文章编号: 1000-6788(2009)09-0001-06

考虑收益偏度的最优对冲比率模型

张龙斌, 王春峰, 房振明
(天津大学 金融工程研究中心, 天津 300072)

摘　要　通过期望效用函数的三阶 Taylor 展开度量了偏度对投资者目标函数的影响, 建立了考虑偏度的最优对冲模型. 根据模型推导了最优对冲比率的解析公式, 该解析公式在偏度为零时可以退化为均值方差最优对冲比率, 因此可以看作传统均值方差对冲模型的推广. 以恒生指数期货和现货数据为例对模型进行了验证, 结果表明: 考虑偏度的最优对冲模型的效果要优于传统的均值方差对冲模型.

关键词　偏度; 最优对冲比率; 效用函数

中图分类号　F224.0　　　　**文献标志码**　A

Optimal hedging ratio model considering skewness

ZHANG Long-bin, WANG Chun-feng, FANG Zhen-ming
(Financial Engineering Research Center, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract　The impact of the skewness in the hedger's objective function is measured using a third-order Taylor Series approximation of expected utility, and a hedging model considering skewnes was established. Based on the model, analytic optimal hedging ratio solution was derived, and the analytical solution can degenerate to mean-variance hedging ratio when the skewnesses are equal to zeros, so it is an important extension of the mean-variance optimal hedging ratio. The empirical results from Hang Sheng index futures and spot suggest that the hedging model considering skewness provided better performance than traditional mean-variance hedging model.

Keywords　skewness; optimal hedging ratio; utility function

1　引言

期货合约的主要功能之一是对投资者持有的现货头寸风险暴露进行对冲. 其中, 期货最优对冲比率的确定又是使用期货进行对冲的关键问题. 因此, 在理论界和实务界有大量的文献对期货最优对冲比率的确定进行了研究. 传统的对冲模型大多是采用回报的方差作为风险的度量, 将方差最小化作为求解最优对冲比率的目标函数. 虽然最小方差对冲比率具有容易估计的优点, 然而最小方差却意味着投资者有无限的风险厌恶, 显然这是不合实际的. 而基于最大化效用函数的对冲模型中, 最优对冲比率的计算却依赖于模型中用到的所有随机变量的概率分布. 在基于期望效用最大化的对冲模型应用中, 随机变量通常被假定为服从正态分布, 这样期望效用函数就可以简化为仅仅取决于随机变量的期望和方差.

收稿日期: 2008-05-20
资助项目: 国家杰出青年基金 (70225002); 国家自然科学基金 (70771076)
作者简介: 张龙斌 (1982–), 男, 江西人, 天津大学管理学院博士, 研究方向: 金融工程与金融风险管理; 王春峰 (1966–), 男, 河北人, 天津大学管理学院教授, 研究方向: 金融工程与资本市场理论.

虽然随机变量的正态假设简化了模型的处理, 然而越来越多的实证研究表明: 金融时间序列的分布是非正态的, 而且是 "非对称" 的. 而偏度可以刻画金融随机变量的 "非对称" 特性, 因而越来越为国内外学者所重视. 如 Lai, Prakash, Sun 和 Yan, 许启发、张世英都研究了偏度对资产定价和投资组合和资产定价的影响, 研究表明偏度对资产定价存在显著影响, 在投资组合中考虑偏度的存在可以增加投资组合的期望效用 [1−4]. 然而, 到目前为止, 大多数关于最优对冲比率的研究都忽视了偏度的存在. 直到最近, 偏度的影响才开始被学术界所重视, 其中 Gilbert, Jones 研究了棉花现货价格的偏度对投资者对冲策略的影响, 研究表明: 现货价格的偏度与远期溢价的符号相反会导致投机性对冲的增加, 表现为最优对冲比率大于均值方差对冲比率 [5]. 但是, Gilbert, Jones 的研究仅仅考虑了现货价格偏度对投资者对冲决策的影响, 而未同时考虑期货价格偏度的影响. 迟国泰认为负的偏度会导致套期保值组合发生重大损失的概率增加, 并提出以最小方差为目标函数, 以收益率偏度非负为约束的对冲模型来控制重大损失的发生 [6]. 但是该模型仍是以最小方差为对冲目标, 偏度的影响仅体现在约束条件中.

在上述研究的基础上, 本文采用经典的效用分析框架, 通过期望效用函数的三阶 Taylor 展开度量了偏度对投资者目标的影响, 在此基础上建立了考虑偏度的最优对冲模型, 并推导得出了最优对冲比率的解析公式. 最后, 通过实证分析对模型的效果进行了验证.

2 研究模型

2.1 投资者的效用函数

记 R_s 和 R_f 分别表示现货和期货的回报率. 则对冲比率为 h 的对冲组合的收益率 $R_p = R_s - hR_f$.

假设投资者的效用函数为 $U(R_p)$, 为了获得偏度对投资者目标函数的影响, 对 $U(R_p)$ 进行三阶 Taylor 展开得到:

$$U(R_p) = \sum_{n=0}^{3} \frac{U^{(n)}(E(R_p))}{n!}(R_p - E(R_p))^n + o[R_p - E(R_p)]^3 \tag{1}$$

其中 $U^{(n)}$ 为效用函数的 n 阶导数. 由上式可以得到期望效用函数为:

$$E[U(R_p)] = \sum_{n=0}^{3} \frac{U^{(n)}(E(R_p))}{n!} E[(R_p - E(R_p))^n] + o[R_p - E(R_p)]^3 \tag{2}$$

因为, 对冲组合的条件中心矩和对冲组合收益率存在下列关系

$$\begin{cases} \mu_p = E(R_p) \\ \sigma_p^2 = E[R_p - E(R_p)]^2 \\ s_p^3 = E[R_p - E(R_p)]^3 \end{cases} \tag{3}$$

因此, 对冲组合的效用的期望可以通过条件中心矩来近似表达, 即

$$E[U(R_p)] = U(\mu_p) + \frac{U^{(2)}(\mu_p)}{2!}\sigma_p^2 + \frac{U^{(3)}(\mu_p)}{3!}s_p^3 \tag{4}$$

其中, s_p^3 表示对冲组合收益未标准化的偏度. 如果效用函数值 $U(R_p)$ 仅依赖于前面两项, 即 $U(R_p)$ 的三阶导数为零, 则效用函数 $U(R_p)$ 为通常使用的均值-方差效用函数. 但是, 如果 $U(R_p)$ 的三阶导数不为零, 即投资者对偏度敏感, 且投资组合收益分布不满足正态的条件下, 为考虑偏度对投资者效用的影响方式, 下面考虑如下具体的效用函数.

表 1 常用效用函数

	$U(R)$	$U^{(1)}(R)$	$U^{(2)}(R)$	$U^{(3)}(R)$
CRRA	$R^{1-\gamma}/(1-\gamma)$	$R^{-\gamma}$	$-\gamma R^{-(\gamma+1)}$	$\gamma(\gamma+1)R^{-(\gamma+2)}$
CARA	$-\exp(-\gamma R)$	$\gamma \exp(-\gamma R)$	$-\gamma^2 \exp(-\gamma R)$	$\gamma^3 \exp(-\gamma R)$
DARA	$\ln(R)$	$1/R$	$-1/R^2$	$2/R^3$

从表 1 中可以看出, 上述效用函数的三阶导数符号为正. 这表明: 投资者偏好正的偏度, 而厌恶负的偏度. 其原因在于, 正的偏度值意味着收益大的概率要比收益小的概率要大, 即 $P(R > E(R) + C) > P(R <$

$E(R)-C)$[7].

2.2 考虑偏度的最优对冲比率模型

由公式 (4) 可知, 可以利用对冲组合收益的期望、方差、偏度对任意一个效用函数进行近似. 那么, 考虑偏度影响条件下的最优对冲比率求解可以表示为下面的最优化问题:

$$\max U\left(\mu_p, \sigma_p^2, s_p^3\right)$$
$$\left\{\begin{array}{l} \mu_{p,t}=W_t^T R_t \\ \sigma_{p,t}^2=W_t^T H_t W_t \\ s_{p,t}^3=W_t^T S_t W_t \otimes W_t \end{array}\right. \tag{5}$$

其中, $\otimes$ 为 Kronecker 积. $R=[R_s,R_f]^{\mathrm{T}}$ 为现货和期货的收益向量, $W=[1,-h]^{\mathrm{T}}$ 表示现货和期货的相对头寸, $\mu=E(R)$ 为收益向量的期望, 而 $H=E\left[(R-\mu)(R-\mu)^{\mathrm{T}}\right]$ 和 $S=E\left[(R-\mu)(R-\mu)^{\mathrm{T}}\otimes(R-\mu)^{\mathrm{T}}\right]$, 分别表示 R 协方差矩阵和协偏度矩阵. 矩阵的具体形式分别可以表示为 $H=\begin{pmatrix} h_{ss} & h_{sf} \\ h_{fs} & h_{ff}\end{pmatrix}$ 和 $S=\begin{pmatrix} s_{sss} & s_{ssf} & s_{sfs} & s_{sff} \\ s_{fss} & s_{fsf} & s_{ffs} & s_{fff}\end{pmatrix}$. 根据矩阵中元素的对称性对矩阵进行化简可以得到矩阵的简化形式 $H=\begin{pmatrix} h_{ss} & h_{sf} \\ h_{sf} & h_{ff}\end{pmatrix}$ 和 $S=\begin{pmatrix} s_{sss} & s_{ssf} & s_{sff} & s_{sff} \\ s_{ssf} & s_{sff} & s_{sff} & s_{fff}\end{pmatrix}$.

2.3 对冲比率计算公式的推导

2.3.1 均值方差最优对冲比率

为了便于将本文模型与传统的均值方差对冲比率模型进行比较, 首先考虑效用函数的二次泰勒近似:

$$E\left[U\left(R_p\right)\right]=U\left(\mu_p\right)+\frac{U^{(2)}\left(\mu_p\right)}{2!}\sigma_p^2 \tag{6}$$

最优对冲比率 h^* 应满足如下一阶条件时:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U\left(\mu_p,\sigma_p^2\right)}{\mathrm{d}h}&=U_1(0,-1)\mu+2U_2(0,-1)HW\\&=-U_1\mu_f+2U_2\left(-h_{sf}+h_{ff}\tilde{h}^*\right)=0\end{aligned} \tag{7}$$

上述一阶条件存在唯一解:

$$\tilde{h}^*=\frac{U_1\mu_f}{2U_2h_{ff}}+\frac{h_{sf}}{h_{ff}} \tag{8}$$

其中 $U_1=\partial U\left(\mu_p,\sigma_p^2\right)/\partial\mu_p$, $U_2=\partial U\left(\mu_p,\sigma_p^2\right)/\partial\sigma_p^2$. 从公式 (7) 可以看出二次效用函数的二阶导数为 $2U_2h_{ff}$ 恒小于零. 因此, 效用函数的曲线为一开口向下的抛物线, 且在 $\tilde{h}^*$ 处取最大值. 特别, 当 μ_f 近似为零时, $h^*=\frac{h_{sf}}{h_{ff}}$ 为通常使用的最小方差对冲比率.

2.3.2 考虑偏度的最优对冲比率的求解

为了求解考虑偏度的最优对冲比率, 下面进一步考虑模型 (5). 为求解模型的极大值点, 首先考虑如下一阶条件:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U\left(\mu_p,\sigma_p^2,s_p^3\right)}{\mathrm{d}h}&=U_1(0,-1)\mu_p+2U_{2,t}(0,-1)H_tW_t+3U_3(0,-1)SW\otimes W\\&=-U_1\mu_f+2U_2\left(-h_{sf}+h_{ff}h^*\right)+3U_3\left(-s_{ssf}+2s_{sff}h^*-s_{fff}h^{*2}\right)\\&=-3U_3s_{fff}h^{*2}+\left(6U_3s_{sff}+2U_2h_{ff}\right)h^*-\left(U_1\mu_f+2U_2h_{sf}+3U_3s_{ssf}\right)=0\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $U_3=\partial U\left(\mu_p,s_p^3\right)/\partial s_p^3$. 从公式 (9) 可以看出, 当 s_{fff} 不等于零时, 一阶条件为 h^* 的一元二次方程, 因此满足特定条件时方程 (9) 通常有两个实根:

$$\begin{aligned}h_1^*&=\frac{\left(6U_3s_{sff}+2U_2h_{ff}\right)+\sqrt{\left(6U_3s_{sff}+2U_2h_{ff}\right)^2-12U_3s_{fff}\left(U_1\mu_f+2U_2h_{sf}+3U_3s_{ssf}\right)}}{2*3U_3s_{fff}}\\h_2^*&=\frac{\left(6U_3s_{sff}+2U_2h_{ff}\right)-\sqrt{\left(6U_3s_{sff}+2U_2h_{ff}\right)^2-12U_3s_{fff}\left(U_1\mu_f+2U_2h_{sf}+3U_3s_{ssf}\right)}}{2*3U_3s_{fff}}\end{aligned} \tag{10}$$

进一步可以求得目标函数 $U\left(\mu_p,\sigma_p^2,s_p^3\right)$ 在上述实根处的二阶导数:

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}h^2}\Big|_{h=h_1^*}=-\sqrt{\left(6U_3s_{sff}+2U_2h_{ff}\right)^2-12U_3s_{fff}\left(U_1\mu_f+2U_2h_{sf}+3U_3s_{ssf}\right)}<0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}h^2}\Big|_{h=h_2^*}=\sqrt{\left(6U_3s_{sff}+2U_2h_{ff}\right)^2-12U_3s_{fff}\left(U_1\mu_f+2U_2h_{sf}+3U_3s_{ssf}\right)}>0 \tag{11}$$

由此 (11) 可知 h_1^* 为模型 (5) 的极大值, 而 h_2^* 为极小值. 值得注意的是, 根据一阶条件计算得到的 h_1^* 是效用函数的凹区间内的局部最优解, 而不是全局最优解. 但是, 由于实际计算中, 效用函数在对冲比率的所有合理取值范围内都是凹函数, 所以可以认为 h_1^* 便为需要求解得最优对冲比率. 而且, 下面将看到, 这个最优对冲比率的解析解还具有可以退化为均值方差对冲比率的特性. 下面对 h_1^* 的形式进行变换, 得到:

$$h_1^*=\frac{2\left(U_1\mu_f+2U_2h_{sf}+3U_3s_{ssf}\right)}{\left(6U_3s_{sff}+2U_2h_{ff}\right)-\sqrt{\left(6U_3s_{sff}+2U_2h_{ff}\right)^2-12U_3s_{fff}\left(U_1\mu_f+2U_2h_{sf}+3U_3s_{ssf}\right)}} \tag{12}$$

从公式 (12) 可以看出, 当 s_{fff}, s_{ssf}, s_{sff} 为零时, h_1^* 可以退化为公式 (8). 由此可见, 考虑偏度的最优对冲比率公式 (12) 是均值方差效用函数下的最优对冲比率计算公式 (8) 的推广和一般化. 综上所述, h_1^* 为三次目标函数下的最优对冲比率.

3 实证分析

3.1 数据的选取

本文选择以香港恒生指数 (HSI33) 期货和现货为研究对象, 样本为 2007 年 6 月 1 日到 2008 年 3 月 31 日的恒生指数期货和现货的日收盘价, 样本容量为 203, 数据源自 Bloomberg. 收益率采用 $r_t=100\ln\left(p_t/p_{t-1}\right)$, 其中 p_t 为指数期货或现货的日收盘价. 表 2 给出了恒生指数期货和现货收益的统计特征描述:

表 2 数据统计特性

	均值	标准差	偏度	Jarque-Bera
现货	0.0695	2.4182	0.1463	33.9990**
期货	0.0674	2.4765	0.2313	28.9419**

注: * 和 ** 分别代表在 5%和 1%水平下显著.

从表 2 的描述性统计可以看到: 恒生指数期货和现货回报率序列的 Jarque-Bera 检验都以 1%的水平显著, 这说明恒生指数期货和现货的回报序列都不服从正态分布假定. 而且, 恒生指数期货和现货的回报率都表现出较为明显的 "有偏" 特征, 因此在对其收益分布进行刻画时, 有必要考虑其偏度的影响.

3.2 对冲比率的估计模型

为了获得最优对冲比率的具体形式, 需要首先对效用函数的形式进行具体设定. 这里考虑常绝对风险厌恶函数 $U\left(R_p\right)=-\exp\left(-\gamma R_p\right)$, 其中 γ 为投资者的绝对风险厌恶系数. 为了考察偏度的影响, 下面考虑 $E\left[U\left(R_p\right)\right]$ 的三次近似:

$$U\left(\mu_p,\sigma_p^2,s_p^3\right)\approx-\exp\left(-\gamma\mu_p\right)\left(1+\frac{\gamma^2}{2!}\sigma_p^2-\frac{\gamma^3}{3!}s_p^3\right) \tag{14}$$

通过公式 (14) 可以进一步计算出 $U\left(\mu_p,\sigma_p^2,s_p^3\right)$ 的偏导数:

$$U_1=\frac{\partial E\left[U\left(r_p\right)\right]}{\partial\mu_p}=\gamma\exp\left(-\gamma\mu_p\right)\left(1+\frac{\gamma^2}{2}\sigma_p^2-\frac{\gamma^3}{3!}s_p^3\right)$$
$$U_2=\frac{\partial E\left[U\left(r_p\right)\right]}{\partial\sigma_p^2}=-\frac{\gamma^2}{2}\exp\left(-\gamma\mu_p\right)$$
$$U_3=\frac{\partial E\left[U\left(r_p\right)\right]}{\partial s_p^3}=\frac{\gamma^3}{3!}\exp\left(-\gamma\mu_p\right) \tag{15}$$

由于实际中 μ_f 的取值通常不显著, 下面的计算中令 $\mu_f=0$. 其合理性从表 2 的统计分析也可以看出: 表 2 的统计分析表明恒生指数期货回报的期望值 μ_f 不显著, 这说明恒生指数期货的收益序列基本上可以看

作是一个鞅过程. 将 $\mu_f = 0$ 和公式 (14)、(15) 代入公式 (12), 则最优对冲比率计算公式 (12) 可以化简为:

$$h^* = \frac{(\gamma s_{ssf} - 2h_{sf})}{(\gamma s_{sff} - h_{ff}) - \sqrt{(\gamma s_{sff} - h_{ff})^2 - \gamma s_{fff}(\gamma s_{ssf} - 2h_{sf})}} \tag{16}$$

3.3 实证结果与分析

为了使用公式 (16) 计算最优对冲比率, 首先需要对恒生指数期货和现货收益的协方差和协偏度矩阵进行估计. 类似 Sun & Yan 和 S. Gilbert & Jones 的处理, 下面对恒生指数期货和现货收益序列每个月份的协方差和协偏度矩阵进行计算, 结果如表 3 所示.

表 3 恒生指数期货和现货的协方差和协偏度矩阵

	07–06	07–07	07–08	07–09	07–10	07–11	07–12	08–01	08–02	08–03
Hss	0.8901	1.1915	5.2122	2.0261	4.4322	8.2285	3.3588	17.093	5.7204	9.103
Hff	0.8837	1.3112	6.3309	2.3975	5.846	8.7375	4.6436	14.826	5.4451	9.1725
Hsf	0.8508	1.2276	5.672	2.1526	4.9797	8.3102	3.8815	15.736	5.4602	8.7539
Ssss	1.1413	–0.4263	8.3034	5.4794	4.0797	–8.3923	–3.3691	6.0987	–5.6695	–0.2442
Sfff	0.8944	–0.3661	13.75	6.5774	7.4663	–9.019	–4.5633	25.226	–8.8373	15.876
Sssf	1.0116	–0.4143	9.8002	5.7771	5.0632	–8.3643	–3.7836	13.522	–6.8488	5.1832
Ssff	0.9348	–0.3910	11.599	6.1449	6.1815	–8.6153	–4.2014	19.848	–7.9201	10.505

计算出每个月份的协方差和协偏度矩阵以后, 根据公式 (16), 可以计算得到每个月份的最优对冲比率的大小. 类似 S. Gilbert & S. K. Jones 对风险厌恶系数的处理, 本文对风险厌恶系数 γ 的取值为 0、0.01、0.1、1 的最优对冲比率进行了估计, 计算结果如表 4 所示.

表 4 最优对冲比率计算结果

γ	07–06	07–07	07–08	07–09	07–10	07–11	07–12	08–01	08–02	08–03
0	0.9628	0.9362	0.8959	0.8978	0.8518	0.9511	0.8358	1.0614	1.0028	0.9543
0.01	0.9626	0.9362	0.8959	0.8978	0.8519	0.9512	0.8358	1.0615	1.0026	0.9546
0.1	0.9605	0.9363	0.8955	0.8969	0.8522	0.9519	0.8353	1.0620	1.0014	0.9565
1	0.9374	0.9373	0.8921	0.8872	0.8560	0.9588	0.8307	1.0658	0.9864	0.9690

表 4 中, $\gamma = 0$ 时计算得到的最优对冲比率为最小方差对冲比率. 而随着风险厌恶系数 γ 的增大, 计算得到的最优对冲比率和最小方差对冲比率的差异逐渐增大, 这表明偏度对最优对冲比率的影响逐渐增大. 但是, 偏度对最优对冲比率的具体影响却不能简单确定, 例如 07–07 和 08–02 的样本中, 恒生指数期货和现货的收益序列都为负偏, 但是 07–07 计算得到的最优对冲比率随着风险厌恶系数的增大而增大, 而 08–02 计算得到的最优对冲比率却随着风险厌恶系数的增大而减小.

为了检验考虑偏度的最优对冲模型的对冲效果, 下面列出了样本区间内对冲组合的收益均值、方差、偏度和效用均值, 以比较不同风险厌恶程度下的对冲效果. 比较结果如表 5 所示.

表 5 对冲效率对比分析

γ	均值	方差	偏度	效用
0	0.0191	0.2125	–0.0314	–1.0905
0.01	0.0191	0.2125	–0.0314	–1.0905
0.1	0.0192	0.2126	–0.0311	–1.0903
1	0.0203	0.2137	–0.0282	–1.0892

从表 5 中可以看出随着投资者风险厌恶程度的增加, 对冲组合的平均收益和偏度明显增大, 平均效用也明显增加. 而收益的波动性的增加不是特别明显. 由此可见, 考虑偏度影响后, 对冲的效果得到了改进, 投资

者的平均效用也得到了增加. 这表明, 本文给出的考虑偏度的最优对冲比率模型的效果要优于传统的均值方差对冲比率模型.

4 小结

本文通过期望效用的三阶 Taylor 展开度量了偏度对投资者目标函数的影响, 在此基础上建立了考虑偏度的最优对冲模型. 在模型的基础上数理推导了最优对冲比率的解析公式. 当偏度为零时, 推导的最优对冲比率解析公式可以退化为传统的均值方差对冲比率, 因此本文的模型可以看作是传统的均值方差对冲模型的推广. 以恒生指数期货和现货数据为例对模型进行了验证和比较, 结果表明考虑偏度的最优对冲模型的效果要优于传统的均值方差对冲模型.

参考文献

[1] Lai T Y. Portfolio selection with skewness: A multiple-objective approach[J]. Review of Quantitative Finance and Accounting, 1991(1): 293–305.

[2] Prakash A, Chang C, Pactwa T. Selecting a portfolio with skewness: Recent evidence from US, European, and Latin American equity markets[J]. Journal of Banking and Finance, 2003, 27(7): 1375–1390.

[3] Sunh Q, Yan Y. Skewness persistence with optimal portfolio selection[J]. Journal of Banking and Finance, 2003, 27: 1111–1121.

[4] 蒋翠侠, 许启发, 张世英. 金融市场条件高阶矩风险与动态组合投资 [J]. 中国管理科学, 2007(1): 27–33.
Jiang C X, Xu Q F, Zhang S Y. Conditional higher moments risk and dynamic portfolio in financial markets[J]. Chinese Journal of Management Science, 2007(1): 27–33.

[5] Scott G, Samuel K J, Gay H M. The impact of skewness in the hedging decision[J]. The Journal of Futures Markets, 2006, 26(5): 503–520.

[6] 迟国泰, 杨中原, 王玉刚. 基于重大损失控制的套期保值优化模型 [J]. 预测, 2007, 26(6): 57–63.
Chi G T, Yang Z Y, Wang Y G. Optimal model of hedging based on the constraints of hedger's serious loss[J]. Forecasting, 2007, 26 (6): 57–63.

[7] Jondeau E, Rockinger M. Optimal portfolio allocation under higher moments[J]. Journal of European Financial Management, 2006(12): 29–55.