层次分析法中新元素导入的保序性条件°

章志敏　徐梅芳　徐泽水

(曲阜师范大学运筹学研究所, 山东 曲阜 273165)

摘要　对层次分析法中在单一准则下, 引入一组新元素时, 原有方案的保序性问题进行了分析讨论, 并且给出了强保序的充分必要条件

关键词　层次分析　强保序　协调性

The Conditions of Rank Preservation for Adding a Group of New Elements in AHP

Zhang Zhimin　Xu Meifang　Xu Zeshui

(Qufu Normal University, Qufu Shangdong 273165)

Abstract　This paper discusses and analyses rank preservation for adding a group of new elements under a criterion, and a necessary and sufficient condition of strong rank preservation is given.

Keywords　AHP; strong rank preservation; harmony

1　引言

在层次分析法(AHP)研究中, 对新元素导入保序性的讨论是一项很有意义的课题, Saaty 曾给出在单一准则下, 导入一个新元素时, 保持原有元素的相对权值不变的一个充分必要条件[1]。但是, 在实际问题中, 导入一组新元素是更有意义的, 因为一, 由于决策环境的变化, 需要增加一组新元素; 二, 在被比较元素个数很多时, 应用AHP 进行分析时, 需要分组进行比较。在单一准则下, 导入一组新元素或进行分组比较时, 若能保持原有元素排序权重比例关系, 则称这种导入是强保序的。本文给出了新元素导入时, 一类排序算法具有强保序的充要条件, 从而对导入新元素的问题研究奠定了理论基础。

2　主要结果

设有 $n+m$ 个方案, 分为两组, 各为 n,m 个进行比较, 得到了两组排序方案和权重, 在保持各自的两两比较的情况下, 把它们放在一起比较, 设前 n 个元素的判断矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 后 m 个元素的判断矩阵为 $B=(b_{ij})_{m\times m}$, $n+m$ 个放在一起比较, 得到判断矩阵 $A^*=(a^*_{ij})$, 则有 $A^*=\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$, 其中 $C=(c_{ij})_{n\times m}$, $D=(d_{ji})_{m\times n}$,

$$c_{ij}=1/d_{ji}\qquad i=1,2,\cdots,n;\quad j=n+1,n+2,\cdots,n+m$$

在文献[2]中, 王秋萍给出了应用特征根法(EM)导入新元素强保序的充分必要条件是 CD 和 A 有相同的主特征向量, DC 和 B 有相同的主特征向量。

° 本文于 1996 年 9 月 25 日收到
山东省教委资助项目

为了讨论其他算法导入新元素强保序的条件，我们引入下述定义。

定义 1　设 $T(\cdot)$ 是一种排序方法，$n+m$ 阶判断矩阵 A^* 存在分块形式：$A^*=\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$，其中 A,B 是方阵，阶数分别是 n 和 m。A,B 确定的排序权重分别为 $T(A)=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$，$T(B)=(v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots, v_{n+m})^T$ 若存在 $\alpha,\beta>0$，$\alpha+\beta=1$，使得 C,D 中元素满足 $C_{i,n+j}=\dfrac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}}$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$，判断矩阵 A^* 满足按排序方法 $T(\cdot)$ 确定的排序向量为 $T(A^*)=w^*=(\alpha w,\beta v)^T$，则称排序方法 $T(\cdot)$ 是协调的。

由协调性定义，我们可以看出，具有协调性的排序方法，在增加一组新元素后，均是强保序的，文献[4]中指出对数最小二乘法，最小偏差法等均具有协调性，因此，应用这些排序算法时，在增加一组新元素后，应是强保序的。

设原判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，加入一组元素的判断矩阵 $B=(b_{n+i,n+j})_{m\times m}$ 后，得到 $A^*=\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$ 为

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{1,n+1} & c_{1,n+2} & \cdots & c_{1,n+m} \\
 & & \vdots & & & & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n,n+1} & c_{n,n+2} & \cdots & c_{n,n+m} \\
d_{n+1,1} & d_{n+1\,2} & \cdots & d_{n+1,n} & b_{n+1,n+1} & b_{n+1,n+2} & \cdots & b_{n+1,n+m} \\
 & & \vdots & & & & \vdots & \\
d_{n+m,1} & d_{n+m\,2} & \cdots & d_{n+m,n} & b_{n+m,n+1} & b_{n+m,n+2} & \cdots & b_{n+m,n+m}
\end{pmatrix}$$

下面我们讨论强保序的充要条件。

由下列最优化问题导出的排序方法称为对数最小二乘法(LLSM)。

$$\begin{cases} \min J(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\ln w_i-\ln w_j-\ln a_{ij})^2 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i=1 \end{cases}$$

定理 1　在原有元素中加入一组新元素，用 LLSM 算法得到判断矩阵 A^* 的排序权值保持它们各自原有权值之比的充分必要条件是

$$C_{i,j+n}=\frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}},\quad d_{n+j,i}=\frac{1}{c_{i,n+j}},\quad \alpha+\beta=1,\ i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m$$

证　必要性

$$\mathrm{LLSM}(A)=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T \text{ 其中 } w_i=\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{j=1}^{n}w_j\right)^{\frac{1}{n}}\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\mathrm{LLSM}(B)=(v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots, v_{n+m})^T \text{ 其中 } v_{n+j}=\left(\prod_{j=1}^{m}b_{n+i,n+j}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\prod_{j=1}^{m}v_{n+j}\right)^{\frac{1}{m}}\quad i=1,2,\cdots,m$$

设 $A^*=\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$，由强保序性知 $\mathrm{LLSM}(A^*)=(\alpha w,\beta v)^T$，则有

$$\alpha w_i=\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha w_j\right)^{\frac{1}{n+m}}\left(\prod_{j=1}^{m}c_{i,n+j}\beta v_{n+j}\right)^{\frac{1}{n+m}}$$

$$(\alpha w_i)^{n+m}=\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha w_j\cdot\prod_{j=1}^{m}c_{i,n+j}\beta v_{n+j}$$

所以　$$(\alpha w_i)^m=\prod_{j=1}^{m}c_{i,n+j}\beta v_{n+j}\quad \text{即 } c_{i,n+j}=\frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}}\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m$$

又　$$\beta v_{n+j}=\left(\prod_{i=1}^{n}b_{n+j,i}\alpha w_i\right)^{\frac{1}{n+m}}\left(\prod_{i=1}^{m}b_{n+j,n+i}\beta v_{n+j}\right)^{\frac{1}{n+m}}$$

可得　$d_{n+j,i}=\dfrac{\beta v_{n+j}}{\alpha w_i}$　$i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m.$

充分性 由 $c_{i,\ n+j}=\dfrac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}}$, $d_{n+j,\ i}=\dfrac{1}{c_{i,n+j}}$, $\alpha+\beta=1$, $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m$. 又 LLSM 算法是协调的, 故 $w^*=(\alpha w,\beta v)^T$。

设判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 其伪互反矩阵为

$$\overline{A}=(\overline{a_{ij}}),\quad \overline{a_{ij}}=\begin{cases}a_{ij} & i\le j\\ w_j/w_i & i>j\end{cases}$$

求 $\overline{A}$ 的特征向量时, 得递推关系式

$$\begin{cases}w_{n-1}=a_{n-1,\ n}w_n,\\ w_i=\dfrac{1}{n-i}\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}w_j & i=n-2,n-3,\cdots,1\end{cases}$$

由此导出的排序向量称为梯度特征向量法(GEM)。

定理 2 在原元素中加入一组新元素, 用 GEM 算法得到判断矩阵 A^* 的排序权值保持它们各自原权值之比的充分必要条件是

$$c_{i,\ j+n}=\frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}},\quad \alpha+\beta=1,\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m$$

证 **必要性**

$$\mathrm{GEM}(A)=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T,\ 其中\ w_i=\frac{1}{n-i}\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}w_j$$

$$w_{n-1}=a_{n-1,n}w_n\quad i=1,2,\cdots,n-1$$

$$\mathrm{GEM}(B)=(v_{n+1},\ v_{n+2},\ \cdots,\ v_{n+m})^T,\ 其中\ v_{n+i}=\frac{1}{m-i}\sum_{j=1}^{m}b_{n+j,\ n+j}v_{n+j}$$

$$v_{v+m-1}=b_{n+m-1,\ n+m}v_{n+m}\quad i=1,2,\cdots,n-1$$

由强保序性知 $\mathrm{GEM}(A^*)=w^*=(\alpha w,\beta v)^T$

其中

$$\alpha w_i=\frac{1}{n+m-i}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha w_j+\sum_{j=1}^{m}c_{i,\ n+j}\beta v_{n+j}\right)$$

$$m\alpha w_i=\sum_{j=1}^{m}\alpha w_i=\sum_{j=1}^{m}c_{i,n+j}\beta v_{n+j}$$

即

$$c_{i,n+j}=\frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}}\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m$$

充分性 设 A^* 的伪互反矩阵为 $\overline{A}^*$, 求 $\overline{A}^*$ 的特征根问题等价于求 $u^*=\begin{pmatrix}u_A & c\\ 0 & nE+u_B\end{pmatrix}$ 的特征根问题

$$u_A=(u_{ij})\qquad u_B=(u'_{ij})$$

$$u_{ij}=\begin{cases}a_{ij} & i<j\\ i & i=j,\\ 0 & i>j\end{cases}\qquad u'_{ij}=\begin{cases}b_{ij} & i<j\\ i & i=j\\ 0 & i>j\end{cases}$$

令 $w^*_{n+m}=\beta v_{n+m}$

则 $w^*_{n+m-1}=b_{n+m-1,n+m}w^*_{n+m}=b_{n+m-1,\ n+m}\beta v_{n+m}v_{n+m}=\beta v_{n+m-1}$

利用递推关系式得

$$w^*_{n+i}=\frac{1}{m-i}\sum_{j=i+1}^{n}b_{n+i,n+j}w^*_{n+j}=\frac{1}{m-i}\sum_{j=i+1}^{m}b_{n+i,n+j}\beta v_{n+m-j}=\beta v_{n+i}\quad 1\le i\le m-2$$

又

$$nw^*_n+\sum_{j=1}^{m}c_{n,\ n+j}w^*_{n+j}=(n+m)w^*_n$$

即

$$nw^*_n+\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha w_n}{\beta v_{n+j}}\cdot\beta v_{n+j}=(m+n)w^*_n$$

所以 $mw_n^* = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha w_n}{\beta v_{n+j}} \cdot \beta v_{n+j} = m\alpha w_n$, 即 $w_n^* = \alpha w_n$。

利用递推关系式得

$$w_i^* = \frac{1}{n+m-i}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} w_j^* + \sum_{j=1}^{m} c_{i,n+j} w_{n+j}^*\right)$$

即

$$W_i^* = \frac{1}{n+m-i}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \alpha w_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}} \cdot \beta v_{n+j}\right)$$

所以 $w_i^* = \alpha w_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 故 $\mathrm{GEM}(A^*) = (\alpha w, \beta v)^T$,

由下列优化问题导出的排序方法称为最小偏差法(LDM)。

$$\begin{cases} \min J(w) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i} + a_{ji}\frac{w_i}{w_j} - 2\right) \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{cases}$$

$J(w)$ 有唯一的极小点 w^*, 且 w^* 是方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{w_j}{w_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\frac{w_i}{w_j} \quad i=1,2,\cdots,n$$

的唯一解。

定理 3 在原有元素中加入一组新元素, 用 LDM 算法得到判断矩阵 A^* 的排序权值保持它们各自原有权值之比的充分必要条件是

$$c_{i,j+m} = \frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}}, \quad d_{n+j,i} = \frac{1}{c_{i,n+j}}, \quad \alpha+\beta=1, \ i=1,2,\cdots,n; \ j=1,2,\cdots,m$$

证 必要性: $LDM(A) = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T = w$, 则 w 是下列方程组的唯一解

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{w_j}{w_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\frac{w_i}{w_j} \quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

$\mathrm{LDM}(B) = (v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots, v_{n+m})^T = v$, 则 v 是下列方程组的唯一解

$$\sum_{i=1}^{m} b_{n+j,n+i}\frac{v_{n+i}}{v_{n+j}} = \sum_{i=1}^{m} b_{n+i,n+j}\frac{v_{n+j}}{v_{n+i}} \quad j=1,2,\cdots,m \tag{2}$$

由强保序性知 $\mathrm{LDM}(A^*) = (\alpha w, \beta v)^T$

则 $(\alpha w, \beta v)^T$ 是下列方程组的唯一解

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{w_j}{w_i} + \sum_{j=1}^{m} c_{i,n+j}\frac{\beta v_{n+j}}{\alpha w_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{w_j}{w_i} + \sum_{j=1}^{m} d_{n+j,i}\frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}} \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{n+j,i}\frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}} + \sum_{i=1}^{m} b_{n+j,n+i}\frac{v_{n+i}}{v_{n+j}} = \sum_{i=1}^{n} c_{i,n+j}\frac{\beta v_{n+j}}{\alpha w_i} + \sum_{i=1}^{m} b_{n+i,n+j}\frac{v_{n+j}}{v_{n+i}} \tag{4}$$

将(1), (2)代入(3), (4)得

$$\sum_{j=1}^{m} c_{i,n+j}\frac{\beta v_{n+j}}{\alpha w_i} = \sum_{j=1}^{m} d_{n+j,i}\frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}} \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_{n+j,i}\frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}} = \sum_{i=1}^{n} c_{i,n+j}\frac{\beta v_{n+j}}{\alpha w_i} \tag{6}$$

因 $c_{i,n+j} > 0$, $d_{n+j,i} > 0$ 得 $c_{i,j+n} = \frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}}$, $d_{n+j,i} = \frac{1}{c_{i,n+j}}$, $\alpha+\beta=1$, $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m$

充分性 $C = (c_{ij})$ 且 $c_{i,j+n} = \frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}}$, $d_{n+j,i} = \frac{1}{c_{i,n+j}}$, $\alpha+\beta=1$ 又因 LDM 算法具有协调性, 故有 $w^* = (\alpha w, \beta v)^T$。

广义最小偏差法, 混合最小二乘法等均是协调的[3], 类似定理 3 的证明可得:

定理 4 在原有元素中加入一组新元素, 用广义最小偏差法等得到判断矩阵 A^* 的排序权值保持它们各

自原有权值之比的充分必要条件是

$$c_{i,n+j}=\frac{\alpha w_i}{\beta v_{n+j}},\quad d_{n+i,i}=\frac{1}{c_{i,n+j}},\quad \alpha+\beta=1,\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m$$

3 算例

由于上述结果均是构造性的, 例如分组比较得到

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & 2\\ 2 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

用 LLSM 算法和 LDM 算法得到

对应 A 的排序向量为 (0.3333334, 0.3333334, 0.3333334)

对应 B 的排序向量是 (0.6666666, 0.3333333)

由定理 1, 定理 3 可构造合成判断矩阵为

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 4\\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 & 4\\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

用 LLSM 算法和 LDM 算法得 A^* 的排序向量为

(0.266666, 0.2666667, 0.2666667, 0.1333333, 0.1333333)

此例用 GEM 算法得到 A 的排序向量为

(0.4285715, 0.3809524, 0.1904762)

B 的排序向量为 (0.6666667, 0.3333334)。

利用定理 2, 构造合成判断矩阵 A^* 为 $\begin{pmatrix}1 & 2 & \frac{1}{2} & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 1\\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$, 用 GEM 算法得到 A^* 的排序向量为

(0.073397, 0.060303223, 0.33337, 0.114286, 0.0571437)

参 考 文 献

1 Saaty T L. Concepts theory and techniques, rank generation, preservation and reversal in the AHP, Decision Sciences, 1987(18)

2 王秋萍. AHP 中严格保序性定理条件的修正. 系统工程理论与实践, 1996, 16(10)

3 章志敏, 陈学刚. 判断矩阵排序的混合最小二乘法. 曲阜师范大学学报, 1997, 23(1)

4 贾兰香, 陈宝谦. 层次分析决策方法排序问题的一般性质. 南开大学学报, 1991(2)