步估计市场组合收益率 r_M 的窗宽 h 及相应的 $\text{VaR}(r_M)$; 第二步结合 (10) 和 (3) 式计算出相应的 VaR- β 系数估计值.

3.2 高阶矩方法

在这一小节中, 我们研究如何在四阶矩的基础上给出 β^{VaR} 的计算方法. 记 $\mu = (E[r_i], E[r_M])'$, 则收益率向量 r 的协方差矩阵 Σ , 协偏度 (Co-skewness) 矩阵 M_3 , 协峰度 (Co-kurtosis) 矩阵 M_4 分别为³:

$$\begin{aligned} \Sigma &= E[(r - \mu)(r - \mu)'] \\ M_3 &= E[(r - \mu)(r - \mu)' \otimes (r - \mu)'] \\ M_4 &= E[(r - \mu)(r - \mu)' \otimes (r - \mu)' \otimes (r - \mu)'] \end{aligned}$$

其中 \otimes 为 Kronecker 张量积. 给定投资权重向量 x_a , 可以得出相应组合收益率的期望, 方差、偏度和峰度分别为

$$\begin{aligned} \mu_a &= x_a' \mu, \sigma_a^2 = x_a' \Sigma x_a \\ s_a &= x_a' M_3 (x_a \otimes x_a), \kappa_a = x_a' M_4 (x_a \otimes x_a \otimes x_a) \end{aligned}$$

易知各阶矩对 x_a 的偏导为

$$\begin{aligned} \nabla_{x_a} \mu_a &= \mu & \nabla_{x_a} \sigma_a^2 &= 2 \Sigma x_a, \\ \nabla_{x_a} s_a &= 3 M_3 (x_a \otimes x_a), & \nabla_{x_a} \kappa_a &= 4 M_4 (x_a \otimes x_a \otimes x_a) \end{aligned}$$

结合 r_a 的前四阶矩, 在 Cornish-Fisher 展开 (参见 Hill 和 Davis^[16]) 的基础上可以得出相应 VaR 的近似计算式为⁴:

$$\text{VaR}_{a,i} = - \left(z_\alpha + \frac{1}{6} (z_\alpha^2 - 1) k_{a,3} + \frac{1}{24} (z_\alpha^3 - 3z_\alpha) k_{a,4} - \frac{1}{36} (2z_\alpha^3 - 5z_\alpha) k_{a,3}^2 \right) \sigma_a \quad (11)$$

其中 z_α 为标准正态分布的 α -分位数,

$$k_{a,3} = \frac{s_a}{\sigma_a^3}, \quad k_{a,4} = \frac{\kappa_a}{\sigma_a^4} - 3$$

利用上述信息, 我们可以得出

$$\text{VaR}'_{0,i} = g_2 \sigma_M - \left(g_2 - g_3 k_{M,3} - g_4 (k_{M,4} + 3) \right) \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M} - g_3 \frac{s_{iM}^2}{\sigma_M^2} - g_4 \frac{\kappa_{iM}^3}{\sigma_M^3} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} g_2 &= z_\alpha + \frac{1}{6} (z_\alpha^2 - 1) k_{M,3} + \frac{1}{24} (z_\alpha^3 - 3z_\alpha) k_{M,4} - \frac{1}{36} (2z_\alpha^3 - 5z_\alpha) k_{M,3}^2 \\ g_3 &= \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - 1) - \frac{1}{6} (2z_\alpha^3 - 5z_\alpha) k_{M,3}, \quad g_4 = \frac{1}{6} (z_\alpha^3 - 3z_\alpha) \end{aligned}$$

σ_{iM} 是 r_i 与 r_M 的协方差, $s_{iM}^2 = E[(r_i - E[r_i])(r_M - E[r_M])^2]$, $\kappa_{iM}^3 = E[(r_i - E[r_i])(r_M - E[r_M])^3]$. 注意, g_2, g_3, g_4 反映的是 r_M 的特征, 其大小和风险资产 i 无关.

将 (11) 式和 (12) 式代入到 (3) 式中可得

$$\beta_i^{\text{VaR}} = \beta_i - \left(\frac{g_3}{g_2} k_{M,3} + \frac{g_4}{g_2} (k_{M,4} + 3) \right) \beta_i + \frac{g_3}{g_2} \frac{s_{iM}^2}{\sigma_M^2} + \frac{g_4}{g_2} \frac{\kappa_{iM}^3}{\sigma_M^3} \quad (13)$$

其中 $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}$ 是传统的 β 系数. 这样, 在估计完所需要的各个矩参数后, 我们就可以方便的计算出相应的 VaR- β 系数.

3. 协偏度和协峰度矩阵相关处理方法可参见文献 [14-15].

4. Cornish-Fisher 展开在 VaR 估计中的应用十分广泛, 著名的 Delta-Gamma 近似法就是通过 Cornish-Fisher 展开来计算期权等衍生产品的 VaR. Cornish-Fisher 展开在 VaR 计算中一般只使用前三阶矩, 本文将四阶的情形也包含到模型中.

3.3 Copula 方法

Copula 是目前风险度量中刻画相依结构的一种重要思路, 可以用于将多个随机变量的边际分布连接在一起构成联合分布. 从数理角度而言, Copula 就是边际分布为区间 $[0, 1]$ 上均匀分布的多元分布函数, 关于 Copula 最重要的性质即是所谓的 Sklar 定理⁵.

Sklar 定理 设 F 为一个边际分布为 F_1, \dots, F_n 的多元分布函数, 那么一定存在一个 n 元 Copula 函数 C 使得:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (14)$$

如果边际分布 F_1, \dots, F_n 是连续的, 那么 Copula 函数 C 是唯一的.

按照 Sklar 定理, 我们可以将一个多元分布分解为 n 个边际分布和 Copula 两部分, 因此可以将 Copula 作为表示这 n 个随机变量之间的相依结构. 相应地, 当我们利用 Copula 构造和估计多元分布函数时, 也需要通过两个步骤来进行: 第一, 构建各个随机变量的边际分布, 可以是正态分布, t -分布, 指数分布甚至经验 (Empirical) 分布等各种类型的分布, 而且可以互不相同; 第二, 选择一个合适的 Copula, 合适的标准在于能否解释数据之间的关系或者能否体现所要研究的特殊相依结构.

下面我们给出 β^{VaR} 的 Copula 估计方法. 与前两种方法不同, 这一小节将在 (6) 式的基础上设计估计方法. 此时 β^{VaR} 估计的困难主要在于如何确定条件期望 $E[r_i | r_M = q_\alpha(r_M)]$, 其中的关键在于如何体现 r_i 和 r_M 二者之间的关系. 对于一个二元的 Copula, 我们有

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial C(F_1(x), F_2(y))}{\partial x \partial y} = c(F_1(x), F_2(y)) f_1(x) f_2(y) \quad (15)$$

其中 $c(\cdot, \cdot)$, $f(\cdot, \cdot)$, $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ 分别为 $C(\cdot, \cdot)$, $F(\cdot, \cdot)$, $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$ 的密度 (Density) 函数. 如果 $F_1(\cdot)$ 代表 r_i 的概率分布函数, $F_2(\cdot)$ 代表 r_M 的概率分布函数, 那么我们可以将上述条件期望表示为:

$$\begin{aligned} E[r_i | r_M = q_\alpha(r_M)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} r_i f(r_i | r_M = q_\alpha(r_M)) dr_i \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} r_i \frac{f(r_i, q_\alpha(r_M))}{f_2(q_\alpha(r_M))} dr_i \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} r_i c(F_1(r_i), F_2(q_\alpha(r_M))) f_1(r_i) dr_i \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} r_i c(F_1(r_i), \alpha) f_1(r_i) dr_i = \int_0^1 c(x, \alpha) F_1^{-1}(x) dx \end{aligned} \quad (16)$$

将 (16) 式的结果带入到 (6) 式中就得到了 VaR- β 系数在 Copula 方法下的表达式.

例 Copula 的种类很多, 下面以 Frank Copula 为例说明如何在 Copula 方法计算 VaR- β 系数. 首先可以求出二元 Frank Copula 的密度函数为 (参见文献 [18]):

$$c^F(u_1, u_2) = \frac{\theta(1 - e^{-\theta})e^{\theta(u_1+u_2)}}{((1 - e^{-\theta}) - (1 - e^{-\theta u_1})(1 - e^{-\theta u_2}))^2}, \theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$$

为了体现收益率分布的厚尾特征, 可以选择 t 分布对边际分布进行建模:

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma((v_i + 1)/2)}{\sqrt{\pi v_i} \Gamma(v_i/2)} \left(1 + \frac{s^2}{v_i}\right)^{-\frac{v_i+1}{2}} ds, i = 1, 2$$

其中 v_i 为 t 分布的自由度. 这样, 我们只需要估计出 θ , v_i ($i = 1, 2$) 等参数, 就可以在 (16) 式的基础上计算 $E[r_i | r_M = q_\alpha(r_M)]$. 然后将相关结果带入 (6) 式中就可以计算出要估计的 VaR- β 系数.

4 实证研究

在本节的实证研究中, 我们着重检验 VaR- β 系数对风险升水的解释能力. 这里, 仍然按照常用的两步回归法^[19]: 第一步在历史数据的基础上估计出相应的 VaR- β 值; 第二步进行横截面上的回归:

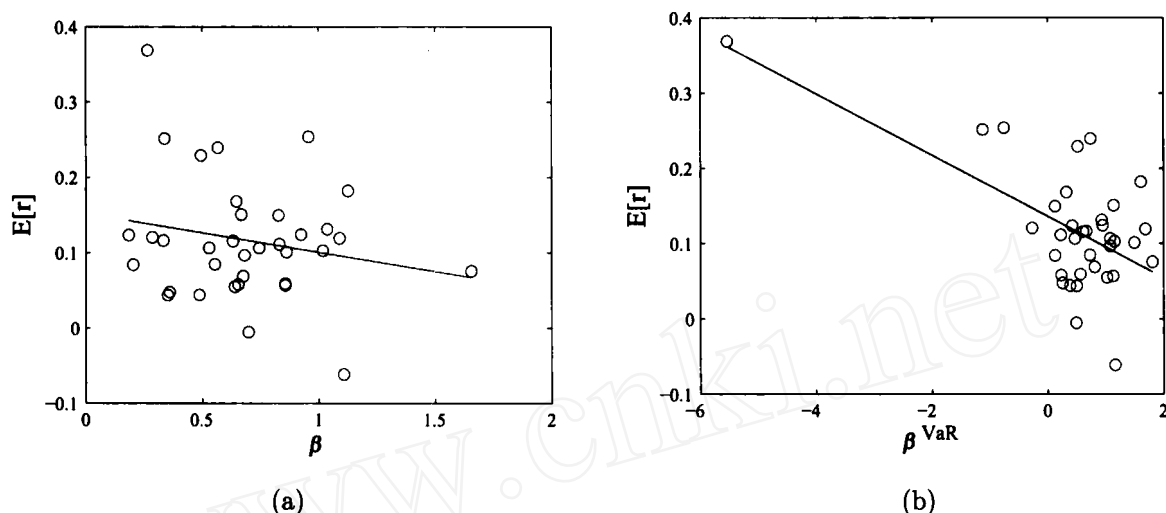
$$E[r_i] = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_i^{\text{VaR}} + \varepsilon_i \quad (17)$$

5. 关于 Copula 的性质以及其在金融分析中的应用等方面更为详细的讨论可以参见文献 [4,17].

其中 $E[r_i]$ 为风险资产 i 的期望收益率, β_i^{VaR} 为相应的 VaR- β 值, ε_i 代表残差项, γ_0 和 γ_1 是估计参数. 将上述程序中的 VaR- β 替换为传统 β 系数就是对 Sharpe^[1] 等人的 CAPM 的检验方法.

下面以香港证券市场为例使用前一节的核密度估计方法进行实证研究. 我们使用恒生指数作为市场组合, 选取指数中在 1999 年前上市的成分股作为风险资产⁶. 为了便于处理, 我们把 VaR- β 系数中涉及到的持有期和资产收益率的计算时间长度均设为一日, 并将日收益率以百分比计价.

图 1 分别给出了传统 β 系数与 VaR- β 系数对个股期望收益率的回归结果, 选取样本的时间跨度为 1999 年 6 月 1 日到 2005 年 5 月 31 日. 通过比较图中所给出的结果可以发现, VaR- β 系数与期望收益率有非常显著的关系, 并且能够解释相当一部分的期望收益率差异, 而传统 β 系数基本上和期望收益率不存在明显的关系.



(a) 传统 β 系数. 回归的 R^2 系数为 4%, γ_1 的 T 统计量为 -1.18 . (b) VaR- β 系数 ($\alpha = 0.28$). 回归的 R^2 系数为 37.9%, γ_1 的 T 统计量为 -4.49

图 1 回归结果比较 (同期的 β 系数与期望收益率)

图 1 给出的是同期的 β 系数与期望收益率回归的结果. 另一方面, 我们也非常关心当期的 β 系数与下一期的期望收益率之间的关系. 表 1 中的结果回答了这个问题 (期望收益率用估计 β 系数所用数据区间的下一年的数据进行估计). 从表中的结果可以看出, VaR- β 系数的回归基本上是十分显著的, 而传统 β 系数只有在最初几年显得比较显著.

表 1 回归结果比较

估计 β 系数 所用的数据	VaR- β 系数			传统 β 系数	
	α	R^2	T 统计量	R^2	T 统计量
1999/06/01-2000/05/31	0.0200	0.3395	-4.1182**	0.1404	-2.3212*
2000/06/01-2001/05/31	0.2800	0.4868	-5.5947**	0.1810	-2.7009**
2001/06/01-2002/05/31	0.0400	0.1470	-2.3845*	0.0799	-1.6927*
2002/06/01-2003/05/31	0.5000	0.0765	-1.6531	0.0595	-1.4448
2003/06/01-2004/05/31	0.0600	0.2483	3.3020**	0.0001	-0.0519

注: 符号 ** 和 * 分别表示在 1% 和 5% 的显著水平下拒绝系数 $\gamma_1 = 0$ 的原假设.

对于上述实证研究而言, 另一个值得注意的问题与 VaR- β 系数的置信度水平 (或 α) 有关. 从 VaR- β 系数的定义和估计方法来看, 在一般情况下, 不同置信度水平下计算出来的 VaR- β 系数是不同的, 我们在实证研究中也发现置信度水平的选择会对拟合结果产生影响. 虽然绝大多数置信度水平下的回归结果均不比传统 β 系数下的结果差, 我们还是在上述实证研究中选择列出一些回归结果较好的置信度水平. 如何确定最有意义的置信度水平是我们在下一步研究工作要解决的问题, 我们将另外撰文说明这一问题.

6. 数据来自 Datastream 数据库. 个股取自数据库里 LHKHSERV1105 中的 51 支成分股. 由于选取样本的时间跨度为 1999 年到 2005 年, 我们只选取了 1999 年前上市的成分股, 共 35 支股票.

下面使用前一节中的高阶矩方法按照两步回归的程序对基于 VaR 的 CAPM 进行实证研究: 以美国 Nasdaq 综合指数作为市场组合, 选取该指数的 51 支成份股作为个股, 选取样本的时间区间为 2002 年 3 月 21 日到 2004 年 3 月 22 日⁷.

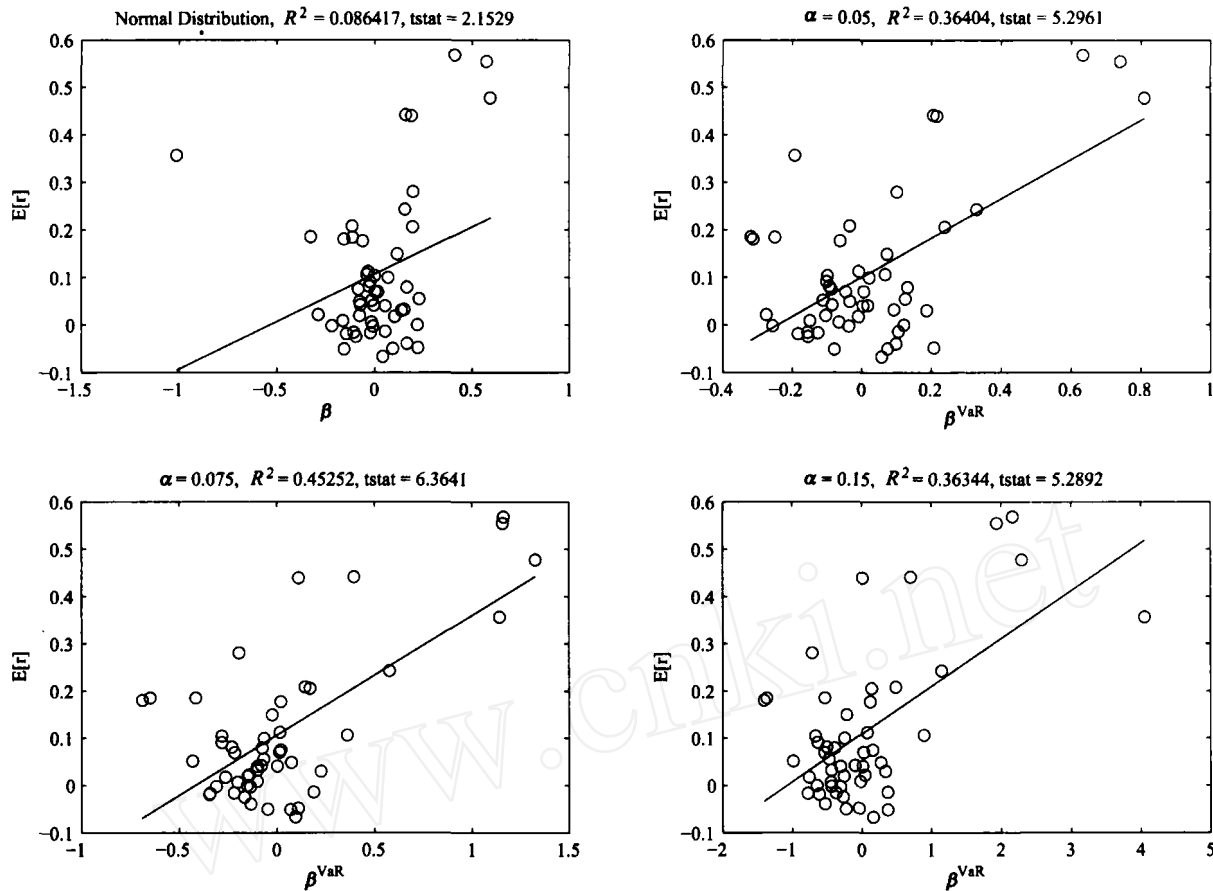


图 2 贝塔系数与期望收益率之间的关系

图 2 给出了 (17) 式中的 β_i^{VaR} 分别为经典 β (也即正态分布下的 VaR- β , 因此我们在图中标为 Normal Distribution) 和本文定义的高阶矩 VaR- β (α 分别为 0.05, 0.075, 0.15) 时的最小二乘回归结果: 小圆圈的位置由相应个股的期望收益率和 VaR- β 值确定, 拟合所得直线的斜率即为参数 γ_1 的估计值, R^2 为方程回归的拟合优度, t_{stat} 为参数 γ_1 的 t 统计量. 通过比较可以发现: 本文提出的高阶矩 VaR- β 系数确实有助于增加贝塔系数对资产收益的解释能力, 表现为 R^2 与 t 统计量均比经典模型有着显著性的提高. 同时我们也发现 VaR- β 系数的置信度水平 (或 α) 的选择会在一定程度上影响回归结果.

另一方面, 我们知道在前景理论 (Prospect theory) 的框架下, 置信度水平可以用于反映投资者对待风险的态度^[20]. 因此可以认为置信度水平在基于 VaR 的 CAPM (及 β 系数) 中反映了市场中的投资者情绪. 同时, 我们还知道在正态 (或椭圆) 分布下, 置信度水平的选择不会影响 VaR- β 系数的大小 (参见前文或文献 [7]). 这就涉及到一个问题: 投资者情绪到底会不会影响资产定价过程? 行为金融学对此的观点是资产定价过程在很大程度上会受到投资者情绪的影响, 投资者的心理行为对市场价格及其变动至关重要. 在标准金融理论中, 无论是悲观还是乐观的情绪都不会影响到资产的价格, 如风险厌恶系数的具体水平不会影响传统 CAPM 中的定价过程. 本文模型对于这个问题的答案是: 当投资者用规则的正态 (或椭圆) 分布来预期未来收益率时, 投资者的情绪不会影响到资产定价过程; 而当投资者的预期中包含了非对称相关和尾部极值相关等不规则的效应时, 投资者的情绪却会影响到资产定价过程.

7. 数据取自 Yahoo 金融. 按照公司的首字母顺序选取了 Nasdaq 综合指数中的前 51 支成份股.

5 结束语

β 系数的用途很广,但传统 β 系数背后的正态分布假设已被证明与现实存在显著的偏差,这会使得相关金融投资分析都是建立在不完整甚至是错误的信息基础之上.为了解决这一矛盾,本文在 VaR 估计方法的基础上进行创新,发展出核密度、高阶矩和 Copula 三种 VaR- β 系数的估计方法,并给出每种方法下 VaR- β 系数的解析表达式和实际估计的操作步骤.我们还针对 β 系数解释风险升水的问题使用香港证券市场中的数据进行了实证研究.检验结果发现 VaR- β 系数与期望收益率有非常显著的关系,并且能解释相当一部分的风险升水.

与传统的 β 系数相比, VaR- β 系数在理论框架和实证分析这两方面都有较好的表现.结合 VaR 方法在目前风险管理中的广泛应用,可以预计 VaR- β 系数无论是在理论上还是在实践中都会变得越来越重要.

参考文献

- [1] Sharpe W F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk[J]. Journal of Finance, 1964, 19: 425-442.
- [2] Lintner J. The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets[J]. Review of Economics and Statistics, 1965, 47: 13-37.
- [3] Mossin J. Equilibrium in a capital asset market[J]. Econometrica, 1966, 34: 268-290.
- [4] Embrechts P, McNeil A, Straumann D. Correlation and dependency in risk management: Properties and pitfalls[R]. Working Paper, ETH Zürich, Switzerland, 1999.
- [5] Longin F, Solnik B. Extreme correlation of international equity markets[J]. Journal of Finance, 2001, 56: 649-676.
- [6] Ang A, Chen J. Asymmetric correlations of equity portfolios[J]. Journal of Financial Economics, 2002, 63: 443-494.
- [7] 姚京, 袁子甲, 李仲飞. 基于相对 VaR 的资产配置和资本资产定价模型 [J]. 数量经济技术经济研究. 2005, 22(12): 133-142.
Yao J, Yuan Z J, Li Z F. Asset allocation and CAPM based on relative value-at-risk[J]. Journal of Quantitative & Technical Economics, 2005, 22(12): 133-142.
- [8] Ho T, Chen M, Eng F. Var analytics: Portfolio structure, key rate convexities, and VaR betas[J]. Journal of Portfolio Management, 1996, 23(1): 89-98.
- [9] Jorion P. Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk[M]. McGraw-Hill, New York, 1997.
- [10] Duffie D, Pan J. An overview of value at risk[J]. Journal of Derivatives, 1997, 4: 7-49.
- [11] Silverman B W. Density Estimation for Statistics and Data Analysis[M]. London: Chapman and Hall, 1986.
- [12] Sheather S J, Marron J S. Kernel quantile estimators[J]. Journal of the American Statistical Association, 1990, 85(410): 410-416.
- [13] Butler J S, Schachter B. Estimating value at risk with a precision measure by combining kernel estimation with historical simulation[J]. Review of Derivatives Research, 1998, 1: 371-390.
- [14] Athayde G, Flóres R G. Finding a maximum skewness portfolio—a general solution to three-moments portfolio choice[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2004, 28(7): 1335-1352.
- [15] Jondeau E, Rockinger M. Optimal portfolio allocation under higher moments[J]. European Financial Management, 2006, 12(1): 29-55.
- [16] Hill G W, Davis A W. Generalized asymptotic expansions of cornish-fisher type[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1968, 39: 1264-1273.
- [17] Nelsen R. An Introduction to Copulas[M]. New York: Springer, 1999.
- [18] Venter G. Tails of copulas[R]. ASTIN Conference, 2001.
- [19] Black F, Jensen M C, Scholes M. The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical. Tests Studies in the Theory of Capital Markets[M]. New York: Praeger, 1972.
- [20] Shefrin H, Statman M. Behavioral portfolio theory[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2000, 35(2): 127-151.